

CP 2: Gravitation

CP2
③

Niveau: L2

Pré-requis: - mécanique du pt
- relatif

Plan: I Syst à 2 corps

- 1) Réduction canonique d'un pb à 2 corps (H).
- 2) Lois de conservation. ((H) surtout, mais pour $\vec{n}_G(T)$)
- 3) Energie potentielle (T).

II Mouvement des astres

- 1) Etude générale de la trajectoire (T)
- 2) Mot des planètes (T, H).
- 3) Mot des satellites.

Info (H) Kepler émerge entre 1604 et 1619, 3 lois expérimentales sur le mot des planètes. C'est à partir de ces lois expérimentales que Newton édifie sa mécanique et sa théorie de la gravitation en 1687. La notion de force de gravitation qui agit instantanément à distance sans nécessiter de support matériel pour sa transmission, a provoqué bcp de réticences de la part de ses contemporains.

(n) La gravitation canonique, à priori, l'interaction entre 2 astres, c'est ce que nous allons étudier now.

I 1) ^{mot d'ensemble} Syst: $\{ 2 \text{ particules isolées, } m_1, m_2 \}$
Ref: \mathcal{R} galiléen.
Forces: \vec{P}_1 et \vec{P}_2 tq $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 \vec{O}\vec{n}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{O}\vec{n}_2}{dt^2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

Soit G le barycentre du syst: $\Rightarrow \frac{d^2 \vec{O}\vec{G}}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow$ mot rectiligne uniforme.

(n) On se considère \mathcal{G} ref barycentrique \Rightarrow Galiléen.

mouvement relatif: $\frac{d^2 \vec{O}\vec{n}_2 - d^2 \vec{O}\vec{n}_1}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \vec{P}_2 - \frac{1}{m_1} \vec{P}_1 = \mu \vec{P}_2 = \frac{d^2 \vec{n}_2}{dt^2}$

$\Rightarrow \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{P}_2$ c'est le mot relatif de n_2 / n_1 .

mot des particules de \mathcal{R} $\vec{O}\vec{n}_1 = \vec{O}\vec{G}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}$
 $\vec{O}\vec{n}_2 = \vec{O}\vec{G} - \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}$

mot barycentrique des particules. Les trajectoires de \mathcal{R}^+ des particules n_1 et n_2 sont homothétiques de celle de la particule réduite.

2) $\vec{L}^{(H)}$: \vec{L} hyp. isolée $\Rightarrow \vec{r}$ de \mathcal{R} est coté.

$\vec{L}^+ : \vec{L}^+ = m_1 \vec{O}\vec{n}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{O}\vec{n}_2 \wedge \vec{v}_2$
 $= \vec{O}\vec{n} \wedge \left[-\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2 m_2}{m_1+m_2} \vec{v}_2 \right]$
 $= \mu \vec{O}\vec{n} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$
 $= \mu \vec{O}\vec{n} \wedge \left(\frac{d\vec{O}\vec{n}_2}{dt} - \frac{d\vec{O}\vec{n}_1}{dt} \right) = \mu \vec{O}\vec{n} \wedge \frac{d(\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{dt} = \mu \vec{O}\vec{n} \wedge \vec{v}^+$

$\Rightarrow \frac{d\vec{L}^+}{dt} = \vec{J}\vec{O}, \text{ ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}^+ = \text{cte}$

$\Rightarrow \vec{L}^+$ est un invariant vectoriel du mot.

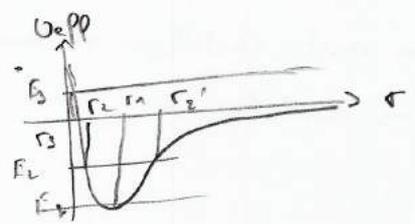
$\vec{L}^+ = \vec{O}\vec{n} \wedge \mu \vec{v}^+ = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_3 \Rightarrow C = r^2 \dot{\theta}$

(*) et a a: La conservation du moment cinétique traduit le fait que le mot est plan et que le ray-vecteur balaye une aire coté par unité de tps.

$E^{* (H)}$ * $E_c^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu v^{*2} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$
 * $E^* = \cancel{E_{pot}} + E_{pot} + E_c^* = E_p(r) + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2$
 $= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$

cette énergie se conserve.

3) $E_{peff} = \frac{1}{2} \mu \frac{c^2}{r^2} + E_p(r)$
 avec (1) $\Rightarrow E_{peff} \leq E_n^* \Leftrightarrow E_0 - V_{eff}(r) \geq 0$



$\rightarrow E_0 = E_3$, inégalité vérifiée pour $r \geq r_3 \Rightarrow$ état de diffusion
 $\rightarrow E_1 \leq E_0 \leq 0$ ($E_0 = E_2$) pour $r_1 \leq r \leq r_2'$: état lie
 $\rightarrow E_0 = E_1$ pour $r = r_1$: état lie
 $\rightarrow E_0 < E_1$ impossible

Transitions

Syst à 2 corps \Rightarrow - même reduite \Rightarrow 1 seul corps.

Ici on va regarder maintenant la force centrale de type newtonienne !

$$\vec{p} = \frac{k}{r^2} \vec{ur} \quad \text{avec } k \text{ (planète) } < 0 \text{ attractive.}$$

LP2
②

II

1) ^(M)

Utilisation des potentiels de Binet. $u = \frac{1}{r}$

$$u^2 = c^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) \quad \vec{a} = -c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{ur}$$

$$\Rightarrow m \vec{a} = \vec{f} \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{mc^2} \Leftrightarrow \Gamma = \frac{p}{-\epsilon + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

avec $p = \frac{mc^2}{|k|}$, $\epsilon = \pm 1$, $e < 1$ (orbite) ellipse
 $e > 1$ (orbite) hyperbole
 $e = 1$ (orbite) parabole.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \mu c^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) + Ku.$$

$$\Rightarrow E = \frac{k^2}{2m c^2} (e^2 - 1).$$

2) ^(M, H)

Cas des trajectoires circulaires:

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{R}} \quad (\text{mot circulaire uniforme})$$

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \Rightarrow \text{3^e loi de Kepler}$$

Cas des mots elliptiques:

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad c = \frac{pe}{1-e^2}, \quad e = \frac{c}{a}.$$

RQ: Période de révolution:

$$T = \frac{\text{Aire de l'ellipse}}{\text{Vitesse angulaire}} \Rightarrow \dots$$

\rightarrow vérifie les 3 lois de Kepler.

3) Ici $m \ll M$!

+ hyp: symétrie sphérique.

+ h assez élevée pour pas être freiné par l'atm terrestre et sans être trop éloigné de la Terre

• vitesse cosmique.

• orbite de libération ...

Conclusion:

sur la hyp de II 3) avec les temps de marée!
ou syst à N corps.

CP4: Précession de la toupie micro et macro. CP4.

Niveau: L3.

Pré-requis: PFD.

Plan: I, II, III, IV

Biblio. (B) • Péica 2 Boutrigny
(mais à l'avant pas de St-Jean)

(P) = Perez, méca

(BFR) = BFR, méca 2.

(C) = Cohen

peut être Lagrange

I Etude de nut de précession

- 1) Petit angle pb et rotation (B)
- 2) Approximat° gyroskopique (P)
- 3) Axe de la toupie. (BFR)

II Applicat° de la dynamique macro (P)

- 1) Gyroscopie
- 2) Précession des équinoxes.

III Applicat° de la dynamique macro (C)

- 1) Précession de Larmor
- 2) RMN.

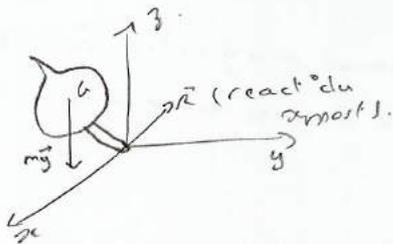
Info: exp de la toupie avec une poutre.

I] 1) Précession est liée au chgt graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un solide.

...

2) (P) On dit que le nut, autour d'un pt fixe, d'un solide, ayant la symétrie de révolution, satisfait à l'approximat° gyroskopique lorsque sa vit de rotat° autour de son axe de revolut° est très grande devant toute la autre vit de rotat° $\Rightarrow \vec{\omega} \approx \omega \vec{e}_3$.

3)



toupie en pointe:

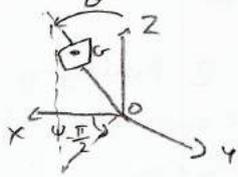
• TRE de la toupie de G ref Laborator. = Gal.

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \Big|_R = \vec{r} + m\vec{g}$$

TAC en O

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{O}G \wedge m\vec{g} \quad \text{car } \vec{r} \text{ est une n.c.m.}$$

Ici approximat° gyroscopique $\vec{\sigma}_0 \approx J \vec{\omega}$.



axe Oz devient un cône autour de la verticale OZ
à la vit angulaire $\dot{\psi}$ = vitesse de précession.

Soit \vec{e} le vecteur porté par Oz

\vec{u} et \vec{u}' les vecteurs tournants du plan horizontal

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_0 = J \omega \sin \theta \vec{u} + J \omega \cos \theta \vec{e}$$

Puis $O\vec{G} = \vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{\pi}_0 = O\vec{G} \wedge m \vec{g} = m g a \sin \theta \vec{u}'$$

$$O\vec{G} = a \sin \theta \vec{u} + a \cos \theta \vec{e}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = J \frac{d}{dt} (\omega \sin \theta) \vec{u} + J \omega \sin \theta \dot{\psi} \vec{u}' + J \frac{d}{dt} (\omega \cos \theta) \vec{e}$$

projections: $\frac{d}{dt} (\omega \sin \theta) = 0$, $J \omega \sin \theta \dot{\psi} = m g a \sin \theta$
 $\frac{d}{dt} (\omega \cos \theta) = 0$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{m g a}{J \omega}$$

validité de l'approximat° $|\dot{\psi}| \ll \omega \Leftrightarrow \omega \gg \sqrt{\frac{m g a}{J}}$

II) 1)

solide en rotation tournant autour de sa axe à très grande vit et suspendu à sa cône de masse C .
 \Rightarrow permet de déceler le mot de rotat° de la Terre.

2) - Cette variation de la position apparente des Soleil, des étoiles, cela contribue à la sphéricité apparente de la Terre.
- vérifier la validité de l'approximat° gyroscopique de manière numérique

III) 1)

moment cinétique \vec{J} possédant un moment magnétique $\vec{m} = \gamma \vec{J}$
et plongé ds \vec{B}_0 statique; ce dernier exerce un couple $\vec{m} \wedge \vec{B}_0$

équation: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$

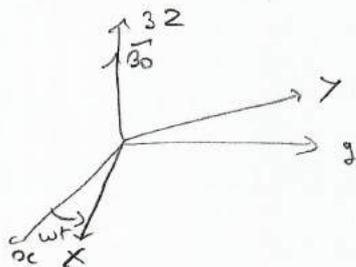
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \vec{m}(t) = \gamma \vec{m}(t) \wedge \vec{B}_0 \quad (1)$$

d'où $\frac{d}{dt} (\vec{m}^2(t)) = 0$ et $\frac{d}{dt} (\vec{m} \cdot \vec{B}_0) = 0$

\vec{m} évolue donc en gardant un module constant et en faisant un angle constant avec \vec{B}_0 . Il suffit alors de projeter (1) sur le plan \perp à \vec{B}_0 pour voir que \vec{m} tourne autour de \vec{B}_0 avec la vitesse $\omega_0 = -\gamma B_0$.

2) RMN on rajoute un $\vec{B}_1 \perp$ à \vec{B}_0 tournant à ω_1 .

tg : $\omega_0 = -\gamma B_0$
 $\omega_1 = -\gamma B_1$



$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

Do OXYZ: $\frac{d\vec{m}}{dt} = -\omega_0 \vec{e}_3 \wedge \vec{m}$

$$\Rightarrow \vec{B}_0(t) = \frac{1}{\gamma} (\Delta \omega \vec{e}_3 - \omega_1 \vec{x})$$

LP 6: V Cinématique relativiste

LP 6
①

Niveau: L3

Pré-requis: Méca classique
EOM
Interférences

Biblio⁽¹⁾ = (surtout) Tleca + (Méca classiq
de syst de pts et notions de relativité)

Bertin, Favre, Renault

(2) • Relativité restreinte, Senay

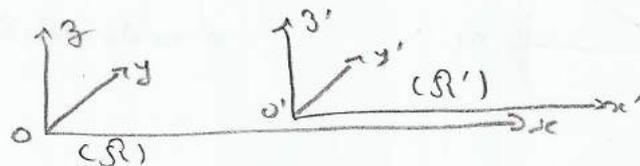
(3) • évaluation: Relativité et
invariants, Perez.

Info: Pb de l'EOM et à la méca classique.

I INSUFFISANCE DE LA THEORIE CLASSIQUE

1) Transformat° de Galilée

(1) p 214 :



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ t' = t \\ z' = z \end{cases}$$

$t = t'$: hyp du t_{ps} absolu
= t_{ps} inclut du ref Galilée.

$f = \text{force}$: grandeurs invariantes vis à vis d'un chgt de référentiel Galilée.

\Rightarrow Transf Galiléenne invariants égaux aux autres puis de la Ψ , notamment EOM.

2) Incompatibilité entre la relativité galiléenne et l'équation de Maxwell

(1 p 215
et 3 p 11 \rightarrow 13)

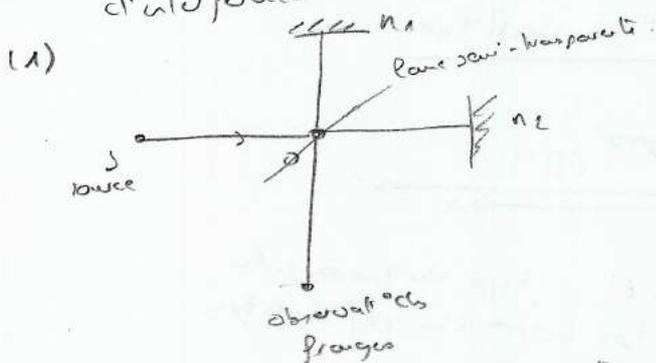
- pb de référentiel pour c (eq de Maxwell pour un ref privilégié).
 $\Rightarrow c$ la même dans R et R' (dém de Poy)
 $\rightarrow \exists$ d'un référentiel privilégié : ether!
- eq de Maxwell valables de tous les référentiels
 $\Rightarrow E_0$ et m_0 constants $\Rightarrow c$ inclut du référentiel.
 $c' = c - ve$. (méca classiq) : pb.

\Rightarrow esp que R'a doit trancher!

3) Expérience de Michelson et Morley.

But: détecter par des moyens optiques un mouvement de la Terre (à l'égard de l'éther)

- (1) Si un rep absolu \exists , il est impossible qu'il soit lié à la Terre; l'immobilité de la Terre (à ce rep) peut \exists de façon accidentelle à un instant donné mais ne pourrait se maintenir toute une année.
- (2) \Rightarrow Terre est en mouvement de l'éther et que la vitesse de la lumière est constante de l'éther; Michelson suppose que la mesure de la vitesse de la lumière doit donner des résultats \neq suivant l'orientation de la Terre (à l'égard de l'éther). L'idée est alors d'imaginer un moyen de mettre en évidence ces variations en faisant intervenir des phénomènes d'interférences lumineuses.



(1) : on s'attendait à ce qu'il y ait un déplacement de franges, mais on n'a rien détecté.

\Rightarrow confirmation du pb, nécessité de changer la loi de transformation.

II FONDEMENTS DE LA RELATIVITE RESTREINTE

1) Postulats

- (1 p 219) ou (2).
- \rightarrow principe de la relativité
 - \rightarrow invariance de c
 - \rightarrow ...

2) Transformation de Lorentz

- notion d'événement
- $$\begin{cases} x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x) \end{cases}$$

avec
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- Cas des paquets ondes : on retrouve les transformat° de Galilée.

CP6
②

3) Transformat° des vitesses

(2) : Composante longitudinale :

$$\left. \begin{aligned} dx &= \gamma (\beta c dt' + dx') \\ c dt &= \gamma (c dt' + \beta dx') \end{aligned} \right\}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c dt'}{dt' + \frac{\beta c}{c} dx'}$$

Composantes transversales de la vitesse

$$v_i = \frac{v_i'}{\gamma \left(1 + \frac{v_i' v_x}{c^2}\right)}$$

(graphes)

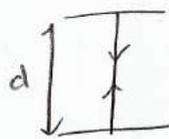
$$c = \{g \cdot 3\}$$

(2) Expérience de Fizeau : (schéma de (1)).

III CONSEQUENCES

1) Dilatation du temps

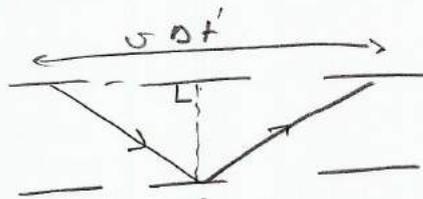
(2 p 16) :



vitesse de R'

$$v_{lumiere} = c = \frac{2d}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{2d}{c}$$



vitesse de R'

$$\left(v \frac{\Delta t'}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{c \Delta t'}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t' = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \gamma \Delta t$$

2) Contractio des longueurs

(2) $l' = \frac{l_0}{\gamma}$

3) Invariance de l'intervalle

(1 p 224-226) : passé, futur, ailleurs : cône de lumière.

CP 7: Dynamique relativiste

(CP 7)

Niveau: L3

Biblio: (3) Cagnac: Physique Atomique (tome 1)

Pré-requis: - Cinématique relativiste

- EOn
- Formalisme des quadri-vecteurs.

(2) Bestin, Faroux, Renault (tome 4 de mécanique)

(1) Perez: Relativité restreinte

Intro: (1): On sait que la loi fondamentale de la dynamique newtonienne appliquée à un pt matériel, de masse m It à un ref Galiléen, s'écrit: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ où $\vec{p} = m\vec{v}$: quantité de mouvement.

Pb: que devient cette loi en relativité restreinte.
La généralisation de la fondamentale doit s'opérer sur un formalisme à 4 D !

I PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE RELATIVISTE

1) Quadri-vecteurs position et vitesse

(2) Nous avons introduit le notion de l'opérateur scalaire invariant attaché à une particule et relié au host de ce référentiel (\mathcal{R}) où une particule a une vitesse v par:

$$\frac{dt}{d\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma.$$

3)
→
hp4

quadri-vecteur vitesse: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{d\mathcal{B}}$

$$* \vec{v} = \frac{d}{d\mathcal{B}} (ct, \vec{r}) = \gamma \frac{d}{dt} (ct, \vec{r}) = (\gamma c, \gamma \vec{v}).$$

$$* \|\vec{v}\|^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma v^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2.$$

4)
→
hp5

quadri-vecteur quantité de mouvement:

$$* \vec{p} = m (\vec{v}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$$

$$* \|\vec{p}\|^2 = m^2 \|\vec{v}\|^2 = mc^2.$$

2) PFD

(3)

$$\frac{d(\vec{p})}{dt} = \vec{p}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p} \quad \text{avec } \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad \vec{p} = \gamma \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \gamma = \gamma \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

\vec{p} : Parcours instantané
 \vec{F} : Force newtonienne

3) Énergie (1)

énergie cinétique

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

* $\vec{F} \cdot \vec{v}$: représente la puissance totale c'est la somme \vec{F} des forces qui s'exercent sur la particule

$$* \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + m v^2 \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\bullet \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{v}{c} \frac{dv}{dt}$$

$$\bullet \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{mc^2}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{dt} + mc^2 \beta^2 \frac{d\gamma}{dt} = d(\gamma mc^2)$$

$$\Rightarrow \gamma mc^2 \text{ homogène à une énergie} \Rightarrow \boxed{E = \gamma mc^2}^{-1/2}$$

si v proche de 0 :

$$\gamma mc^2 = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = (\gamma - 1) mc^2}$$

→ énergie de masse:

$$\boxed{E_0 = E - T = mc^2}$$

4) Relation entre quantité de mouvement et énergie

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma mc^2$$

$$\begin{aligned} \underline{E^2 - p^2 c^2} &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \underline{m^2 c^4} \end{aligned}$$

II COLLISIONS

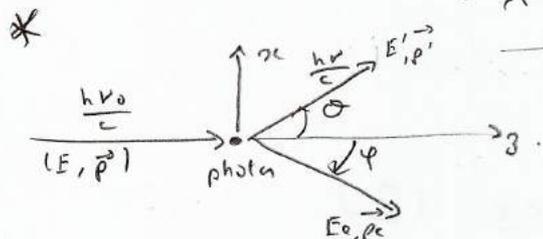
(LP7)
②

1) Effet Compton

→ Très bien expliquer de Cagnac (p54)

* Faire les démonstrations avec quatuorvecteurs et sans quatuorvecteurs pour voir la puissance de l'outil et pour arriver à

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$



- conservation de l'énergie
 $E + mc^2 = E' + E_e$
- conservation du \vec{p} :
 $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{project}^{\circ} \vec{p} \\ \text{'' } \vec{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = p' \cos \theta + p_e \cos \varphi \\ 0 = p' \sin \theta - p_e \sin \varphi \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_e \cos \varphi = p - p' \cos \theta \\ p_e \sin \varphi = p' \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow p_e^2 = p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2$$

$$\bullet E_e^2 = p_e^2 c^2 + m^2 c^4 \Leftrightarrow p_e^2 c^2 = E_e^2 - m^2 c^4$$

$$\text{d'où } p_e^2 c^2 = c^2 p^2 - 2pp' \cos \theta c^2 + p'^2 c^2 = (E + mc^2 - E')^2 - m^2 c^4$$

$$\Leftrightarrow \cancel{E^2} - 2EE' \cos \theta + \cancel{E'^2} = \cancel{E^2} + \cancel{E'^2} + 2EE' + 2mc^2 E - 2E'mc^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{mc^2} - \frac{\cos \theta}{mc^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

* Démonstration quatuorvecteur:

2) Energie de seuil d'une reaction (2)

cas d'un choc inelastique.

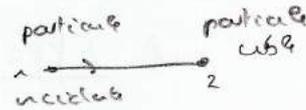
$$* \quad m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + m_5$$

$$\text{conservat}^\circ \text{ de l'energie: } m_1 c^2 + T_1 + m_2 c^2 = E_3 + E_4 + E_5.$$

But: calculer l'energie minimale T_1

$$* \quad \text{presence du referentiel de masse!} \quad \vec{p}^* = \sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$$

* calcul de l'energie de seuil!



III DYNT DE PARTICULES CHARGÉES (2)

1) Chap électrique uniforme et stat

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$\text{Hyp: } \vec{v} = \vec{0} \text{ pour } t = 0 \Rightarrow \vec{p} = q\vec{E} \cdot t \Rightarrow \text{le mot d'effective des } \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ est } \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}$$

$$* \text{ d'où } qEt = \frac{m\gamma v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow v = c \frac{qEt}{\sqrt{1 + (qEt/mc)^2}}, \quad d = \frac{qE}{mc}$$

• au debut du mot $v \approx \frac{qEt}{m}$, expression en mecan classique.

• pour t grand, $v \rightarrow c$

$$* \quad dx = \frac{c \, dt \, d\tau}{\sqrt{1 + d^2 t^2}} \Rightarrow x = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} - 1 \right)$$

2) Chap magnetique

→ \vec{E} classique mais avec un facteur relativiste en \oplus , qui π l'inertie de la particule.

FIN.

CP 8: Notion de viscosité d'un fluide.

Ecoulement visqueux

CP 8

①

Niveau: CPGE

Biblio: Phys méca

Pré-requis: dynamique des fluides
• cinématique

(P)
① • Toute Un, new programme, PSI ou PC.

Plan: I Notion de viscosité

- 1) Def (P)
- 2) Interpretation (P)

II Dynamique des fluides visqueux

- 1) Force volumique de viscosité et diffusion (P)
- 2) Equat^o de Navier - Stokes (P) et (T).

III Nb de Reynolds

- 1) Expression et signification (T)
- 2) ≠ régime (P)
- 3) Ecoulement autour d'un obstacle

Intro: (P) Exp avec bille de l'eau et glycerine.

Jusqu'à présent, nous avons négligé les forces de frottement qui se exercent, l'une sur l'autre, les parties d'un fluide par l'intermédiaire de la surface qui les sépare. Cette hyp s'avère satisfaisante pour tous les fluides au repos et pour certains d'entre eux, c'est l'eau, est peu visqueuse; en revanche; pour d'autres c'est l'huile et le miel, la prise en compte de la viscosité est indispensable pour décrire le comportement.

$\left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)_{\text{eau}} \approx 0,13$ et $\left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)_g \approx 0,16$ pourtant \neq de comportement.

I

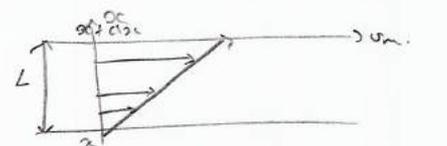
1) • Le vecteur tangent des forces qui s'exerce sur une partie 1 d'un fluide sur une seconde partie 2, à travers la surface élémentaire de contact dS , est la somme des contributions, l'une normale à dS et l'autre tangentielle.

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\partial_1 \rightarrow 2} \vec{p} \, dS = p \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \, dS - \underbrace{\sigma_T \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}_{\text{diffère à la vel de glissement}} \, dS.$$

• Forces de viscosité: $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -2 \frac{d\vec{v}_{2 \rightarrow 1}}{dt} \, dS.$

• dim de ζ : $[\zeta] = \frac{F}{S} \frac{L}{L \cdot T^2} = Pa \cdot T$
 ζ a $Pa \cdot s^{-1} = \text{poiseuille}$.

2) analogue à la diffusion des particules
 $\zeta = D m v_m = \frac{n v l}{3} m v_m = \rho \frac{l}{3} v_m$

II) 1)  • $dV = S dz$
 • $\vec{F}_{\text{résultant}} = -2 \int \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz + 2 \int \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz$ (sur les faces)
 $= 2 \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dV$

d'où $\vec{F} = 2 \Delta \vec{v}$

* équation de diffusion: $\rho \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \zeta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$

• $v = \frac{\zeta}{\rho}$: viscosité dynamique en $m^2 s^{-1}$

• temps caractéristique: $T = \frac{L^2}{v}$

ex: eau ds un récipient de diamètre $L = 10cm$:

$T = \frac{L^2}{v} = 2,5h$

2) Equation de Navier - Stokes:

Écoulement: • incompressible
 • viscosité est

$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g} + 2 \Delta \vec{v}$

RANS equation (6.1)



1) * • accélération convective: $\| \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \| \sim \frac{\rho v^2}{L}$
 • forces visqueuses: $\| 2 \Delta \vec{v} \| \sim \frac{2 \mu v}{L^2}$

$\Rightarrow Re = \frac{\| \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \|}{\| 2 \Delta \vec{v} \|} = \frac{\rho L v}{2 \mu} = \frac{L v}{\nu}$

* • T_p caractéristique du mot convectif:

$\| \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \| \sim \| \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \| \Leftrightarrow \tau_c = \frac{L}{v}$

• T_m caractéristique de moment diffusif:

$\| \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \| \sim \| 2 \Delta \vec{v} \| \Leftrightarrow \tau_d = \frac{L^2}{\nu}$

$$\Rightarrow Re = \frac{\bar{\sigma} d}{\sigma_c} = \frac{V L}{\nu}$$

(LP8)
②

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } Re \ll 1 \\ Re \gg 1 \end{array} \right.$: écoulement donné par les forces de viscosité.
 La convection.

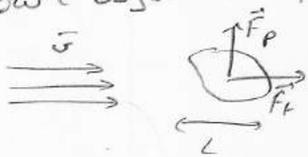
2) - Re faible : régime laminaire \Rightarrow équation de N-S linéaire
 (la diffusion du champ de vit est prédominant !)

ex de la bille sphérique de la glycérine !

* $Re = 0,02$

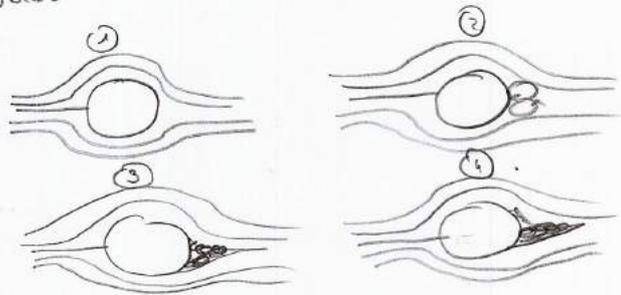
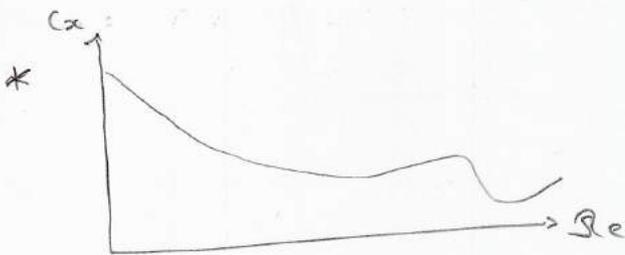
• Re grand : régime turbulent.

3) * Un fluide arrive sur un objet S avec une vit \vec{v} . Ce fluide exerce sur l'objet une force (2 composantes)



- composante // : Force de traînée. $F_t = \frac{1}{2} \rho C_x S v^2$
- composante \perp : Force de portance $F_p = \frac{1}{2} \rho C_y S v^2$

avec les coeff de Traînée et de portance qui dépendent du Re .



① : $Re \ll 4$, expérimentalement $C_x = \frac{24}{Re} \Rightarrow$ loi de Stokes
 $\Rightarrow F_t = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{24}{Re} \right) \pi R^2 v^2 = 6 \pi R \eta v$ Formule de Stokes
 $F_t \propto v$
 ex : Calcul de la vit de la bille de la glycérine (ρ)

② $1 \ll Re \ll 10^3$: tourbillon tourbillon stable derrière la sphère
 ④ Re est grand, ④ la dim de ce tourbillon est grand.

③ $10^3 < Re < Re_c (= 2 \cdot 10^5)$ zone de turbulence apparaît.

critère : ouverture sur la couche limite, \Rightarrow écoulement parfait

② $Re < Re$: coeff de traînée chute brutale \Rightarrow zone turbulente
 $F_T = C_x \frac{\rho v^2 S}{2}$
ex de la goutte de pluie à chute de l'air (P)

CP9: Modèle de l'écoulement parfait!

CP9
①

Niveau: PC

Biblio: - H prepa

Pré-requis: • Cinématique des fluides
• Régimes
• Viscosité

• Tout à un new program
PC - ACT

• Gié; Meca 2

Plan: I Écoulement parfait d'un fluide

1) Hyp (H, T).

2) Couche limite et validité du résultat (G)

3) Équation d'Euler (T)

II Équat^o de Bernoulli

1) parfait, incompressible, stat, homogène, irrotationnel (T)

2) " " " (T)

3) ~~Interprétation énergétique~~ (?)

III Applications

1) Effet Venturi (T)

2) Tube de Pitot (T).

3) Vidange d'un réservoir.

Intro: Meca des fluides = descript^o du comportement des fluides. On dispose de
≠ équations. Ce sont ces eq et impossibles à résoudre dans le cas
général (Navier Stokes) Le modèle de l'écoulement parfait permet
d'obtenir des équat^o ⊕ simples qui permettent d'expliquer
certains phénomènes.

I

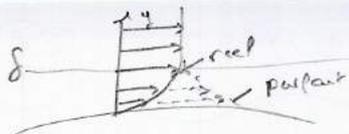
1)

Hyp: → ^{fluides parfaits:} viscosité dynamique = nulle.

→ écoulement parfait: tous les phénomènes dissipatifs
sont négligeables.

→ grand nb de Reynolds!

2) (H) Au v (obstacle), le profil de vit et mes ≠ si l'a considéré
le modèle des fluides parfait ou réel.



Pour $y < \delta$: écoulement non parfait.
 Dès à partir d'une certaine épaisseur,
 l'écoulement n'est plus parfait!

(T) : Condition aux limites fluide solide $\vec{u}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\text{solide}} \cdot \vec{n}$
 Condition aux limites fluide-fluide $\vec{u}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n}$
 \Rightarrow Voir Gie au lieu de HKT.

3) (T) Écoulement parfait et incompressible :

$$dm \vec{a} = d\vec{F}_v + d\vec{F}_s \quad \Leftrightarrow \quad dm \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \rho \vec{g} d\vec{\Omega} + \vec{\nabla} P d\vec{\Omega}$$

$$\Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P$$

- \Rightarrow
- décombrant des équations et inconnues.
 - retrouver loi de la statique
 - ...

II

1) Parfait, incompressible : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho}$

statilib
+ tiré

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho}$$

Or ρ homogène, et $\vec{g} = -\nabla(gz)$

$$\Rightarrow \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{cte sur toute st de l'écoulement.}$$

2) $\nabla \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) + (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{u} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \int_{\text{NCS}} \nabla(\cdot) d\vec{\Omega} + \int_{\text{NCS}} (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) d\vec{\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_A^B d \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{cte sur une ligne de courant!}$$

3)

Il faut trouver une base sur l'étude énergétique,
 mais on s'arrête et III va de B II.



1) Effet venturi:



(corp) : Permissible en papier

$$\bullet S u_B = S u_A$$

$$\bullet \frac{u_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + \rho z_A = \frac{u_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + \rho z_B$$

$$\Leftrightarrow P_B = P_A + \rho \frac{u_A^2}{2} \left(1 - \frac{S}{s} \right)$$

\Rightarrow régime de Poiseuille section z à gauche et mais Poiseuille premier.

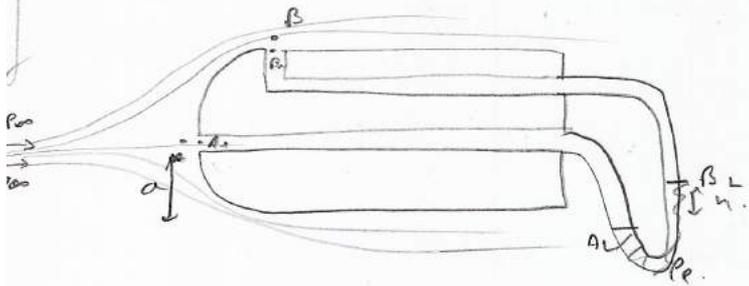
2) Tube de Pitot

$$u_{air} = \sqrt{2 \frac{P_{auvent} - P_B}{\rho}}$$

$$u_{air} = \sqrt{2 \frac{\rho_c}{\rho} g \Delta h}$$

3) Th de Torricelli:

$$u = \sqrt{2gh}$$



pt d'arrêt

$$\bullet \frac{u_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + \rho z_A = \frac{u_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + \rho z_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_A}{\rho} = \frac{u_{\infty}^2}{2} + \frac{P_B}{\rho}$$

$$\bullet \frac{u_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + \rho z_B = \frac{u_{\infty}^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + \rho z_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_B}{\rho} + \rho z_B = \frac{P_0}{\rho} + \rho z_0$$

$$\text{or } z_B = z_0 + a \approx z_0 \Rightarrow P_B = P_0 = P_{0A}$$

$$\Rightarrow u_{\infty} = \sqrt{2 \frac{P_{0A} - P_{0B}}{\rho}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet P_{0A} - P_{0B} &= P_{02} - P_{02} + \rho g (a + \Delta z) \\ P_{0A} - P_{02} &= \rho g \Delta h \end{aligned} \right\} P_{0A} - P_{0B} \approx \rho g \Delta h$$

$$\Rightarrow u_{\infty} \approx \sqrt{2 \frac{\rho_c}{\rho} g \Delta h}$$

CP 10⁺ Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides

Niveau L3

(G)
Biblio : Guya, Hulin, Petit
Hydrodynamique

Pré-requis : • Thème (polycopié thur)
• Réca

(D) • Dio, thermoc.

(DG) • (Gouttes, bulles, pores et arcs, de Bennes)

Plan : I Tension superficielle (TS)

1) Déf (G)

2) Origine γ

3) Variat° de la T.S en présence d'un surfactant (G)

4) mesure de TS (σ , cG)

II Interface statique

1) Loi de Laplace (D)

2) Etalant de gouttes ou sur une surface - mouillage (D)

3) Accroissement capillaire (σ)

Intro: Notre étude s'intéressait jusqu'ici à l'écoulement des fluides ainsi qu'à l'influence des solides sur celui-ci (couche limite, écoulement surfactant...) or on va nous intéresser à une partie particulière des fluides, à savoir leur surface. En fait pas surface mais interface = séparat° entre 2 fluides. Bien sûr aussi cela concerne aussi liq. Et il arrivera qu'une zone γ solide particulière

I

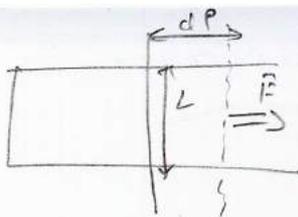
1) (G) : mise en évidence des effets de la tension superficielle.

→ film liq est supporté par un cadre rectangulaire dit l'un des côtés est mobile ; si nous laissons ce côté libre, on constate qu'il se déplace de façon à \rightarrow la surface du film.

Pour le maintenir en place, il faut appliquer une force F qui est proportionnelle à L (côté libre) Pour T la surface du film d'une quantité $dS = L \cdot dP$ il faut fournir une énergie $dW = F \cdot dP$

$$dW = F \cdot dP = 2\gamma L \cdot dP = 2\gamma dS$$

γ : coeff de tension superficielle.



γ : énergie par unité de surface de chaque interface
 unité $N \cdot m^{-1}$.

→ pour exp
 → donner un tableau de valeurs de γ pour \neq liquides.

2) ^(G) → due aux forces de cohésion intérieures qui s'exercent entre les molécules d'un fluide : VDW, liaisons hydrogènes.

→ Dans un fluide à vol, les forces exercées par chaque molécule sont équilibrées par celles exercées par les molécules voisines. Si l'on introduit une interface, par ex le vide, les forces exercées de sa direction sont \neq équilibrées \Rightarrow origine de l'énergie superficielle.

\Rightarrow on a changé la nature du liq : a changé la liaison superficielle
 ex : surfactant

3) (G) : La présence d'un composé liant au niveau de l'interface entre 2 fluides peut conduire à la \downarrow de la tension superficielle.
 Protéines ou savons (= acide gras) : tête polaire, queue apolaire

\Rightarrow présence de l'eau : tête va vers l'eau, queue vers l'air



cette interprétation des molécules de surfactant entre 2 fluides \downarrow les interactions créées entre leurs molécules et de ce fait, \downarrow la tension superficielle par suite de l'ajout de surfactant sur chacun des 2 fluides. Il devient alors énergétiquement

\ominus favorable par le syst d'accroître l'aire de l'interface entre 2 fluides.

(exp) : savon, eau, savon.

4)

(exp) Balance d'arrachement. $(G, \frac{dG}{\text{évaluation}})$

Méthode très précise qui permet de rendre compte

II

1) (D) Utiliser des potentiels thermod pour déterminer la loi de Laplace.

Nous examinons ici une bulle de savon et cherchons son eq d'éq (thermostat à T_0) et réservoir de choc à la pression p_0 .

On néglige l'évaporation et les effets de pesanteur.

Paramètres ext : T_0, p_0 , quantité d'eau / d'air.
 $U = U_a + U_b$ $S = S_a + S_b$.

\Rightarrow enthalpie $G_0 = U - T_0 S + p_0 V$.

$$dU_a = T_a dS_a - p dV$$

$$dU_b = T_b dS_b + V d\Sigma$$

$$\Rightarrow dG = (T_a - T_0) dS_a + (T_b - T_0) dS_b + (p_0 - p) dV + V d\Sigma$$

Or $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $\Sigma = 2 \cdot 4\pi r^2$.

$$\Rightarrow dG = (T_a - T_0) dS_a + (T_b - T_0) dS_b + 4\pi r^2 (p_0 - p + \frac{4V}{r}) dr$$

équilibre : $\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{p_0 - p + \frac{4V}{r} = 0}$

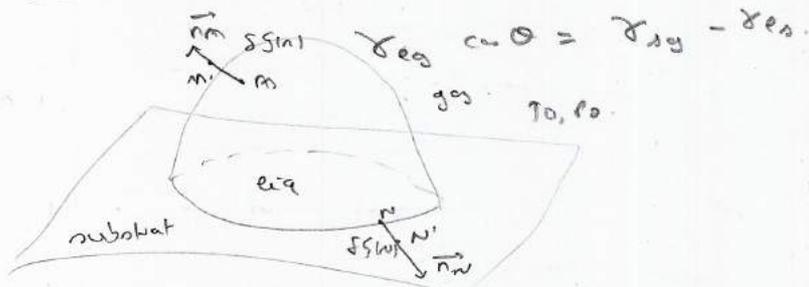
Loi de Laplace.

\Rightarrow La pression à l'int de la bulle $>$ à la p de l'ext.
 (La T.S tend à réduire la surface de la bulle).

2) (D) (Suivant le 1^{er} qui a resté pair toute la classe sur ce).

Toute la classe est de le dire à utiliser en potentiels thermody!

On doit trouver l'équation de Dupré-Young :

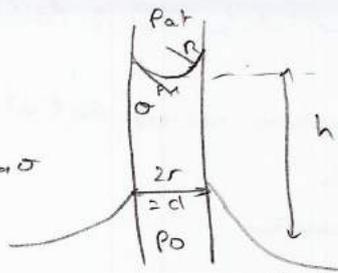


Faire les commentaires sur mouillant ou non mouillant et Ponce (exp)

(G).

3)

$$r = R \cos \sigma$$



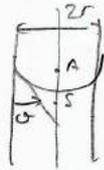
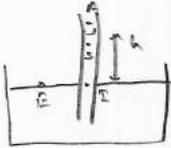
ici on mesure h

$$\Delta p = P_{at} - P_1 = \frac{2\gamma \cos \sigma}{r} = \frac{4\gamma \cos \sigma}{d}$$

$$\text{or } P_1 = P_{at} - \rho g h$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\gamma \cos \sigma}{\rho g r}$$

(Démontre que $\Delta p = \rho g h$, na puebe laeq pou la demo!)



$$P_E = P_2 = P_3 + \rho g h$$

avec $P_E = P_{atm}$

$$\Rightarrow \Delta p = P_E - P_3 = P_{atm} - P_3 = \rho g h$$

$$\Delta p = P_A - P_3 = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2\gamma \cos \sigma}{r}$$

avec $R = \frac{r}{\cos \sigma}$, σ angle de mouillage.

$$\Rightarrow h = \frac{2\gamma \cos \sigma}{\rho g r}$$

CP 11 ~ Gaz parfaits, gaz réels.

CP 11
①

Niveau: 1^{er} CPGE

Biblio: (1) et ancien
Tout en un new prog.
(2) Dio, Themo.

Pré-requis: • vocabulaire de Themo
• méca

Plan: I Gaz parfaits (T)

- 1) Def (T)
- 2) GP monoatomique (T)
 - a) Hyp
 - b) vit
 - c) P
 - d) T
 - e) equal^o d'état
- 3) GP diatomique (T)

II Gaz réels.

- 1) Limite du modèle de GP. (D)
- 2) Equations d'état *
 - a) Dup^o du viriel (D)
 - b) Equat^o de v.d.W. (D, T).

Info: ?

- I 1) On appelle GP un système mod constitué d'un très grand nb de particules sans interact^o mutuelles, pouvant se déplacer en un vol libre.
- 2) a. Hyp:
- monoatomig = gaz constitué d'un seul atome de masse m , de o C T.
 - un grand nb de molécules N
 - molécules peuvent être assimilées à des pts matériels.
 - gaz à eq thermo
 - chocs mol-mol et mol-paroi et des chocs élastiques.

b. * vit = ds toute les direct^o possibles et a une norme qui elle est équiprobable.
⇒ isotropie de l'espace

* hyp par sup^o : que ds 6 direct^o équiprobables de l'espace:
 $\pm \vec{e}_1, \pm \vec{e}_2, \pm \vec{e}_3$.

* vit moyenne : \vec{v} isotrope $\Rightarrow \langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$

* vit quadratique : $v^2 = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$: $\frac{1}{\sigma}$ des mol sur $+v^2 \vec{e}_x$
 $-v^2 \vec{e}_x$
 \vdots

b. Calculons d'abord la force !

Syst : { élém de la paroi ds }

Ref : Ref Terrestre, Galiléenne.

Forces : molécule sur la paroi dF.

PFD : $\frac{d\vec{p}}{dt} = d\vec{F}$

$d\vec{p} = \vec{p}_{après} - \vec{p}_{avant} = m^* (-v^2 \vec{e}_x) - m^* v^2 \vec{e}_x = -2 m^* v^2 \vec{e}_x$

Pression moléculaire : $P = \frac{1}{2} n^* m^* v^2$

c. $T^\circ =$ degré d'agitation des molécules.

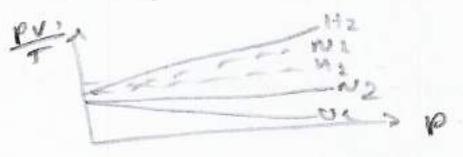
$T = \frac{m^* \overline{v^2}}{3 R_B}$

d. $U = \langle E_{c, \text{mole}} \rangle = N \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} N m^* v^2 = \frac{3}{2} N R_B T$
 $= \frac{3}{2} n R T$

$P = \frac{1}{3} n^* m^* v^2 = \frac{1}{3} n^* 3 R_B T = n^* R_B T = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T = \frac{n}{V} R T$
 $\Rightarrow PV = nRT$

3) $U = \frac{5}{2} nRT$
 $PV = nRT$

II a) Ex p : on place la température et la masse par une mole de gaz
 Pe caractéristique du produit pv par le vol molaire.



RO : pression partielle
GR = σP

2) a. Les déviations que présentent les GR / + à l'équation des GP sont faibles lorsqu'il est la pression ou le nb de moles par unité de volume. Ceci suggère d'ajouter à l'équation d'état des GP des correctifs que l'on écrit à un développement en puissances successives du rapport $\frac{p}{p^0}$.

$$pV = nRT \left(1 + \left(\frac{p}{p^0}\right) B_1(T) + \left(\frac{p}{p^0}\right)^2 B_2(T) \dots \right)$$

→ les termes successifs du développement sont de plus en plus petits.

b. $\left(p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$

(LPA)
②

• explicat° des termes :

• modèle

• calcul numérique.

Calcul : ouvrir le 2nd exercice.

CP 12 d 1^{er} principe de la Thermod

Niveau : 1^{ère} année de CPGE

Biblio :

- H. Poincaré NPSE
- Diu (Thermod).
- Précis Thermo NPSE (Breal)
- Saug ? pour syst ouvert.

Pré-requis :

- Fct d'état
- def de syst
- GP
- méca

Plan : I Energie interne

- 1) Conservation de l'énergie
- 2) Modes d'échange énergétique
- 3) Énoncé du 1^{er} principe de la Thermo
- 4) Énoncé du travail des forces de pression.

II Applications

- 1) Avec transformations particulières de pleins (voiture, manostat) (on le rappelle)
- 2) Avec détentes (J.G., JT).
- 3) Calorimétrie

Intro : (p 3 et 5)
(Un corps sera dit macro s'il est constitué d'un très grand nb de particules micro). Un syst thermo, limité à lui-même, est caractérisé par des variables, à l'échelle macro, qui à un certain instant sont en état d'éq où toutes ses prop macro sont devenues elles aussi invariables.

I ENERGIE INTERNE.

1) Conservation de l'énergie (H)

* Considérons un très grand nb de particules.

$$E = E_c + E_{\text{int}} + E_{\text{pot}}$$

où toutes les forces ont d'interact° entre particules
descendent d'une énergie potentielle = d'interaction au référentiel.

de toutes les particules
considérées individuellement
à l'échelle micro.

→ synt macro au repos: $E_c =$ énergie d'agitat° microscopique. = E_{CT}

$$\Rightarrow U = \text{énergie interne } U \text{ d'un système} = E_{CT} + E_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow \underline{E = U + E_{\text{pot}}}$$

→ synt macro non au repos: $E_c = E_{CT} + E_{cn} =$ énergie d'agitat° micro +
énergie cinétique macro

La détermination de E_c peut se faire en se plaçant à l'échelle méso:
on décompose le synt en vol, petits à l'échelle macro, de masse dm et
de centre d'inertie. L'énergie cinétique e_c d'un de ces petits élém est donnée
par le Th de Koening!

$$e_c = \frac{1}{2} dm v^2 + e_{CT}$$

$$\Rightarrow \text{en sommant sur tout le vol: } E_c = \frac{1}{2} m v^2 + E_{CT}$$

$$\Rightarrow \text{Énergie interne: } U = E_{CT} + E_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow \underline{E = U + E_{cn} + E_{\text{pot}}}$$

* L'énergie totale E d'un synt isolé est conste. Cela signifie qu'il ne
peut y avoir de variat° ou de disparit° d'énergie des le synt.

$$\underline{E = \text{conste}}, \quad \underline{E \text{ est de conservative}}$$

2) Modes d'échange énergétique. (H)

Lorsqu'un synt fermé échange de l'énergie entre 2 instants t_1 et t_2
avec le milieu ext, la variat° ΔE de l'énergie totale du synt
est égale à l'énergie E_{ech}

$$\underline{\Delta E = E_{\text{ech}}}$$

Eech sous 2 formes:

→ Le travail W des forces définies à l'échelle macro qui s'exerce le milieu ext sur le syst au niveau de la surface Σ

→ Le transfert thermique, ou transfert de chaleur Q correspond à l'énergie échangée non comptabilisée de W . Il est dû aux transferts micro qui modifient l'agitat^o des molécules des particules:

$$\Rightarrow \underline{E_{ech} = W + Q}$$

3) Enoncé du 1^{er} principe de la thermod

(Prémis) Le 1^{er} principe de la thermod exprime la conservation de l'énergie: Lors d'une évolution, la variat^o de l'énergie totale E du syst est égale à la somme des travaux et transferts thermiq reçus par le syst:

$$\underline{\Delta E = \Delta (U + E_{cn} + E_{ext}) = W + Q.}$$

(*) RQ: • pour un syst macro au repos et tel que E_p soit négligeable

$$\Rightarrow \underline{\Delta U = W + Q}$$

• Lors d'une transform^o élémentaire:

$$dE = dU + dE_{cn} + dE_{ext} = \delta W + \delta Q.$$

→ $E, U, E_{cn}, E_{cp} =$ fct^s d'état $\Rightarrow dE \dots$ différentielle d'état

→ $w, q =$ transferts d'énergie $\Rightarrow \delta W$: travail élémentaire.

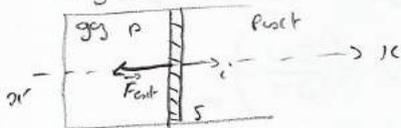
δQ : transfert d'énergie élémentaire

$\Rightarrow w$ et $q \notin$ fct^s d'état $\Rightarrow \delta W$ et $\delta Q \notin$ différentielles totales

4) Exp de travail des forces de pression

(Prémis)

Gaz soumis à une pression ext.



Un gaz sous la pression p est contenu dans un récipient cyl fermé par un piston de section S mobile sans frot. Ce piston est soumis à la pression ext p_{ext} .

Force subie par le piston: $\vec{F}_{ext} = -p_{ext} S \vec{e}_x$

Lors d'un déplacement infinitésimal $d\vec{r} = dx \vec{e}_x$, le travail élémentaire est

$$\delta W_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -p_{ext} S dx.$$

δW_{ext} est le travail fourni par la force \vec{F}_{ext} mais représente également le travail algébrique δW reçu par le gaz:

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV$$

compression $V \rightarrow$, $dV < 0$ $\delta W > 0$ ressort
dilaté $V \nearrow$ $dV > 0$ $\delta W < 0$ gaz parfait

→ évolut^o infinitésimale quasi-statique = états proches des états d'éq

$$\delta W_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} dV$$

→ évolut^o entre 2 états d'éq: $W = - \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} dV$

(H) → représentation graphique .. (diagramme de Poyeyon)

II APPLICATIONS

1) Aux transformations particulières de fluides.

(H) a) Transformation isochore

$$\text{Volume ne varie pas} \Rightarrow \Delta U = Q_V$$

Très souvent nous pouvons considérer qu'un syst en eq thermo interne possède une énergie interne qui ne dépend que de sa T et de son V .

Pour un corps pur, fluide ou solide $U = U(T, V)$

$$\text{différentielle de } U: dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

⇒ définir la capacité thermique à vol est: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

$$\Rightarrow Q_V = \int_{T_1}^{T_2} C_V(T, V) dT = \Delta U$$

(H) b) Transformations monobares.

2p12
③

Un syst subit une transf monobare lorsque la pression P_{ext} du milieu est reste uniforme et cste au cours de la transformation.

Nous supposons que le syst passe d'un etat d'eq ulene ①, où sa pression est egale à P_{ext} , à un etat d'eq thermo ② où sa pression est egale à P_{ext} .

$$W = -P_{ext}(V_2 - V_1) = -P_2 V_2 + P_1 V_1$$

$$\Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = (-P_2 V_2 + P_1 V_1) + Q_p$$

$$\Leftrightarrow (U_2 + P_2 V_2) - (U_1 + P_1 V_1) = Q_p$$

$$\Rightarrow \text{nouvelle fct d'etat } \underline{H = U + PV} \Rightarrow \Delta H = Q_p$$

$$\text{Or } H = H(T, P) \Rightarrow dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

\Rightarrow pression cste : on definit la capacite thermique à pression cste.

$$\underline{C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}$$

$$\Rightarrow dH = C_p(T) dT$$

c) Cas des GP

(H) \Rightarrow U ne depend que de T , de m que H tq $H = U + PV = U + nRT$

Pour 1 mole de gaz : $H = U + RT \quad \frac{\partial H}{\partial T} \quad C_p = C_v + R \quad \text{ Mayer}$

Et si on pose $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

(F) Transformation adiabatique:

$$dU = -p dV$$
$$dU = C_v dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT$$

$$pV = nRT$$

$$\Rightarrow -\frac{RT}{V} dV = \frac{R}{\gamma - 1} dT$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{T} = (1 - \gamma) \frac{dV}{V}$$

Integrer $\int \Rightarrow P_1 \frac{T_1}{T_0} = P_2 \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{1-\gamma}$

d'où $\underline{T V^{\gamma-1} = cste}$

$$\underline{P V^\gamma = cste'}$$

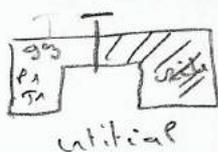
$$\underline{T^\gamma P^{1-\gamma} = cste''}$$

Loi de Laplace.

2) Ausc de têtes de gaz.

a) Début de Joule - Gay-Lussac

(H) Deux récipients à parois rigides et parfaitement calorifugés



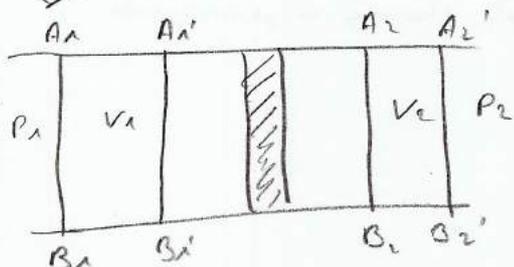
1^{er} loi de Joule

$$\Rightarrow \Delta U = \cancel{\Delta Q} + \cancel{\Delta W} = 0 \Rightarrow U_2 = U_1$$

$$\stackrel{GP}{\Rightarrow} T_2 = T_1$$

(Som)

b) Début de Joule - Thomson.



EL	EF
v_1	v_2
P_1	P_2
v_1	v_2

- irréversible
- paroi indéformable et adiabatique
- écoulement stationnaire et lent
- \Rightarrow syst ouvert

Syst fermé: (S') $A_1 A_2 B_1 B_2 \rightarrow A_1' A_2' B_1' B_2'$

(S) : $A_1 A_1' B_1 B_1' \rightarrow A_2 A_2' B_2 B_2'$

adiab

$$\Delta U_{(S')} = W + \cancel{Q} = -W_1 + W_2 = P_1 v_1 - P_2 v_2$$

$$A_1 A_1' B_1 B_1' = A_1 A_1' B_1 B_1' + A_1' A_2 B_1' B_2$$

$$A_1' A_2' B_1' B_2' = A_1' A_2 B_1' B_2 + A_2 A_2' B_2 B_2'$$

$$\rightarrow (U_2 + P_2 v_2) - (U_1 + P_1 v_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta H = 0 \quad \boxed{\text{enthalpie}} \quad \underline{\text{2^{er} loi de Joule}}$$

3) Calorimétrie voir p. 11

Conclusion : ouverture sur la notion d'irréversibilité avec 2nd principe.

CP 13: Evolution et conditions d'eq d'un système fermé

CP 13
①

Niveau: CPGE.

Bibliographie: Précis Breal PC-PS2.

- PC, Saug
- Thermo H-prepa
- Dieu, thermo.

Pré-requis: Principes de Thermo
- Méca.

Plan: I Caractérisation d'évolution et d'eq d'un syst thermodyn isolé

ou I Paramètres de caractérisation
1) Déf. Méca
2) Déf.

- 1) Paramètres de caractérisation, variables internes (P)
- 2) ↑ de l'entropie. (P)
- 3) Éc de la chaleur J.G Lurac (P)

II Conditions et évolution d'un syst thermiq en contact avec l'ext

- 1) En contact avec un thermostat (P)
- 2) " " et un réservoir de vol. (P)

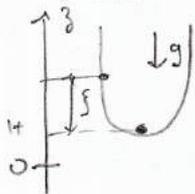
III Applications

- 1) Généralisation des potentiels thermo (H)
- 2) Travail max récupérable (F)
- 3) Bufile de savoir la eq avec l'ext. (P (mais il y a un essai) sur Dieu).

Info: (S) Au cours de cette page nous allons chercher, pour des conditions imposées par syst, c'est pour des transf d'énergie, à caractériser des paramètres d'état du syst et éventuellement des caractérisation qui demandent des notions d'évolution du syst. Nous voyons que cette pot est minimale si l'eq = potentiel thermo par analogie avec l'éca en méca.



1) Analogie avec la méca:



eq: Pacl de la courbe c'est qd $\dot{s} = 0$
avec $E_p = mg(H+s)$, H fixe.

⇒ L'ordre potentielle permet donc de retrouver l'état d'eq de la bille: il s'agit donc de la minimiser par rapport à s .

- ⇒ H: paramètre de caractérisation.
- s: variable interne

Def: \rightarrow Paramètre de contact
 \rightarrow variable intense.

- 2) Recherche d'eq pour la thermo ds le cas d'un syst isolé.
- valeur d'évolution: évolut^o possibles que ni elles observent au 2nd principe: (i) \rightarrow (j) si $S(j) - S(i) \geq 0$.
 - condition d'eq: S ne peut plus \uparrow , de S max / à toutes les variables intenses inclues du syst: $dS = 0$
- Syst isolé thermiquement: entropie

3) Débate de Joule Gay-Lussac. détente adiabatique, aucun travail $\Rightarrow \Delta U = 0$.

- \rightarrow paramètres exterieurs: U ; $V_{tot} = V_1 + V_2$
- \rightarrow variables intenses V : vol occupé par G & gg.
- identité thermod: $dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$
- Or $\Delta U = 0 \Rightarrow dS = \frac{P}{T} dV$
- \Rightarrow eq en a $dS = \frac{P}{T} dV = 0$.
- \Rightarrow S est fct de la variable intense V , nous devons de la maximiser / à V , à U cste.
- Or l'atmosphère est une fct strictement \uparrow du vol: $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T} > 0$
- de S max qd V occupé par G & gg, sur max.
- \Rightarrow à l'état d'eq thermodynamique, G & gg occupent tout l'espace disponible.

II 1) * Hyp: • échange de chaleur avec une seule source de chaleur \Rightarrow monotherme. T_0

• évolut^o à V cste
 \Rightarrow paramètre de contact T_0, V .

* valeur d'évolution: 2nd principe: $\Delta S = S(j) - S(i) \geq \frac{Q}{T_0}$

Or 1^{er} principe: $U(j) - U(i) = Q$

$\Rightarrow (U(j) - T_0 S(j)) - (U(i) - T_0 S(i)) \leq 0$

\Rightarrow nouvelle fct $F^* = U - T_0 S$

(i) \rightarrow (j) possible si $\Delta F^* \leq 0$

- Condition d'éq: eq atteint lorsque F^* ne peut \uparrow , c'est qd F^* est min / \uparrow à toute les variables indépendantes du syst

$$\underline{dF^* = 0}$$

LP
②

- 2) * Hyp:
- échange de chaleur avec une seule source de chaleur \Rightarrow monothème T_0
 - échange de travail avec un réservoir de volen, P_0 est \Rightarrow monobare: P_0
 - \Rightarrow paramètres de contrôle T_0 et P_0 .

* Valeur d'évolut*: 2nd principe: $\Delta S = S(\beta_f) - S(\beta_i) \geq \frac{Q}{T_0}$
 Or 1^{er} principe: $U(\beta_f) - U(\beta_i) = Q + W^{ext} = Q - P_0(V_f - V_i)$
 $\Rightarrow (U_f - T_0 S_f + P_0 V_f) - (U_i - T_0 S_i + P_0 V_i) \leq 0$
 \Rightarrow new pot: $G^* = U - T_0 S + P_0 V$
 d'où $\underline{\Delta G^* \leq 0}$

• Condition d'éq: $\underline{dG^* = 0}$

III 1) F^*, G^* = pots du syst et du milieu ext !
 Chercher à mettre en évidence des pots d'états du syst seul à \uparrow les contraintes exp sur les évolut^o étudiées.

Energie libre: évolut^o monothème, cohérent avec $T_f = T_i = T_0$ thermostat.

$$\Rightarrow U_f - T_0 S_f - (U_i - T_0 S_i) \leq 0$$

$$\Rightarrow U_f - T_f S_f - (U_i - T_i S_i) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\text{pot d'état}}: F = U - TS = \text{énergie libre.}$$

Enthalpie libre: évolut^o monothème et monobare $T_f = T_i = T_0, P_f = P_i = P_0$.

$$\Rightarrow (U_f + P_0 V_f - T_0 S_f) - (U_i + P_0 V_i - T_0 S_i) \leq 0$$

$$\Rightarrow (U_f + P_f V_f - T_f S_f) - (U_i + P_i V_i - T_i S_i) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\text{pot d'état}}: G = U + PV - TS = H - TS = \text{enthalpie libre.}$$

2) (1) 2^{es} cas: Evolut^o monotreme:

hyp: • échange de la chaleur avec un grand source de chaleur
 • échange de travail avec l'ext.

$$\Rightarrow (U_f - T_0 S_f) - (U_i - T_0 S_i) \leq W$$

$$\Leftrightarrow \Delta F^* \leq W = -W_{rec}$$

$$\Leftrightarrow W_{rec} \geq -\Delta F^*$$

(1): Au cours d'une transf monotreme, le travail effectivement recevable au cours de l'évolut^o ne peut excéder la ΔF^* de la p^{te} F^* ; ce travail est max pour un transf réversible.
voir ex de Say sur la bouteille d'air.

2^{es} cas: Evolut^o monotreme et monotreme.

$$\text{Si il y a un } -\Delta G^* \geq -W = W_{pouv.}$$

ex: essence ds la (B) sur la bouteille d'air.

3) (A) (B) La surface de travail est l'eau et l'air est double
 l'interface l'air et l'autre est l'ext., etc. B aux p^{tes} 2.

$$G^* = (U_i + U_m) - T_0(S_i + S_m) + p_0 V$$

• Paramètres de contrôle: p_0, T_0 .

$$dG^* = dU_i + dU_m - T_0 dS_i - T_0 dS_m + p_0 dV$$

$$dU_m = T_m dS_m + \sigma dA$$

$$\text{or } dU_i = T_i dS_i - p_i dV$$

$$\Rightarrow dG^* = (T_i - T_0) dS_i + (T_m - T_0) dS_m - (p_i - p_0) dV + \sigma dA$$

$$\text{avec } A = 2.4 \pi R^2 \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow dG^* = (T_i - T_0) dS_i + (T_m - T_0) dS_m + 4\pi R ((p_i - p_0) R - 4\sigma) dR$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial G^*}{\partial S_i}\right)_{S_m, R} = 0 \\ \left(\frac{\partial G^*}{\partial S_m}\right)_{S_i, R} = 0 \\ \left(\frac{\partial G^*}{\partial R}\right)_{S_i, S_m} = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T_i = T_0 \\ T_m = T_0 \\ p_i = p_0 + \frac{4\sigma}{R} \end{array}}$$

Calcul:

Faire une analogie avec la chimie, qui utilise les potentiels pour déterminer les grandeurs thermochimiques.

CP14: Applications des machines thermiques

①

Niveau: CPBE (RPS2)

Biblio: ⁽¹⁾ Tout en Un (new program)

Pré-requis: principes de la thermo.

(2) - Capteurs, press
Tec & doc Auger Marc

(3) - Physique Tec & doc
Grewas, Nigean.

(4) - Themat; Clanch
naître

Plan: I Les machines thermiques.

- 1) Dof
- 2) Bilan énergétique et entropique
- 3) machine dittherme

II Les moteurs thermiques (part 1)

- 1) Principes
- 1) Rendement
- 3) Cycle de Carnot
- 4) Ex de moteur = moteur à explosion.

III Les récepteurs ditthermes (part 2)

- 1) Principes
- 2) Réfrigérateurs ditthermes
- 3) Pompe à chaleur.

Intro: (4) Historique des machines thermiques

Les machines ont apparues vers XVII au siècle. En France, Denis Papin - presenta en 1681 l'existence de la "cocotte minute". Cet appareil comportait un élastique qui devait intervenir de la plupart des moteurs: la soupape. 39 années ⊕ tard, la machine de Newcomen, qui fut le 1^{er} moteur atm faisant son apparit^o sur le carreau d'une mine proche de Birmingham. Les machines furent ensuite développées, essentiellement en Angleterre et par des ingénieurs, en particulier Watt et lui fut l'argent avec lui mais il fallut attendre les réflexions sur la puissance métrique de l'hp et sur les machines propres à développer cette puissance de Sadi Carnot (1824) pour capricer véritablement les raisons de ces progrès. La thermo était née de la technique.

I LES MACHINES THERMIQUES

1) Def

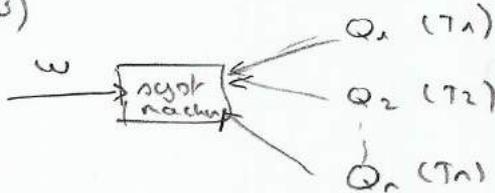
(3) Machine thermique = tout dispositif ds lequel un syst fluide subit un transf cyclique, ce qui permet un convertisseur θ° et ω .

→ moteurs thermique $\omega < 0$

→ récepteurs thermique $\omega > 0$.

2) Bilan énergétique et entropique

(3)



1^{er} principe $\Delta U = 0$

$$\Leftrightarrow W + \sum Q_i = 0$$

2^{ème} principe :

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

inégalité de Clausius

(3) Cas d'une machine motrice $T_0, T_0 > 0$

$$W + Q_0 = 0 \Rightarrow W = -Q_0$$

$$\frac{Q_0}{T_0} \leq 0 \Rightarrow Q_0 \leq 0 \Rightarrow W > 0.$$

⇒ cycle motrice moteur $W < 0$ possible, caractérisé par $W = Q_0 = 0$

• que récepteurs thermiques ex : radiateur électrique.

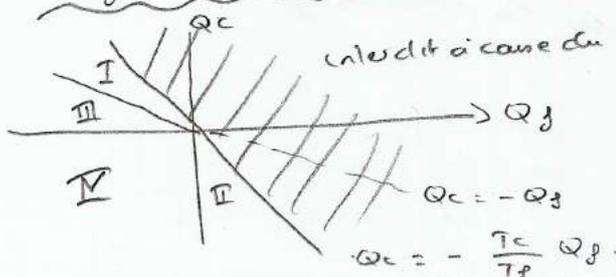
3) Machines dithermes

(3) transfert thermique entre une source chaude T_c et une source froide T_f .

$$W + Q_f + Q_c = 0 \quad ; \quad \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_c = -Q - W \\ Q_c \leq -\frac{T_c}{T_f} Q_f \end{cases}$$

(1) Diagramme de Paveau : $Q_c = f(Q_f)$



(Q_c n'est pas $\geq -\frac{T_c}{T_f} Q_f$)

zone III :



CP 14
2

on devrait lui fournir un travail pour qu'elle transfère de la chaleur de la source chaude vers la source froide

⇒ inutile : la Nature le fait spontanément.

⇒ pas besoin d'une telle machine

zone IV :

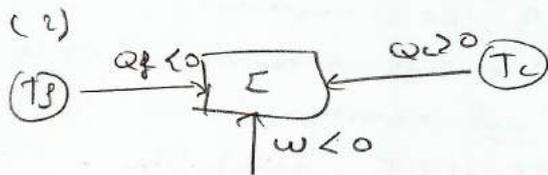


Le travail fourni à la machine thermique serait ici transféré avec 2 sources de chaleur ; un simple radiateur suffit.

⇒ étude de la zone I.

II ZONE I : MOTEURS THERMIQUES.

1) Principe



Principe de Carnot ...

2) rendement

(3)

$$\eta = \frac{\text{travail fourni}}{\text{transfert thermique de source chaude}} = - \frac{w}{Q_c}$$

$$\text{or } -w = Q_c + Q_f \Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

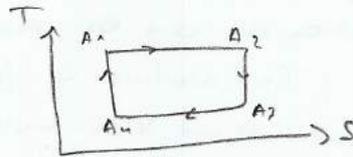
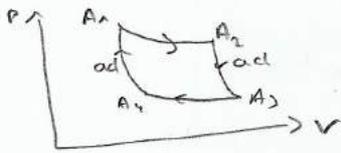
$$\text{or } \frac{Q_2}{Q_1} \leq - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \eta \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

⇒ moteurs diathermes, fonctionnant de manière réversible: $\eta_{rev} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

⇒ moteurs irréversibles $\eta_{irr} \leq \eta_{rev}$.

3) Cycle de Carnot:

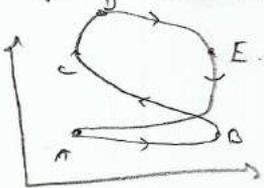
(2), (3) - moteur dit thermique réversible : \rightarrow 2 isothermes
 \rightarrow 2 adiabatiques.



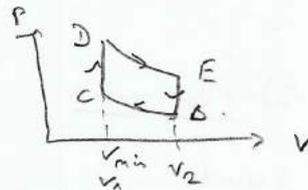
b) Essai de moteur: moteur à explosion.

(2): Rq enqage d'un moteur à explosion, esquissez les étapes avec $P=f(V)$ et mq les hypothèses

- \rightarrow 1^{er} tps: admission AB du mélange air-carburant : V_{max}
- \rightarrow 2^{ème} tps: compression BC par le retour du piston : V_{min}
- \rightarrow 3^{ème} tps:
 - combustion CD : vol varie peu mais P T partent
 - détente DE : gg se dilatent.
- \rightarrow 4^{ème} tps: échappement EA par l'ouverture de la soupape d'échappement.



Hyp: • AB, BA se compressent!
 • CD et EB sont considérés é rapides
 \Rightarrow vol ne varie pas!
 • BC et DE: adiabatique.



(3)

\Rightarrow trouver le taux de compression $\alpha = \frac{V_{max}}{V_{min}}$

Sur le cycle: $w + Q_{CD} + Q_{EB} = 0$ car $Q_{DE} = Q_{CB} = 0$ (adiabatique)

> 0 < 0

$$\eta = - \frac{w}{Q_{apport\ carburant}} = - \frac{w}{Q_{CD}} = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}$$

isochore CD: $w_{CD} = 0 \Rightarrow Q_{CD} = n C_v (T_D - T_C)$

isochore EB: $w_{EB} = 0 \Rightarrow Q_{EB} = n C_v (T_B - T_E)$

adiabatique: Loi de Laplace: $T_B V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1}$
 $T_D V_1^{\gamma-1} = T_E V_2^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow 2 = 1 - \delta^{1-\gamma}$$

(CP14
3)

(1)
A.N.: Si $V_1 = 0,04L$, $V_2 = 0,36L \Rightarrow \delta = 9$. ($\gamma = \frac{7}{5}$ pour GP diatomique)
 $\Rightarrow e = 0,58$

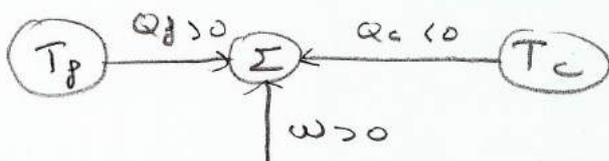
Pour un cycle Carnot $e = 0,76$.

\Rightarrow il faut trouver un bon compromis entre efficacité et travail reçu!

III LES RECEPTEURS DITHERMES ZONÉ II

(1)

1) Principe



La machine thermique, grâce au travail qu'elle reçoit, transfère de l'énergie de la source froide vers la source chaude.

\Rightarrow distinguer 2 types de récepteurs suivant si on intervient à la source chaude ou à la source froide

2) Machines frigorifiques

(2) $e = \frac{\text{transfert thermique reçu de la source froide}}{\text{travail reçu}} = \frac{Q_f}{W}$

Or $W = -Q_c - Q_f \Rightarrow e = - \frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$

Or $\frac{Q_c}{Q_f} \leq - \frac{T_c}{T_f} \Rightarrow e \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$

3) Pompes à chaleur

$e = \frac{\text{transfert thermique donné à la source chaude}}{\text{travail reçu}} = - \frac{Q_c}{W}$

$\Rightarrow e \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$

CP: 15th Transitions de phases.

CP 15
1

Niveau: L3

Biblio: - Perez, Thermo

- Hypo, Thermo

- Dio, Thermo

- Precis, Beal, Thermo PC-PSE

Plan: I Transitions liq - vap

- 1) Représentat^o graphiques. (D)
- 2) Pt critique de la transition. (D)

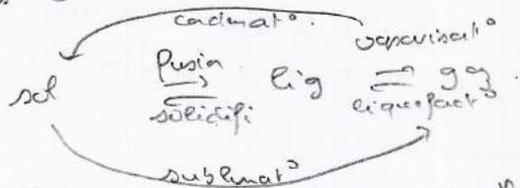
II Etude thermocl

- 1) Evolutia et eq. (H)
- 2) Relatia de Clapeyron (H)
- 3) Hyp pour la transit^o de 1^{er} ordre.

III Retard à la transition.

- 1) Def (P) (D)
(Etat metastable)
- 2) Surface de l'eau (P)
- 3) Nucleat^o d'un gaz sans refroidit.

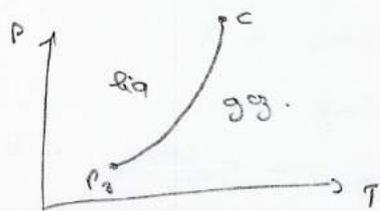
Intro: Dio: un corps peut suivant les condit^o qui lui st imposés, se présenter sous diverses φ la que solide, liq, gaz.



Ici nous analyseras le passage d'une φ à une autre appelée transit^o de φ et nous examinerons les condit^o de co \exists de plusieurs φ d'un m^e corps pur. et nous nous restreignons à une transit^o de 1^{er} ordre.

I

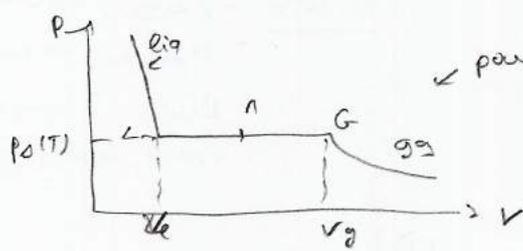
1)



cette trans^o comporte une transit^o liq - gaz \Leftrightarrow sur chemin courbe la courbe de vaporisat^o, c'est en ce pt que se produit la transit^o.

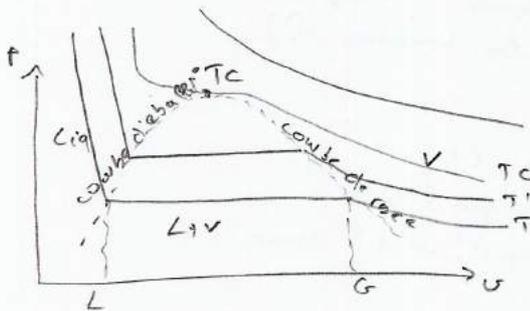
La courbe de vapo est limitée par le pt C (pt critiq) et le pt P3 (pt trip φ).

Un pt de la courbe de vap ne represente pas un etat unique du syst
 mais tous les etats coE les 2 Y a la T° et la pression correspondant aux
 coord de ce pt \Rightarrow a utiliser un autre diagramme.

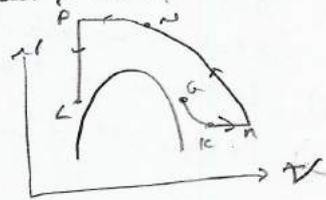
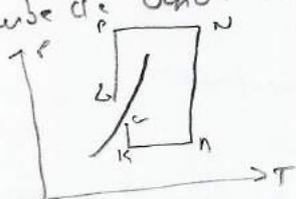


pour $T < T_c$: point de liquidation ou $p = p_s(T)$.
 Les proportions de liq et de vap
 si donnees par la regle des
 moments

$$n_p L = n_g G$$



2) (1) : IP est possible de passer de l'etat G a L sans couper la
 courbe de vap car il se sans provoquer de la condensation.



Decrive le chemin de parcours.

II

1)

(H) Exprimez l'enthalpie libre d'un syst ferme constitue d'un
 corps pur, a la T° et sous pression P , calculez n_g de liq
 et n_v de vap.

\rightarrow sens d'evoluto : G etant le potentiel thermo adante, nous pouvons
 evie que l'evoluto de la trans est telle que $dG < 0$

$$\Rightarrow d(m_p g_p(T, P) + m_v g_v(T, P)) < 0$$

$$\Rightarrow g_v dm_v + g_p dm_p < 0$$

Or syst ferme $\Rightarrow dm_v + dm_p = 0$

$$d'o\grave{u} dG < 0 \Rightarrow (g_v - g_p) dm_v < 0$$

* vap se transforme en liq $\Rightarrow dm_v < 0 \Rightarrow g_v - g_p > 0$

* liq en vap $\Rightarrow g_v - g_p < 0$

→ condit° d'équilibre: si syst à l'éq $\Rightarrow dG = 0$

$\Rightarrow (g_U - g_P)dn_U = 0 \Rightarrow g_{(U)} = g_{(P)}$

CP15
(2)

→ L'éq d'un corps pur sous 2 φ ne peut être établie que pour certains couples de °C et de pression liés par la relat° $g_{\varphi_1}(T, P_E) = g_{\varphi_2}(T, P_E)$
 Lorsque les 2 φ sont présentes pour un corps pur sous T et P qui ne vérifient pas la relat° précédente, l'éq ne peut pas être sous cette pression et à cette °C : l'une des 2 φ disparaît totalement au profit de l'autre

2) (H) $g_{\varphi_1}(T, P_E) = g_{\varphi_2}(T, P_E)$

$\Rightarrow g_{\varphi_1}(T+dT, P_E+dP_E) = g_{\varphi_2}(T+dT, P_E+dP_E)$

d'où $g_{\varphi_2}(dT) - g_{\varphi_1}(dT) = g_{\varphi_1}(dT) - g_{\varphi_1}(T)$ d'où $dg_{\varphi_2} = dg_{\varphi_1}$

Or $dG = -SdT + vdp$

$-s_{\varphi_2}dT + v_{\varphi_2}dP_E = -s_{\varphi_1}dT + v_{\varphi_1}dP_E$

$\Rightarrow (v_{\varphi_2} - v_{\varphi_1})dP_E = (s_{\varphi_2} - s_{\varphi_1})dT$

$\Rightarrow \frac{dP_E}{dT} = \frac{s_{\varphi_2} - s_{\varphi_1}}{v_{\varphi_2} - v_{\varphi_1}} = \frac{1}{T} \frac{P_{\varphi_1, \varphi_2}}{v_{\varphi_2} - v_{\varphi_1}}$

3) L'enthalpie libre molaire du corps pur est G^0 lors d'une transit° de φ alors que le vol molaire et l'entropie molaire ne le sont pas.

Or $dg = -sdt + vdp$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P = -s$ et $\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P = v$ st des G^0

Def: Une transit° de φ de 1^{er} espèce est caractérisée par la continuité de l'enthalpie libre molaire des corps pur considérés et par une dis G^0 de ses dérivées 1^{er}es.



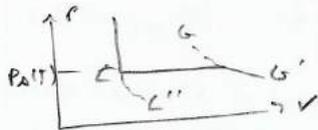
1) (P)

liq refroidit à une °C inf à sa °C de solidificat° \Rightarrow surfusion.

liq porte à une °C sup à sa °C et abulit° reste liq \Rightarrow surchauffe.

= ce st des états métastables!

Explication de l'état métastable par un esc de schéma avec ρ et D ou



2) (P) Surfusion de l'eau, à l'eau l'esp = retard à la solidification d'un liq.
 \Rightarrow création d'un germe étranger pour passer de la glace.

3) (B) (voir de esc) Présence d'une vapeur "sous refroidit" qui devrait donc normalement être de l'état liq avec $T < T_0$ et $P < P_0$.
 On étudie la possibilité qu'une goutte de liq se dup et croisse jusqu'à la liquéfaction complète des gaz.
 \Rightarrow sous refroidit \Rightarrow état métastable $\Rightarrow g_{liq} < g_{vap}$.

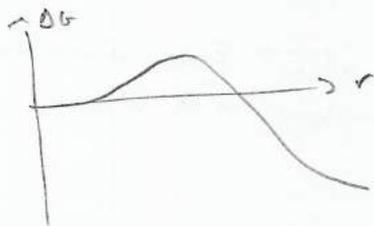
On suppose qu'une petite goutte de ray r est apparue au sein de la vap.

$$G^*(r) = n g_{vap} + (g_{liq} - g_{vap}) \rho_{liq} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 + 4 \pi r^2 \sigma \right)$$

$$G^*(0) = n g_{vap}$$

$$\Rightarrow \Delta G = (g_{liq} - g_{vap}) \rho_{liq} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 + 4 \pi r^2 \sigma \right)$$

$r = 0$: état métastable : $\Delta G < 0$



CP 16: Étude statistique d'un syst en contact avec un thermostat. Probabilité canonique.

Niveau: L3

Bibli: Dio, Y stat

Pré-requis:

Intro: Ds le Dio (il y a 1 chp entier sur "Syst en eq avec un thermostat. Descript° canonique).

I) Description canonique d'un syst en contact avec un thermostat.

1) Syst canonique.

Syst \mathcal{S} en contact avec \mathcal{B} ($\mathcal{B} \oplus$ grs que \mathcal{S}) $\mathcal{S} + \mathcal{B}$: syst isolé.

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = E + E_{\mathcal{B}}$$

• Notion de Thermostat: $E_{\mathcal{B}} \gg E$: échanges peuvent modifier \mathcal{S} pour modifier \mathcal{B} $\Rightarrow \mathcal{B}$ joue le rôle de thermostat; à l'éq thermique on dit que le syst \mathcal{S} se trouve dans une situat° canonique.

• °C canonique du système: syst \mathcal{S} maintenu à la °C T par le thermostat.

• separaison: microcanonique: E fixée
canonique: syst non isolé \Rightarrow énergie fluctue.
mais °C canonique fixée

2) Probabilité d'un état micro

$E_{\mathcal{P}}$ pour \mathcal{P} } ils sont en contact thermique $\Rightarrow E = E_{\mathcal{P}} + E_{\mathcal{B}}$
 $E_{\mathcal{B}}$ pour \mathcal{B}

Or $\mathcal{S} \cup \mathcal{B}$: syst isolé \Rightarrow on peut appliquer le postulat fondamental de la méca statistique: les états accessibles de ce syst global st équiprobables à l'éq. Cherchons la probabilité $P_{\mathcal{P}}$ pour que \mathcal{S} se trouve dans un état \mathcal{P} particulier.

$$P_c^p = \frac{\Omega_B (E_{tot} - E_p)}{\Omega (E_{tot})} = \frac{1}{Z} e^{-E_p/RT} \quad \underline{\text{distribution canonique}}$$

3) Probabilité d'une énergie donnée.

$$\bar{E}^c = \frac{1}{Z} \sum_{E_i} E_i g(E_i) e^{-E_i/RT}$$

$$\text{Approximat}^o \hat{=} : \quad \bar{E}^c = \frac{1}{Z} \int_B E \rho(E) e^{-E/RT} dE.$$

II

FONCTIONS THERMO DE L'ENSEMBLE CANONIQUE.

1) Fct de partition et énergie libre

$$\bullet Z = \sum e^{-\beta E_p} \quad , \quad \beta = \frac{1}{RT} \quad ; \quad \beta \frac{\partial}{\partial \beta} = -T \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\bullet F = -RT \ln Z.$$

2) Calculs des ptes thermodynamiques.

$$\bullet \text{Énergie moyenne : } \bar{E}^c = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z.$$

$$\bullet \text{capacité calorifique et chaleur spécifique} \quad C_V = \frac{\partial \bar{E}^c}{\partial T}$$

$$\bullet \text{distribution d'une variable interne} \quad F: \bar{E}^c - T \bar{S}^c$$

$$\bullet \text{pression et potentiel chimique canoniques : } p_c^c = - \frac{\partial F}{\partial V} \quad , \quad \mu_c^c = \frac{\partial F}{\partial N}.$$

On peut faire une applicat^o de l'ensemble canonique avec le paramagnétique. : particules jouent un rôle de thermostat !
on retrouve la loi de Curie.

Voir l'ex Phys Stat Ngô.

CP17: Rayonnement d'éq thermique

CP17
①

Corps noir

Niveau:

Biblio: - Tec & doc NP^{*}-NP
(Augier, Nori)

- H Prpa NP^{*}-NP
(themo)

- CAP - prepa AP-AP^{*}

Pré-requis: • Thermodynamique
• Electromagnétisme

Plan:

I Bilans radiatifs

- 1) Interaction ray-mat
- 2) Eq radiatif etthermod

II Ray d'éq thermique

- 1) Loi de Planck
- 2) Loi de Wien
- 3) Loi de Stefan

III Modèle du CN

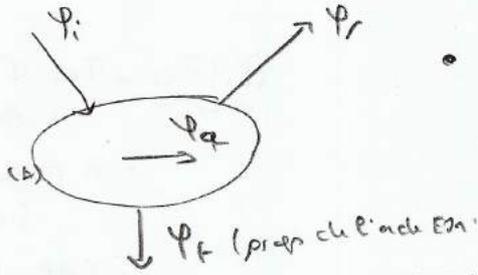
- 1) Def
- 2) Notion de la σ du CN
- 3) Ray d'un CN: le soléil.

Intro: (Cap) La sensation de chaleur intense que l'on ressent près d'un corps chaud disparaît instantanément si on place un journal en guise d'écran protecteur. Cela montre que cette sensat^o est essentiellement due au ray électromagnétique émis par le corps chaud et non au contact avec l'air localement chauffé.

I BILANS RADIATIFS

1) Interaction entre matière et ray

(T) :



- φ_a : Les particules de la surface des corps, soumises à un champ E_{0n} , vont être excitées si bien qu'une partie de l'onde incidente sera réfléchie.

\Rightarrow corps opaque : ϕ de φ_e .

transparent : ϕ de φ_r ni φ_a .

conservation énergétique $\Rightarrow \varphi_i = \varphi_r + \varphi_a$.

- De \oplus , du fait de l'agitation thermique, les particules chargées présentes à la surface d'un corps émettent une OER \Rightarrow ray thermique ! φ_e .

$\Rightarrow \varphi_p =$ flux surfacique de l'ach résultant partant

$$\varphi_p = \varphi_r + \varphi_e$$

- Le transfert thermique par ray peut faire l'obj pour chaque corps opaque et un bilan radiatif rattaché à flux entrant et sortant.

$$P_{\text{regue}} = \iint_S (\varphi_i - \varphi_p) dS$$

$$\Rightarrow \varphi_i - \varphi_p = \varphi_a - \varphi_e \quad (1)$$

2) Eq radiatif et thermod

(T)

- eq radiatif : puissance thermique reçue par ray = 0
 $\Rightarrow \varphi_i = \varphi_p$ et $\varphi_a = \varphi_e$. (en tout point de la surface du corps).
- eq thermod : si la température prend cette valeur en tous les pts de l'échant.

Donc eq thermodynamique de l'échant

\Rightarrow eq radiatif pour tous les corps

(reciproque fautive !!)

II RAY D'EQUILIBRE THERMIQUE.

(LP) 17
②

1) Loi de Planck

Lorsqu'il atteint l'éq thermo \Rightarrow rayonnement à spectre B^0
Flux surfacique incident réparti sur λ selon une distribution spectrale:

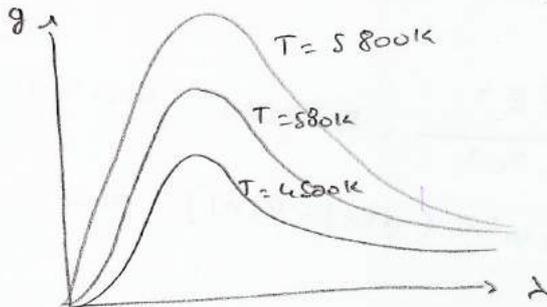
$$g(\lambda_0) = \left(\frac{d\Phi_i}{d\lambda} \right)_{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \text{Loi de Planck: } g(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

(H), (T)

2) Loi de Wien

Lorsqu'à brève $g = \rho(\lambda)$ on a:



Devenir le graphe!

Les courbes présentent toutes un max pour une certaine $\lambda \Rightarrow \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$

$$(\lambda^{-5})' = -5\lambda^{-6}$$

$$\left(-1 + e^{\frac{hc}{\lambda kT}}\right)^{-1} = -1 \left(-\frac{hc}{\lambda^2 kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}}\right) \left(-1 + e^{\frac{hc}{\lambda kT}}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{-5 \times \lambda^{-6} \times hc^2}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} + \frac{\cancel{\lambda^{-6}}}{\lambda^6} \frac{hc}{\lambda^2 kT} e^{-\frac{1}{\lambda kT}} \frac{1}{(-1 + e^{-\frac{1}{\lambda kT}})^2}$$

$$\Leftrightarrow -5(e^y - 1) + y e^y = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y (y - 5) + 5 = 0$$

\Rightarrow par résolution numérique on trouve $y = 4,964$.

$$\Rightarrow \frac{\lambda_m T}{b_{Wien}} = \frac{hc}{k y} = \frac{2898 \mu m K}{y}$$

Loi de déplacement de Wien
(prop du ray d'eq et ϕ à la nature chimiq des corps).

- Courbe de irradiance
- Loi vérifiée exp avec le soleil
- étendue spectrale $[\frac{\lambda_m}{2}, 8 \lambda_m]$.

3) Loi de Stefan.

Intégration sur tout le domaine spectral:

$$\varphi_i = \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda = 2\pi h c^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda RT}} - 1)} d\lambda$$

Posons $y = \frac{hc}{\lambda RT} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{y RT} \Rightarrow d\lambda = -\frac{hc}{y^2 RT} dy$

$$\Rightarrow \varphi_i = 2\pi h c^2 \int_{\infty}^0 - \frac{y^5 R^5 T^5}{h^5 c^5} \frac{1}{e^y - 1} \frac{hc}{y^2 RT} dy$$

$$= \frac{2\pi R^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy$$

$$= \sigma T^4 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 R^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

on retrouve ce que l'on a décrit sur le graphique ($g(\lambda) = p(\lambda)$) : pour une λ donnée, la loi est T avec la T^4

TRANSITIONS (T) Ici, seules les prop du ray ont été prises en compte qu'en est-il de celle des corps ?

III MODELE DU CN.

1) Def

Un CN est un corps opaque absorbant \int le ray incident.
(= étendue spectrale limitée pour un ray thermique).

$$\Rightarrow \varphi_i = \sigma T^4$$

- ϕ de réflexion ($p_r = 0$) $\Rightarrow \varphi_i = \varphi_a$

- eq thermo impose eq radiatif $\Rightarrow \varphi_e = \varphi_i$

$$\Rightarrow \varphi_i = \varphi_a = \varphi_e = \sigma T^4$$

2) mesure de la °C du CN

CP 17
(3)

Pyromètre : paire l'esp (quaranta thermo + (H))

3) Ray d'un CN : le soleil.

• Puissance émise par le soleil: $P_e = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_s^2$

• Flux surfacique vers la Terre: $\Psi_s = \frac{R_s^2}{D^2} \sigma T_s^4$

• P reçue par la Terre = $\Phi_i = \pi R_p^2 \frac{R_s^2}{D^2} \sigma T_s^4$

• $\Phi_e = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$

$\Rightarrow T_p = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2D}} = 275 K$

$\Rightarrow \Phi$ celle prévue théoriquement à cause de l'effet de serre
(si on a la tm paire l'esp de l'effet de serre)

CP 18 ✓ Phénomènes de transport.

①

CP18

Niveau:

Pré-requis: électrocinétique, électrostatique, 1^{er} principe de la Thermo

Biblio: - Tout en Un PC-PC⁺, Say - Thermodynamique, Précis, PC-PSI
- Thermodynamique, Poug
- Thermodynamique, H. Prens, 2^{ème} année.

Plan: I Lois du transport thermique

- 1) Différents types de transport
- 2) Equilibre thermodynamique local
- 3) Courant thermique
- 4) Bilan local d'énergie
- 5) Loi de Fourier

II Diffusion

- 1) Equations de diffusion
- 2) Propriétés de la diffusion
- 3) Aspect microscopique

III Applications

- 1) Régime permanent
 - a) Avec source
 - b) Sans source
- 2) Régime unidimensionnel établi.

I LOIS DU TRANSPORT THERMIQUE

(2)
19

1) Différents types de transport [43]

On distingue 3 modes de transfert thermique chacun régi par des lois bien spécifiques: La conduction, la convection, le rayonnement.

Rayonnement: Un corps chauffé émet un rayonnement EON qui transporte de l'énergie susceptible d'échauffer le corps qui le reçoit.

Contrairement aux 2 autres, qui nécessitent la présence d'un milieu matériel, un transfert thermique par rayonnement peut se produire ds le vide. (Ici on le négligera...)

Convection: implique un déplacement macroscopique de matière et concerne ds les fluides, liq ou gazeux. On distingue:

→ convection naturelle: une variation de $^{\circ}\text{C}$ modifie localement le mode de déplacement du fluide entraînant un mixage. Les parties les plus chaudes s'élèvent chassant les plus froides vers le bas.

→ convection forcée: un fluide peut être mis en mouvement de manière artificielle pour accélérer les échanges thermiques.

Conduction: C'est un transfert d'énergie ^{à travers un milieu matériel} sans mouvement macroscopique de matière. cela E dès qu'il y a une inhomogénéité des champs de $^{\circ}\text{C}$.
(besoin d'un milieu matériel) Il y a élevat^o de $^{\circ}\text{C}$ de proche en proche, cela est dû à:

- l'énergie microscopique de vibrat^o du réseau cristallin par les solides
- l'énergie cinétique microscopique d'agitat^o désordonnée des molécules d'un fluide, dû aux chocs incessants entre ces μ .

• La conduction thermique est le seul mode de transfert qui intervient ds les solides homogènes et épais.

• Ds les fluides, la conduct^o est souvent masquée par la convection.

2) Equilibre thermodynamique local. [Pr]

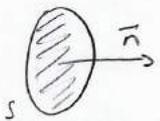
On constate exp que les échanges par conduction ont lieu lorsque la $^{\circ}C$ du milieu étudié n'est pas uniforme; le milieu est de haut eq.

Assione: On supposera que le syst hors eq reste tout de \vec{m} voisin d'un état d'eq afin de pouvoir étudier à l'échelle locale du syst \vec{z} si il était à l'équilibre.

Plus précisément, un vol de taille mésos centré autour d'un pt est supposé à l'eq thermo, de sorte que l'on peut parler sans ambiguïté de sa $^{\circ}C$; néanmoins ce vol mesos n'est pas à l'eq avec son environnement car la $^{\circ}C$ varie d'un vol mesos à l'autre, il y a un gradient de $^{\circ}C$ si l'on considère une échelle de longueur sup à l'échelle mesos.

3) Courant thermique [Pr], [Pe]

[Pr] Considérons une surface S orientée selon la normale \vec{n} .



Supposons qu'une quantité de chaleur δQ traverse algébriquement S pdt dt .

DEF: * Le flux thermique Φ à travers S est la puissance thermique algébrique traversant S $\delta Q = \Phi dt$

* On déf alors le vecteur densité de chaleur \vec{J}_Q par son flux à travers la surface S orientée selon \vec{n} .

$$\Phi = \iint_S \vec{J}_Q \cdot \vec{n} dS$$

[Pe] Le flux thermique à travers une surface est = au flux du vecteur densité de courant thermique à travers S .

• Analogie avec le courant électrique:

La densité de courant thermique joue le rôle de la densité de courant électrique \vec{J}_{el} ; La charge électrique élémentaire d^3q traversant une surface élémentaire ds le sens du courant électrique $d^3q = \vec{J}_{el} \cdot d\vec{S}$, dt.

Et le flux thermique est analogue à I d'où $I = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n} \, dS$ (3)

18

4) Bilan local d'énergie (5)

a) Hypothèses

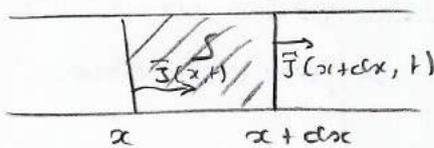
Considérons un milieu solide ou liq au repos, il n'y a pas de mot macro de matière. Nous supposons que le matériau évolue à un volume et il est caractérisé par:

- sa masse vol ρ
- sa capacité thermique mottique à vol est c_v .

(grandeurs ctes et unifomes ds le syst).

b) Bilan thermique local à 1D [53]

- Supposons que \vec{j} ne dépend que d'une coord x .
- Regardons le syst sur une tranche dx : (syst fermé)



1^{er} principe de la thermo:

$$d(U+K) = \delta W + \delta Q$$

→ pas de mot d'ens $\Rightarrow dK = 0$

→ pas de travail $\Rightarrow \delta W = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{pas de mot d'ens} \Rightarrow dK = 0 \\ \rightarrow \text{pas de travail} \Rightarrow \delta W = 0 \end{array} \right\} dU = \delta Q = \delta Q_{\text{thermig}} + \delta Q_{\text{aut}}$$

$$\Leftrightarrow (\rho S dx) c \, dT = -j_{cd}(x+dx) S dt + j_{cd}(x,t) S dt + P_r(x,t) S dx \, dt$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} S dx \stackrel{\text{Au premier ordre}}{=} - \frac{\partial j_{cd}(x,t)}{\partial x} S dx + P_r(x,t) S dx$$

$$\Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{cd}(x,t)}{\partial x} = P_r(x,t)$$

c) Generalisation

Considérons Σ syst Σ la matière contenue ds un vol V , limité par une surface fermée S , fixe; unctiforme et de forme qqe

$$\underbrace{\iiint_V \rho c \, dT \, dV}_{\text{variat}^\circ \text{ d'énergie interne}} = - \underbrace{\iint_S \vec{j}_{cd} \cdot d\vec{S} \, dt}_{\text{transport thermiq reçu par } \Sigma} + \underbrace{dt \iiint_V P_{\text{aut}} \, dV}_{\text{puissance dégagée à l'int de } \Sigma}$$

On trouve aussi

$$\Leftrightarrow \iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = - \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau + dt \iiint \text{Pertes} d\tau.$$

d'où (vrai quel que soit V)
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = P_r$$

RQ: Si il n'y a pas de sources $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ l'équation analogue à l'équation de conservation de charge ou en EOM $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ et à l'équation de conservation de la masse en méca des fluides et équation de conservation du nb de particules: $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

5) Loi de Fourier (1).

Pour disposer d'une relat° entre T et \vec{j} mais cela est insuffisant pour résoudre le syst. Ayant 4 inconnues scalaires, il faut 3 autres équations scalaires ou bien une équation vectorielle.

Cette équation est la loi de Fourier: (relation linéaire entre le vecteur densité de courant thermique et le gradient de T).

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad \text{avec } \lambda: \text{conductivité thermique}$$

(Donner un tableau de valeurs de λ) ($\lambda > 0$ et $\dim[\lambda] = \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

Le signe - traduit que les transferts thermiques se font de T° élevées vers les faibles T° .

C'est une loi phénoménologique qui se constate exp et ne démontre pas contrairement à l'éq de conservation.

Analogies: Loi d'ohm locale: $\vec{j}_{el} = \gamma \vec{E} = -\gamma \vec{\nabla} V$

Loi de Fick: $\vec{j} = -D \vec{\nabla} n$.

(Historiquement Fick s'inspire de Fourier car phénomène très similaire)
Toutes ces lois relient une densité de courant à un gradient!

Validité: Comme ces lois st phénoménologiques, ces lois ne st vrais que ds un certain domaine.

→ Si le gradient est trop fort, alors ϕ loi linéaire

→ Si le gradient varie trop lentement ds le temps, la relation cesse d'être instantanée; il y a un retard ds l'établissement de flux.

→ il y a des milieux anisotropes pour lesquels le coefficient de diffusion dépend de la direct° de l'espace

II D I F F U S I O N

18 (4)

1) Equation de diffusion.

a) Cas où $P_r \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \vec{J} &= -\lambda \vec{\nabla} T \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + P_r \end{aligned} \right\} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + P_r$$

b) Cas où $P_r = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = D \Delta T$$

(equation de la chaleur)

equation de diffusion avec
 D : coefficient de diffusivité
thermique (tableau de val)

$$[D] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c]} = \frac{\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}}{(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1})} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{J}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

2) Propriétés de la diffusion (5)

Avec la loi de Fick : $D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t}$

→ Nous pouvons rq que cette equation n'est pas invariante par renversement
du tps : le chgt de variable $t' = -t$ la transformerait en

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -\frac{\partial n}{\partial t'} \Rightarrow \text{Diffusion est un phénomène irréversible}$$

C'est la loi de Fick qui inclut cette irréversibilité en imposant
que la diffusion se fasse des zones riches en particules vers les
zones pauvres en particules.

→ Nous allons chercher pour la relation entre la durée caractéristique
 τ des variat° temporelles de $n(x,t)$ et de la distance caractéristique
 L de nos variat° spatiales.

Definirons $t^* = t/\tau$ et $x^* = x/L$. $\Rightarrow t = t^* \tau$ et $x = x^* L$

d'où $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D \tau}{L^2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^{*2}}$ Les dérivées partielles ulouvant

de cette equation et du \hat{m} ordre de grandeur par chgt \hat{m} de τ et L

$$\text{d'où } L \sim \sqrt{D \tau}, \quad \tau \sim \frac{L^2}{D}$$

ex: On met un morceau de sucre ds une tasse à café. Si on ne mélange pas, le transfert du sucre à l'int du café est purement diffusif. Cbn de tps faut-il pour que le sucre st reparti uniformément ds la tasse?

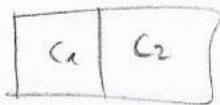
$$\left. \begin{array}{l} D_{\text{sucre ds l'eau}} = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ L_{\text{sucre}} = 3 \text{ cm} \end{array} \right\} \tau \approx \frac{L^2}{D} \approx 3 \text{ semaines.}$$

Il vaut mieux utiliser une cuillère pour ajouter un transfert convectif au transport diffusif!

3) Aspect microscopique

Fich: Ce st les choses entre particules diffusées et particules du support qui st l'origine micro des phénomènes de diffusion pgsu macro.

* La diffusion résulte du nb de collisions entre molécules. Considérons un récipient fermé de 2 compartiments identiq G_1 et G_2 contenant n mol G_1 à la $T = 0^\circ\text{C}$, mais avec $N_1 > N_2$. Donc $\bar{v}_{1,x} > \bar{v}_{2,x}$, l'agitation moléculaire, c'ad, le nb de collisions entre st \propto importante de G_1 & G_2 .



Si on enlève la cloison qui separe G_1 et G_2 , l'agitation mol évolue ds le sens de l'uniformité, ce qui implique un double courant de st: le 1^{er} de G_1 vers G_2 \oplus

intense que le 2nd de G_2 vers G_1 . Il en résulte un courant global de st diffusion de G_1 vers G_2 .

Cette interprétation de la diffusion peut être dupl à l'aide du concept de libre parcours moyen λ (c'est la distance qui separe en moyenne 2 chocs successifs entre st).

* Relat° entre le coeff de diffusion et le libre parcours moyen de collision

Raisonnons à 1D (x) tps avec $n_{1,x} > n_{2,x}$ ($n_{1,x}$: nb de mol par unité de vol) \Rightarrow il y a en moy, par unité de vol $n_{1,x}/3$ mol qui st en st dirigés selon l'axe des x, de $n_{1,x}/6$ st se déplacent de st vers la st et autant de st vers la st.

Les particules qui traversent, ds le sens de \vec{e}_x , le plan de plan, d'axe S et d'abscisse x , st celles qui se trouvaient à l'abscisse $x-l$ et qui n'ont pas subi de collisions: en effet, par def de l , aucune particule ne se trouve entre $x-l$ et x . Pdt une durée élémentaire dt , les particules concernées se trouvaient ds un cyl de hauteur $v_m dt$ et de section S : leur nb est $S v_m dt n_v(x-l) / 6$.

De \vec{m} , les particules qui traversent le plan ds le sens opposé st celles qui se trouvaient ds un cyl de symétrique du précédent; leur nb est aussi $S v_m dt n_v(x+l) / 6$.

$$\text{d'où } \Phi_n = \frac{1}{dt} \frac{v_m S dt}{6} (n_v(x-l) - n_v(x+l))$$

l suppose faible devant les distances de variat^o significatives de n_v

$$\Rightarrow n_v(x-l) - n_v(x+l) \approx -2l \frac{\partial n_v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \Phi_n = -\frac{1}{3} v_m \left(\frac{\partial n_v}{\partial x} \right) S \Rightarrow \vec{J}_n = \vec{e}_x \frac{\Phi_n}{S} = -\frac{1}{3} v_m \frac{\partial n_v}{\partial x} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \underline{D = \frac{1}{3} v_m}$$

les molécules qui peuvent franchir S ds le sens de \vec{e}_x pdt la durée t^* st de celles qui st situées ds un cyl de sect^o de S de hauteur $l = v_m t^*$ compris entre $x-l$ et x et qui'at un vecteur \vec{v} // à \vec{e}_x .

En assimilant la densité mola moy ds ce cyl à $n_v(x-l)$, le nb de mol qu'il contient vaut $n(x-l) v dt S$. Parmi ces mol, seuls une sur 6 possède un vecteur \vec{v} // à \vec{e}_x .

$$\delta N_{\vec{e}_x} = \frac{1}{6} n(x-l) v dt S$$

- \vec{e}_x , de \vec{m} les mol qui peuvent franchir S ds le sens de $-\vec{e}_x$, st celles situées ds le cyl de sect^o de S de hauteur l compris entre x et $x+l$.

$$\delta N_{-\vec{e}_x} = \frac{1}{6} n(x+l) v dt S$$

III APPLICATIONS

1) Régime permanent

a) Avec source (S)

- Equation bilan local d'énergie: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{th} = P_v$
 Cette équation est analogue à l'éq. P.G. de l'électrostatique. L'équation intégrale associée, analogue au Th de Gauss n'est:

$$\oint \vec{J}_{th} \cdot d\vec{S} = \iiint P_v d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = P_{prod}$$

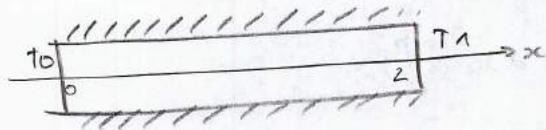
\Rightarrow en régime permanent, toute l'énergie produite à l'int d'un volume est évacuée par transfert thermique à travers sa surface.

- Equation de diffusion: $\Delta T + \frac{P_v}{\lambda} = 0$ | Analogue à l'équation de Poisson.

b) Sans source (S)

- Equation bilan local d'énergie: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{th} = 0$
 La densité de courant thermique est donc à flux conservatif.
 (analogie avec l'équation de P.G. sans charges).

- Equation de diffusion: $\Delta T = 0$ | En régime permanent et en l'absence de production interne d'énergie, le champ de TC vérifie l'équation de Laplace.



Parois adiabatiques
 en 0 : thermostat à T_0
 en L : thermostat à T_1 .

$$\Delta T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = Ax + B$$

$$\begin{cases} T(0) = T_0 = B \\ T(L) = T_1 = AL + B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0$$

$$\Rightarrow \vec{J}_{th} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\frac{\lambda(T_1 - T_0)}{L} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint \vec{J}_{th} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_1)$$

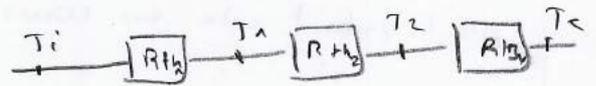
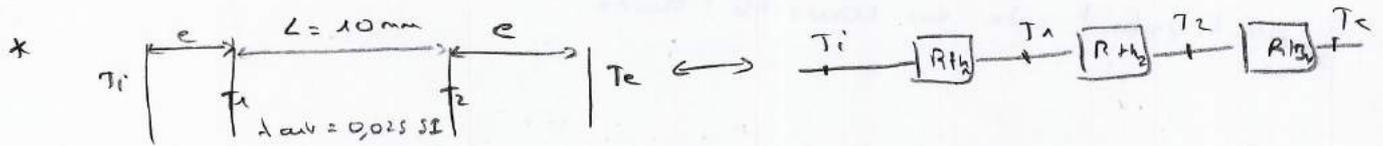
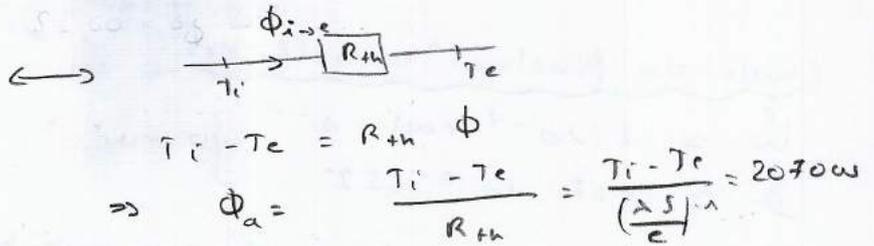
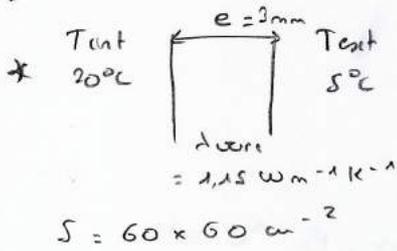
or $\Phi \leftrightarrow I$

$\Delta T \leftrightarrow \Delta U$

d'où $G_{th} = \frac{\lambda S}{L}$, $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

Associe en serie, les resistances thermiques s'ajoutent
 Associe en //, ce sont les conductances qui "

ex: Simple et double usage:



$\Rightarrow \phi_0 (2 R_{th1} + R_{th2}) = T_i - T_e$

$\Rightarrow \phi_0 = \frac{T_i - T_e}{2 \left(\frac{\lambda_w S}{e}\right)^{-1} + \left(\frac{\lambda_a S}{L}\right)^{-1}} = 13,3 W$

On a donc un flux sortant 13,3 W possible que avec ϕ_a .
 \Rightarrow d'où l'interet du double usage.

2) Regime sinusoidal etabli [P.S]

$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Posez $\Theta = T - T_m$ où Θ designe la fluctuation de $^\circ C$ autour d'une valeur moyenne T_m . de $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$

Regime sinusoidal (methode C : $\Theta = \underline{\Theta}_m e^{j\omega t}$)

d'où $\frac{d^2 \underline{\Theta}_m}{dx^2} - j \frac{\omega \underline{\Theta}_m}{D} = 0$

Cherchons une sol de la forme $\underline{\Theta}_m = A e^{rx}$

d'où l'equat^o caracteristique $r^2 - j \frac{\omega}{D} = 0$

$\Rightarrow r^2 = j \frac{\omega}{D} = e^{i\pi/2} \frac{\omega}{D} \Leftrightarrow r = \pm e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$

$\Rightarrow r = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \frac{i+1}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ epaisseur thermique

C'est la diffusion thermique doit être nulle pour ω infini, le signe qui convient est le signe \ominus .

$$\text{d'où } \underline{\Theta} = \underline{A} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

Pour $x = 0$, $\underline{\Theta}_m = \Theta_m$ d'où x prenant la partie réelle,

$$\Theta = \Theta_m e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

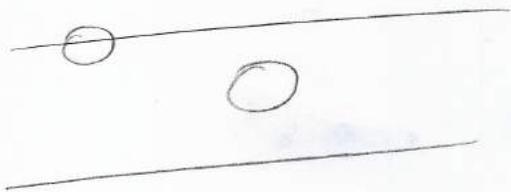
Étude des fluctuations annuelles de °C.

$$\left. \begin{array}{l} \omega \simeq 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \delta \simeq 0,28 \cdot 10^{-6} \text{ SI} \end{array} \right\} \delta = 1,7 \text{ m}$$

\Rightarrow Au fond d'un puits ou ds une cave bien isolée, la °C est pratiquement constante au cours de l'année.

$$\theta = A e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)}$$

→ π milieu anisotrope: on privilégie une direction
ou l'axe de λ .



on découpe, et on recolle

→ L

→ pourquoi a le droit à Th de superpart?

→ car écart.

→ $\dot{q} = h \delta (T - T_e)$ Loi de Fourier dégénérée.

→ il faut que la σ du fluide,
conductivité thermique de une épaisseur de peau.
mettre à la place de III 2.

→ trouver un ex \oplus cadre intuitif pour III 1).
car a de l'ap \neq regarde les bords de
casolictat.

→ revue ordre acoustique.

→ ETL $T(r, t)$: surface de l'espace et les
dax l't à base eq, $\rightarrow r$ et $\rightarrow t$.

→ entre de D: et ϕ [D]

LP 19: Bilans Thermiques

LP 19
①

Niveau: CPGE

Biblio.: • H. Proust NP-MP+
• Thermo Proust PC-PC+

Pré-requis: • 1^{er} principe de la thermo.
• électrostatique.

Plan: I Generalités

- 1) Les \neq modes de transfert
- 2) Eq thermodynamique local
- 3) Flux thermique.

II Conduction + Convection

- 1) Loi de Fourier
- 2) Equations de chaleur
- 3) Résistance thermique
- 4) Conduction - convection.

III

- 1) Loi de Newton
- 2)

IV Rayonnement thermique

- 1) Bilan énergétique
- 2) CN.
- 3) Applicat° à l'effet de serre.

Intro:

I GENERALITES.

1) Les 3 modes de transfert.

(H) On distingue 3 modes de transfert thermique régi par des lois bien spécifiques: → la conduction
→ la convection
→ le ray.

2) Equilibre thermique local (Pr).

On constate exp que les échanges par conduction ont lieu lorsque la ΔT du milieu étudié n'est pas uniforme, le milieu est de hors eq.

Assomptions: On suppose que le syst hors eq reste tout de même voisin d'un état d'eq afin de pouvoir écrire à l'échelle locale du syst et s'il est état à l'eq.

⊕ précisément, un vol de taille méso centré autour d'un pt est supposé être thermo, de sorte que l'on peut parler sans ambiguïté de sa ΔT , néanmoins son vol méso n'est pas en eq avec son environnement car il y a un ΔT qui varie d'un vol méso à l'autre, il y a un gradient de ΔT si l'on considère une échelle de longueur sup à l'échelle méso.

2) Flux thermique.

(H) Le flux thermique Φ est la quantité d'énergie qui traverse une surface Σ par unité de temps. Φ est une puissance et s'exprime en watt. Pdt une durée dt, l'énergie qui traverse Σ vaut

$$\delta Q = \Phi dt.$$

• Φ est le flux du vecteur densité de courants thermiques \vec{j}_{th} à travers Σ : $d\Phi = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ ou $\Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$.
 j_{th} a u.n.m⁻².

(phne) on peut définir \vec{j} pour \vec{j}_{cond} , $\vec{j}_{convect}$ par le ray a défaut plutôt flux surfacic radiatif!

II CONDUCTION THERMIQUE

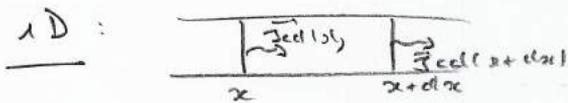
LP19
②

(H) 1) Loi de Fourier

Loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T$

* signification du \ominus , loi phénoménologique, donner des ordres de λ , domaine de validité, analogie avec loi d'ohm ?

(H) 2) Equation de la chaleur



1^{re} principe de la thermo :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation de la chaleur.

(S) et (H)
Generalisation

$$\iiint \rho c dT dV = - \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt + dt \iiint \text{Pertes} dV$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \text{Pertes}$$

- irréversibilité
- les caractéristiques.

3) Resistance thermique : régime permanent

Régime permanent $\Rightarrow G_{th} = \frac{KS}{e}$

$$T = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0 \Rightarrow \vec{j} = - \frac{\lambda(T_1 - T_0)}{L} \vec{e}_x \Rightarrow \Phi = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_0)$$

enc : de la suite simple usage, double usage.

III CONVECTION 4) Conducto-convec

Souvent la conduction s'accompagne de convection.

Loi de Newton

(S) solide - liq : Loi de Newton

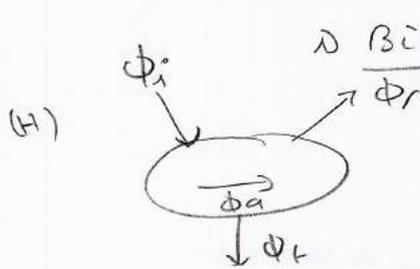
$$\vec{j}_{th} = h(T - T_0) \vec{n}$$

- loi phénoménologique
- analogie avec Fourier

→ transferts thermiques \Leftarrow

→ application aux transferts thermiques entre 2 fluides au travers d'une paroi isolée.

III RAYONNEMENT THERMIQUE



Bilan énergétique

$$\phi_i = \phi_r + \phi_a + \phi_e.$$

$$\phi_R = \phi_e + \phi_r - \phi_i = \phi_e - \phi_a.$$

2) (N)

(N) Un (N) est un corps qui absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit et ceci quelque soit la λ ou la direction du rayonnement.
⇒ Loi de Stefan: $\phi_e = \sigma T^4$

3) Application à l'effet de serre

Voir l'exo de H. p. 10.

CP 20 : Conversion de puissance électronique. (LP20)

Niveau:

Pré-requis: induction
- Laplace

Biblio: H - nipa vert
electronique II

- Serj PSI-PSI'
- BUP 846.
- Actualitat^o des conversions sur les moteurs electriq.

Plan:

I Généralités

- 1) Notion mise en jeu (H)
- 2) Bilan de puissances des forces de Lorentz (H)
- 3) Conversion électro-meca. (H)

II Machine à courant continu

- 1) Def et structure (H)
- 2) Principe de fonctionnement (H)
- 3) Les principes du couple électromagnétique (H)
- 4) Bilan de puissance (H)

III Machine tournante

- 1) Présentation
- 2) Machine synchrone
- 3) " " asynchrone.

IVo: Conversion que l'on utilise de la vie de tous les jours.

I 1) • Forces de Laplace : $d\vec{F} = id\vec{r} \wedge \vec{B}$
 \Rightarrow c'est bien cette force qui m'a le couple car un tour de chaque.
 • champ mag permanent, circuit mobile - Lorentz
 $\vec{E}_r = v_e \wedge n \vec{B}$, $\vec{e} = \oint \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = - \frac{d\psi}{dt}$

2) • circuit péripartime à la vitesse v_e } $\vec{F} = q (v_e + v_r) \wedge \vec{B}$
 parteur de charge à la vitesse v_r

• $d\mathcal{P} = (v_e + v_r) \cdot d\vec{F} = nq (v_e + v_r) \cdot ((v_e + v_r) \wedge \vec{B}) d\vec{r} = 0$
 \Rightarrow puissances des forces de Lorentz est nulle.

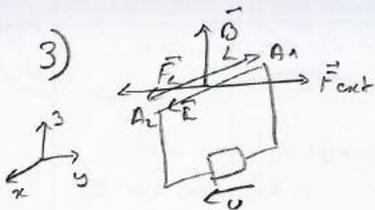
(1) $\Rightarrow nq (v_e \wedge n \vec{B}) \cdot v_r \cdot d\vec{r} = -nq (v_r \wedge n \vec{B}) \cdot v_e \cdot d\vec{r} = 0$

$d\mathcal{P}_e = nq (v_e \wedge n \vec{B}) \cdot v_r \cdot d\vec{r} = (v_e \wedge n \vec{B}) \cdot \vec{j} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_m \cdot id\vec{r}$

$d\mathcal{P}_L = v_e \cdot d\vec{F}_L$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_L = 0}$

Principes de conversions
électroniques



* $P_{mech} \rightarrow P_{elec}$

- conducteur $A_1 A_2$ se déplace à la vitesse \vec{v} de R où règne un champ mag \vec{B} uniforme et perpendiculaire à \vec{v}
- $\vec{E} = B u \vec{e}_z$ / $\vec{E}_m = 0$ ou \vec{e}_z , $\vec{F}_L = -B i L \vec{e}_y$

$\Rightarrow P_L = -B i L u \vec{v} = -P_e$

$\frac{dE_c}{dt} = (\vec{F}_{ext} + \vec{F}_L) \cdot \vec{v} = P_{prot} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = e i - P_{prot}$

\Rightarrow regime class: $P_{mech} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = e i + P_{prot}$

$\Rightarrow P_{elec} = U i = (e - r i) i = P_{mech} - P_{prot} - P_J$

* $P_{elec} \Rightarrow P_{mech}$

- Hyp: sans e'act d'une liaison vent d'origine ext, ce n'est conducteur soit parcouru par un courant i
- place de $\vec{B} \Rightarrow$ nous a $\vec{F}_L = -B i L \vec{e}_y$ qui l'abane à la vitesse \vec{v}
- $\Rightarrow P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = B i L u \vec{v}$
- $e = B u \vec{v} L \Rightarrow P_e = e i = -B i L u \vec{v}$

$P_{elec} - P_J = P_{mech} + P_{prot}$

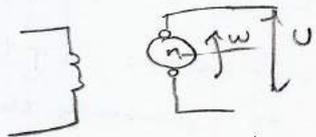
II

Def: grandeurs électriques et unidirectionnelles.
machine réversible: fonctionne moteur ou génératrice.

Structure:

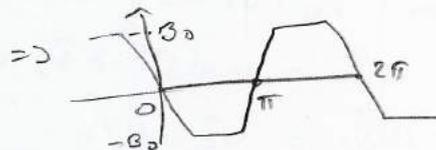
- circuit magnétique: partie fixe: stator, partie mobile: rotor
- " " électrique:
 - inducteur: bobines en série
 - induit: enroulement de spire autour du rotor
- dispositif de commutation: les enroulements des spires et bobines sont en 2a lames de came solidaires du rotor et usées 2a axes de courts L'ens de ces lames forme le collecteur.

représentation d'une machine:



2) Hyp: champ \vec{B} radial, il y a une ligne neutre. tq:

à gauche: $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_r$
à droite: $\vec{B} = B_0 \vec{e}_r$



- un conducteur actif se déplace de cet entrefer à cause de lignes de champ mag d'o
- siège d'une force électromotrice d'induct
- force de Laplace

Cas d'une machine à 2 conducteurs actifs = dispositif balais - collecteur est un redresseur méca.

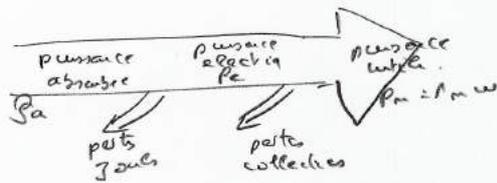
CP 20
②

3) $\text{Re}P_{\text{at}}^{\circ}$ pour une machine à courant \bar{G}°

$$\Gamma = R \Phi i$$

modos de fonctionnement: $UI = \Gamma \omega > 0$: moteur
 $UI = \Gamma \omega < 0$: génératrice.
 $\Gamma \omega = UI = 0$: fonctionnement à vide.

4) Bilan de puissance. $\eta = \frac{P_m}{P_a}$



$$P_a = U_e I_c + UI$$

$$P_m = P_m \omega$$

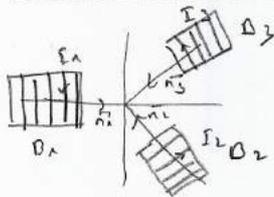
$$P_j = U_e I_c + R_i I^2$$

Pertes : effets Joules. des inducteur et induct
 pertes collectives : magnétique, et méca

$$\eta = \frac{P_m}{P_a} = \frac{UI - R I^2 - P_c}{U_e I_c + UI}$$



1) Def : champ mag \vec{B} tournant qd sa norme est conste et que sa direction tourne ds l'espace avec une est angulaire conste
 création d'un champ tournant: syst triphasé.



$$\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \vec{n}_1$$

$$\vec{B}_2 = B_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \vec{n}_2$$

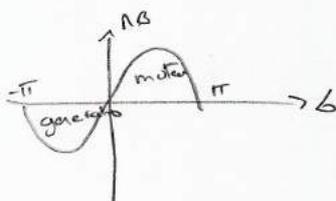
$$\vec{B}_3 = B_0 \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \vec{n}_3$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{3}{2} B_0 (\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$$

2) \rightarrow interact^o d'un champ magnétique et d'un champ tournant
 $v_{\text{rotor}} = v$ champ tournant

\rightarrow • statore: partie fixe
 • rotor: partie mobile v_{rel}° d'un \vec{n} permanent.

\rightarrow unipolaire: • ne peut démarrer seul.
 • si $\Gamma \uparrow$, & rotor décroché



3)

Statuse alternatij
 $v_{rator} < v_{chop}$ tounant

per cher
familiei coarvante
robusti

CP 24 Induction EON. X

CP

Pré-requis: Loi de Laplace, magnets

Niveau: NPSE (ou L2).

↳ Φ NPSE car ils n'ont pas un \vec{A} et V .

Biblios (S) Saug

(1) (tout en un seul prop)

(C) Cop. propa

Plan: I Cadre historig, Pairs corp

- 1) Exp de Faraday (S).
- 2) Auto exp (T).
- 3) Lois générales (T).

II Induction de Newman.

- 1) Lois de l'induction (C). x) Cas d'un circuit ϕ filiforme (S)
- 2) Inductance et auto inductance (E, S)
- 3) Etude magnétique (E, S)

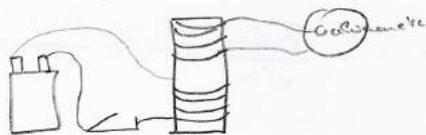
III Induction de Loraiz

- 1) Force électromotrice induite
- 2) Exp des rails de Laplace: principe des générateurs
- 3) Principe des moteurs électriques.

Info (C): ce n'est qu'une question de pt de vue pour induct° de Newman et Loraiz

I] 1)

Les lois de l'induction ont précédé les eq de Maxwell. En 1831, Faraday se demanda si un champ mag pouvait être à l'origine d'un courant électrique. Il réalisa l'exp.



Ds un 1^{er} tps, Faraday operait mesurer un courant ds le galva en action et observait le 1^{er} circuit pour créer un champ magnétique. Qd l'interrupteur est fermé, il n'y avait rien. Mais l'aiguille du galva devenait déviée et revenait à l'interrupteur.

⇒ Variat° du courant ds le 1^{er} circuit qui était à l'origine du courant ds le 2nd circuit

2) On approche ou on éloigne un aimant d'une bobine, on constate qu'un courant électrique induit apparaît et cette exp mg que le \vec{B} induit crée par la bobine parcourue par le courant induit tend à s'opposer à la variat° du champ inducteur

esp. pour une bobine fixe, champ magnétique variable Neuman
 bobine variable, champ mag permanent: Lenz
 (qu'une ? de pt de vue !)

3) Loi de Faraday: Toute variation de flux provoque l'apparition d'un e
 circuit d'une force electromotrice e tq: $e = - \frac{d\Phi}{dt}$
 cette force est perchee des e sans \oplus qui a ete choisie pour le
 courant.

Loi de Lenz: Le courant induit tend, par ses effets à s'opposer à la
 cause qui lui a donc naissance.

II) 1) Phenomene de Neuman: circuit electrique, fixe et indefinissable
 ds un champ magnetique ext variable ds le tm.

$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{P} = - \frac{d\Phi}{dt}$

Loi de Lenz:

2) Soit 2 circuits periferiques orientes \vec{S}_1 et \vec{S}_2 , on note \vec{B}_1 et \vec{B}_2 les
 champs mag vers rep par les courants i_1 et i_2 - chaque champ cree un
 un flux mag à travers chaque circuit.

Flux propre: flux mag vers par un circuit à travers lui-même.

$\Phi_{i \rightarrow j}$: " le flux à travers le circuit j du champ mag cree par le courant de i "

$\Phi_{1 \rightarrow 1} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1$ $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$

coeff d'auto inductance:

coeff d'inductance mutuelle:

$\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$

$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$

$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$

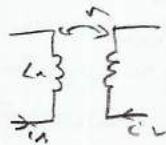
$\Phi_i = L_i i_i + M i_j$

$e_i = - \frac{d\Phi_i}{dt} = - L_i \frac{di_i}{dt} - M \frac{di_j}{dt}$

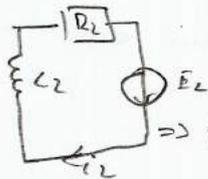
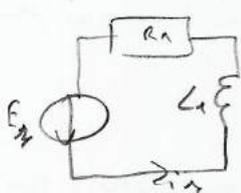
$e_1 + e_2 = R_1 i_1$

$e_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1$

Cos du couplage:



3)



⇒ pour l'equivalence du schéma (S)

$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{effet Joule}} + \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt}}_{\text{champ } \vec{B}}$

$\vec{E}_B = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$

$\Rightarrow E_B = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

$$E_p = \iiint \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d\tau$$

CP 21

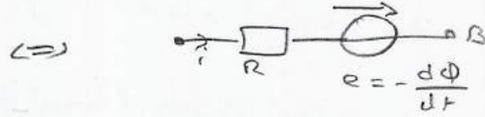
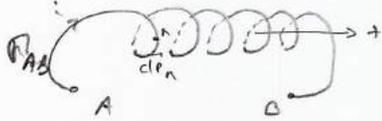
1) But: déterminer la loi d'Ohm généralisée.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad R = \frac{L}{\sigma A}$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} - \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B) - \int \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{r} = \int \vec{J} \cdot \vec{\sigma} \frac{dP}{\sigma} = \int \frac{i \cdot dP}{\sigma} = \frac{L i}{\sigma A} = R i$$

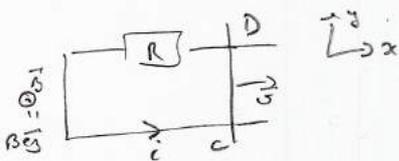
$$\Rightarrow R i = V(A) - V(B) + \int - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B) - \frac{d\Phi}{dt}$$



III

1) Champ électromoteur: $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$
 Force électromotrice: $e_{AB} = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{r}$

2) Rails de Laplace:



$$\begin{aligned} e &= \int \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} \\ &= \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} \\ &= \int -v B \vec{y} \cdot dy \vec{y} \\ &= -v B a \end{aligned}$$

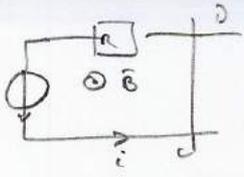
$$\Rightarrow R \pm R i \Rightarrow i = - \frac{v B a}{R}$$

• $\underline{E \cdot n}$:
 Synt: { rail }
 Ref: Galilée
 Forces: Poids,
 Laplace:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int i d\vec{r} \wedge \vec{B} = \int i dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z \\ &= \int i B \vec{e}_x dy = \int_0^a - \frac{v B^2 a}{R} dy \vec{e}_x \\ &= - \frac{v B^2 a^2}{R} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{éq}} &= \frac{P_{\text{éq}}}{F_{\text{éq}}} \cdot \vec{v} = - \frac{v^2 B^2 a^2}{R} \\ \mathcal{P}_e &= e \cdot i = \frac{e^2}{R} = \frac{v^2 B^2 a^2}{R} \end{aligned} \right\} \underline{\mathcal{P}_{\text{Lap}} = \mathcal{P}_e}$$

3)


 $\vec{v} \rightarrow \omega$

$$- \underline{E \cdot \vec{v}} \quad e = -vBl$$

$$- \underline{Ri} \Rightarrow E + e = Ri$$

$$\Rightarrow E - vBl = Ri$$

$$- \underline{E \cdot \vec{v}} \quad \vec{F} = iBl \vec{e}$$

$$\text{PFD: } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{J} + \vec{R} + \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = iBl$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} v = \frac{EBl}{mR} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})$$

RQ: ça peut également servir l'haul parler.

Conclusion: ouvrir sur les machines tournantes.

LP 22 ✓ Rétroaction et oscillations.

①

Niveau : PSI

Pré-requis : Filtrics, Laplace (SI, PCSE), Thermo

- Biblio :
- Electronique 2^{ème} année PSI-PSI*, H-Prepa
 - Physique toute la Un, PSI-PSI*
 - Electronique PSI, Précis-Breil.

Plan :

I Systeme bouclé

- 1) Nécessité d'un syst bouclé
- 2) Structure générale d'un syst bouclé
- 3) Influences de \neq paramètres sur le schéma bloc
- 4) Stabilité des syst bouclés

II

Oscillateur

- 1) Présentation des \neq oscillateurs
- 2) Oscillateurs quasi-sinusoidaux
- 3) Oscillateur à relaxation.

III

Intro : Cours d'introduction sur les systèmes bouclés, que les élèves étudient plus en détail en cours de sciences industrielles

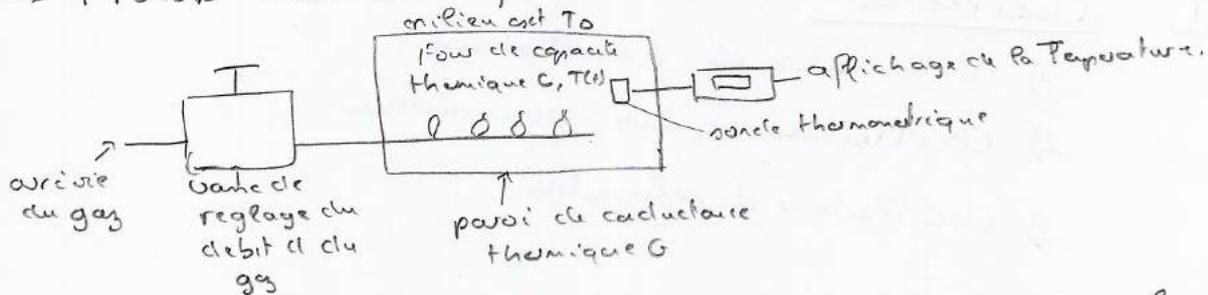
Les syst peuvent être classés en 2 catégories : les syst à en boucle ouverte qui fonctionnent en ignorant les effets de leurs act^o et les syst à boucle fermée qui considèrent ces effets pour corriger leurs comportements de manière à réaliser, aussi fidèlement que possible

Les opérateurs pour lesquels ils ont été conçus. Les syst boucles
 nt souvent utilisés de la vie de tous les jours, sans qu'on
 si aperçoive que ce st de rétroactions.
 Regardons par ex un syst boucle:

I SYSTEME BOUCLE

1) Nécessité d'un syst boucle

ex) Prenons l'ex d'un four.



• Nous avons un four de capacité thermique C , séparé par le milieu est de $^{\circ}C$ T_0 par une paroi de conductance thermique G .

La puissance thermique cédée par le four si l'est est donc
 (avec modèle linéaire) $P_{paroi} = G(T(t) - T_0)$.

• Le brûleur à gaz fournit une puissance thermique Kd proportionnelle au débit mérique d du gaz.

\Rightarrow Equat^o différentielle: $C \frac{dT}{dt} = -P_{paroi} + Kd$

$$\Leftrightarrow C \frac{dT}{dt} + GT = GT_0 + Kd$$

En posant $\theta(t) = T(t) - T_0$ et $\sigma = \frac{C}{G} \Rightarrow \sigma \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{K}{G} d$

• Ici, on dit que le pourcentage en boucle ouverte, ce qui signifie qu'il n'y a pas de rétroaction, c'est le syst régulant la grandeur d'entrée d en fct de la grandeur de sortie $\Theta(t)$. ②
22

Supposons que d soit const et qu'à $t = 0$, $T(0) = T_0$ soit $\Theta(0) = 0$

$$\Rightarrow \Theta(t) = H_0 d (1 - e^{-t/\tau})$$

Donc au bout de qq laps τ , la $^{\circ}C$ se stabilise à une valeur const = $a (H_0 d + T_0)$

Nous pouvons de régler la $^{\circ}C$ à une val choisie T_c en fixant

$$d \quad \text{tq} \quad d = \frac{T_c - T_0}{H_0}$$

• Or il n'est pas possible de régler ainsi la $^{\circ}C$ car :

→ le débit n'est réglable qu'avec une précision limitée

→ m'ni si le débit est déterminé avec précision à $t = 0$, il risque de fluctuer de le ms .

→ T_0 peut varier.

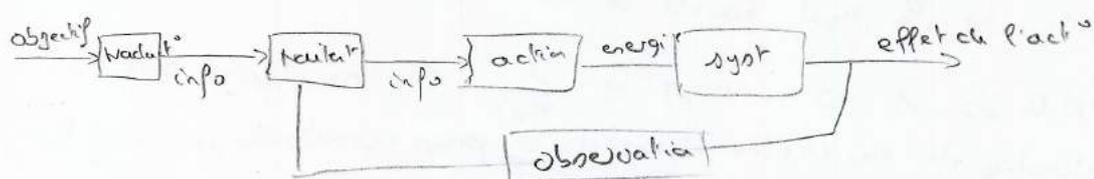
⇒ pour maintenir, à l'aise, il faut qu'on sache T_c , d'où la nécessité d'une boucle fermée.

2) Structure générale d'un syst bouclé

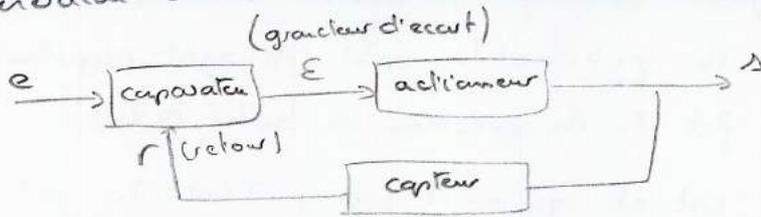
[1-1]

* DEF d'un syst bouclé: Un syst bouclé c'est un syst qui a une boucle de rétroaction qui permet au syst de constater les effets de sa action et d'adapter en consq, sans intervention ext, la commande en vue de l'obj pscé.

* Schema fonctionnel du principe des syst en boucle fermée :

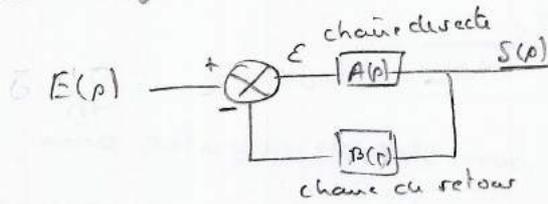


§ Plus généralement a a:



- capteur : qui transforme une grandeur y en une autre
- comparateur ou soustracteur : qui effectue la différence entre le signal d'entrée e et la valeur réglée r et fournit l'erreur.
- actionneur : qui est le syst de commande muni de correcteurs qui agit sur E pour donner le signal s .

ou encore :



d'où $S(p) = A(p) E = A(p) \{ E(p) - S(p) B(p) \}$

$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A}{1 + AB} = \underline{\text{fonction de transfert}}$

[H]

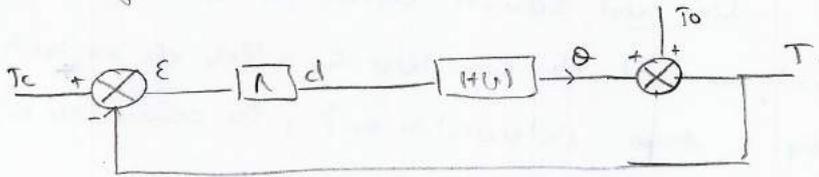
• De notre cas :

* $H(p) = \frac{O(p)}{D(p)} = \frac{H_0}{1 + Gp}$

* $T = T_0 + \theta$

* $d = R(T_c - T(t))$ ou $d = R(\theta_c - \theta(t))$. réaction locale. et le bit ne peut pas

Ces 3 opérat^o sont décrites par le schéma fractionnel: \odot



• RO : * $\frac{S'(p)}{E(p)} = \frac{AB}{1 + AB} = BF = \frac{B_0}{1 + B_0}$

→ Si $B(p) = 1$; la grandeur de sortie est entièrement soumise à l'entrée \Rightarrow le syst bouclé est dit à retour unitaire.

De la suite \Rightarrow Si $AB \gg 1 \Rightarrow H(p) \approx \frac{1}{B(p)}$ (= ne dépend que des caractéristiques de la chaîne de retour = prop importantes pour stabiliser le gain du syst.)

[5]

3) Influences des paramètres dus au blocage③
22

Primas $S(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} E(p)$

a) Influence des variat° de la chaîne directe

Différentiels (1) avec E et B cts :

$$\frac{\Delta S(p)}{S(p)} = \frac{\Delta A(p)}{A(p)} - \frac{B(p) \Delta A}{1 + BA} = \frac{1}{1 + BA} \frac{\Delta A}{A}$$

Si $|BA| \gg 1 \Rightarrow$ les variations de $A(p)$ ont sans effet sur la grandeur commandée $S(p)$.

b) Influence des variat° de la chaîne de retour

Différentiels (1) avec E et A cts :

$$\frac{\Delta S}{S} = - \frac{A \Delta B}{1 + AB} = - \frac{A B}{1 + AB} \frac{\Delta B}{B}$$

S est très sensible aux variat° de B et si $AB \gg 1$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = - \frac{\Delta B}{B}$$

\Rightarrow La grandeur de sortie est très sensible aux variat° de la chaîne de retour :

c) Stabilité des syst bouclés relation encadrée stabilisée

Primas $H(p) = A \sum_i \frac{1}{p - p_i} \Rightarrow \Delta(t) = A \sum_i e^{p_i t} = A \sum_i e^{a_i t} e^{i b_i t}$
avec $p_i = a_i + i b_i$

Or si $\exists a_i > 0 \Rightarrow$ instable

\rightarrow stabilité \Leftrightarrow partie réelle des pôles < 0 .

Generalisat° : $a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = b_0 e + b_1 \frac{de}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}$

th Laplace

$$a_0 S(p) + \dots + a_n p^n S(p) = b_0 E(p) + \dots + b_m E(p) p^m$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \text{avec } m < n.$$

Ainsi pour avoir stabilité, les zéros de $D(s)$ doivent être à partie réelle négative :

$$D(s) = a_n (s - p_1) (s - p_2) \dots (s - p_n)$$

$$\forall i \quad \text{Re}(p_i) < 0$$

Par conséquent, un syst est stable si les parties réelles des zéros du Dénominateur sont négatives.

Pourtant les instabilités servent à créer des oscillateurs, c'est ce que nous allons voir maintenant.

II OSCILLATEURS

1) Présentation des oscillateurs

ESS Un oscillateur électrique est un syst qui délivre un signal périodique. La générat° des oscillat° peut être provoquée volontairement (cas des générateurs de signaux) ou accidentelle (cas d'un syst instable dû à une mauvaise chose de paramètres).

Il y a des oscillateurs (quasi sinusoidaux, à relâchement) qui ont en commun 2 caractéristiques.

→ ils nécessitent une alimentat° qui délivre l'énergie permettant de compenser les pertes.

→ l'amplitude des oscillat° est réglée par des phénomènes non linéaires

2) Oscillateurs quasi-sinusoidaux

a) Ex du microphone

[H] Illustrons la not° d'oscillateur à react° par un ex.

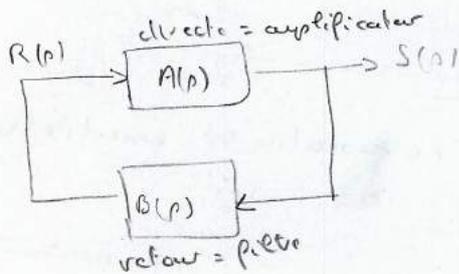
Lorsqu'un microphone est placé au voisinage d'une enceinte acoustique, un sifflement est émis (= effet Larsen). Analyse

ce phénomène. L'enceinte en lui-même, qui est filtrée, est atténuée et déformée; lors de sa propagation de l'air et lors de sa conversion en tension par le microphone. Le signal obtenu par ce dernier est amplifié, puis appliqué à nouveau à l'enceinte. Le système est ainsi en boucle et la chaîne acoustique fonctionne en oscillateur à réaction.



b) Structure

- Un oscillateur à réaction s'analyse en :
 - une chaîne d'action constituée d'amplificateurs.
 - une chaîne de retour constituée d'un filtre.

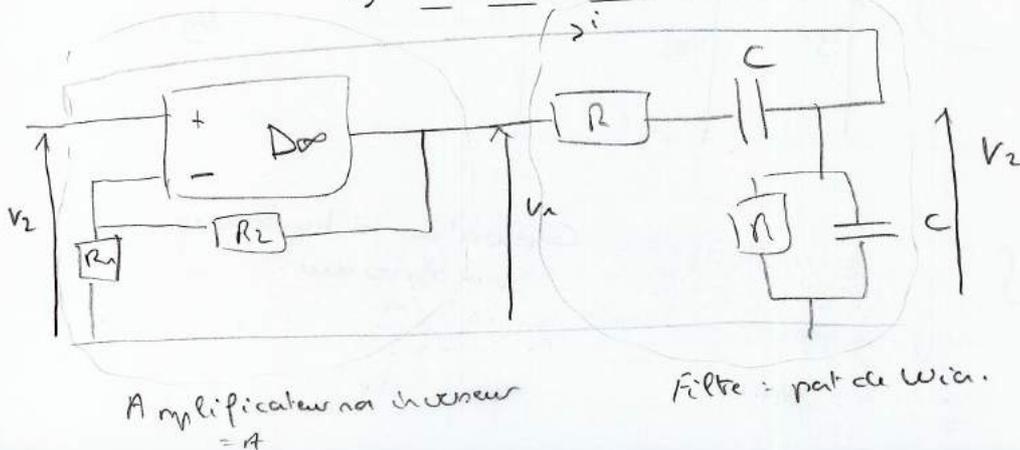


- $S(p) = A(p) R(p)$
 et $R(p) = B(p) S(p)$ } $A(p) B(p) = 1$ (permet de réaliser un oscillateur).

Si on est en régime harmonique : $A(j\omega) \cdot B(j\omega) = 1$
 d'où $|A B| = 1$ et $\arg(A B) = 0$

(conditions de Barkhausen).

c) L'oscillateur à PT de Wien.



$$A = \frac{V_1}{V_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$B = \frac{V_2}{V_3} = \frac{Z_{RC11}}{2Z_{RC212} + Z_{RC11}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{j\omega RC}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R}{1 + j\omega RC}} = \frac{j\omega RC}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3j\omega RC}$$

Conditions d'oscillation : $\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{j\omega RC}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3j\omega RC} = 1$

Arg AB = 0 impose $1 - R^2 C^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$ condition de fréquence

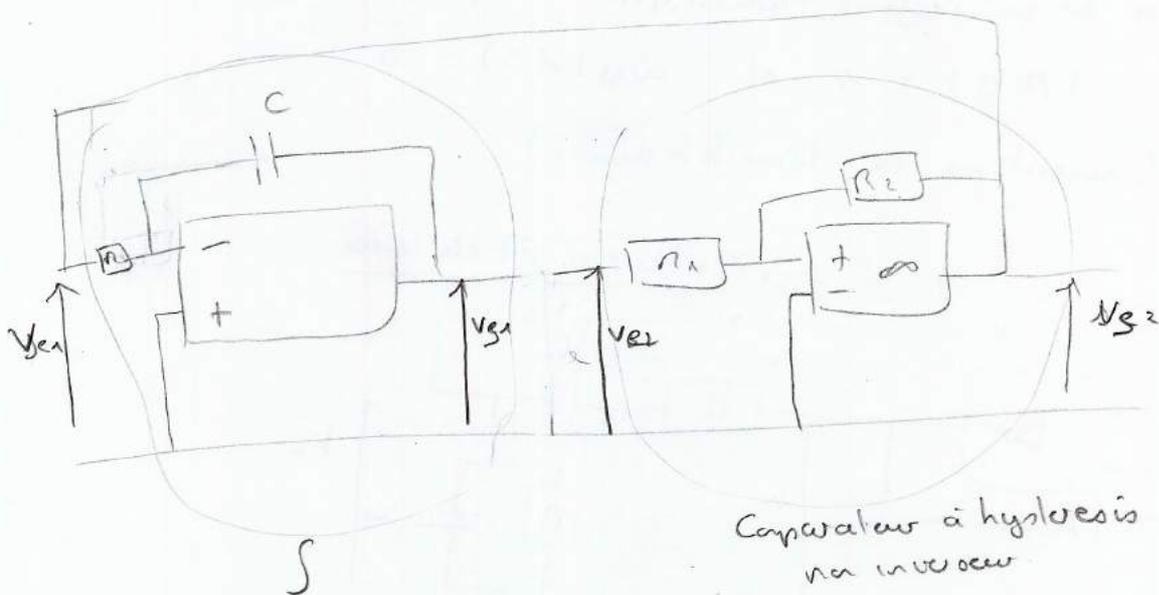
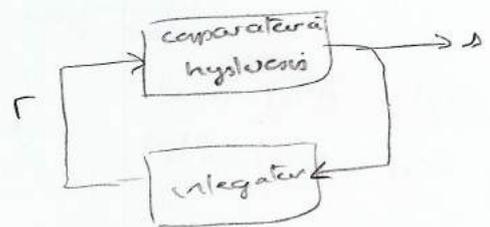
|AB| = 1 impose : $1 + \frac{R_2}{R_1} = 3 \Rightarrow R_2 = 2R_1$ condition d'amplification
 (si $1 + \frac{R_2}{R_1} > 3 \Rightarrow A_0 > 3$ "oscillat" amplement si $A_0 > 3$ que si $A_0 = 3$ si A proche de 3.)

3) Oscillation à relaxation

Un oscillateur électronique à relaxation est essentiellement

composé de 2 blocs :

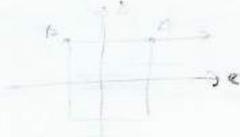
- un comparateur à hysteresis
- un integrateur



Comparateur à hysteresis non inverseur

(D)

Caractéristiques



Le fonctionnement est le suivant.

22

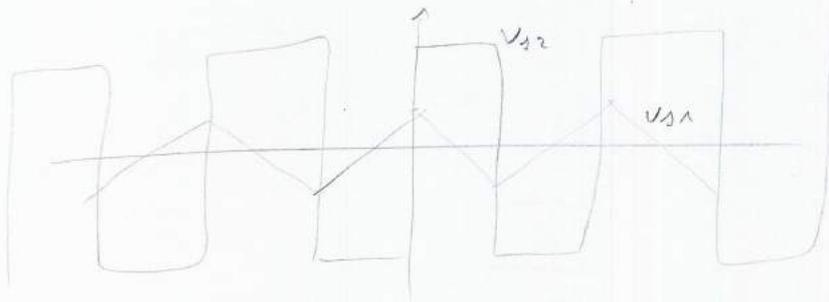
Le comparateur étant à saturation \oplus , $v_{e1} = v_{s2} = +V_{sat}$, la tension de sortie du e^{-} \rightarrow linéairement au cours du temps à la vitesse $-\frac{V_{sat}}{RC}$. Cette tension étant aussi la tension d'entrée du comparateur ($v_{e2} = v_{s1}$), celle-ci s'achève quand elle atteint le seuil $-V_0$. Il y a alors basculement du comparateur à saturation \ominus $\rightarrow v_{s2} = -V_{sat}$, la tension $v_{s1} = v_{s2}$ est alors \uparrow à la vitesse $+\frac{V_{sat}}{RC}$ jusqu'au seuil $+V_0$, d'où un new basculement...

Finalement se succèdent des phases où lesquelles $v_{s2} = +V_{sat}$ $v_{e2} \rightarrow$ de $+V_0$ à $-V_0$ et $v_{s2} = -V_{sat}$, $v_{e2} \uparrow$ de $-V_0$ à $+V_0$. Les durées de ces \uparrow , notées T_+ et T_- sont $= a$.

$$T_+ = T_- = \frac{2V_0}{V_{sat}} RC.$$

Le signal $v_{s2}(t)$ est rectangulaire de grand cycle unitaire, le signal $v_{s1}(t)$ est triangulaire, leur période commune

$$T \text{ est: } T = T_+ + T_- = \frac{4V_0}{V_{sat}} RC$$



Rajout:

Equat^o diff du syst bouclé:

Le syst bouclé étudié est un syst à 2 entrées : T_0 (cavante est) et T_c ($^{\circ}\text{C}$ de consigne) et une sortie T ($^{\circ}\text{C}$ int du four).

Le schéma fonctionnel permet d'écrire E.D reliant T à T_0 et T_c .

$$G \frac{dT}{dt} + (1 + H_0 R) T = H_0 R T_c - \bar{G} \frac{dT_0}{dt} - T_0.$$

→ regime libre = regime transitoire de cste de ps $\bar{G}' = \frac{\bar{G}}{1 + H_0 R}$.

→ regime permanent $(1 + H_0 R) T_p = H_0 R T_c - T_0$

$$\rightarrow T_p = \frac{H_0 R}{1 + H_0 R} T_c - \frac{1}{1 + H_0 R} T_0.$$

RQ:

* erreur statique $E_s = T_c - T$ ne s'annule pas.

+ Si $H_0 R \gg 1$, $T_{\text{per}} \approx \left(1 - \frac{1}{H_0 R}\right) T_c - \frac{1}{H_0 R} T_0$.

$(T_c - T) = E_s = \frac{T_c - T_0}{H_0 R}$ est d'autant \odot faible que $H_0 R$ est grand

* Si $H_0 R$ est suffisamment grand, alors $T_{\text{per}} \approx T_c$

Cette val devient presque insensible aux fluctuat^o de la $^{\circ}\text{C}$ ext T_0 et aux fluctuat^o du coeff R .

Les défauts du syst en BO s' corrigent par la boucle de reboact^o

LP 23 : ✓ TRAITEMENT D'UN SIGNAL . ETUDE SPECTRALE

(1)

Niveau : PSI

Biblio : Electronique (Gannoulli, Esquieu)

- Pré-requis :
- ALI (= AOP)
 - notations \mathbb{C}
 - équations différentielles
 - portes logiques (SI)

Electronique PSI (BriaP)
CAP Prepa PSI.

Plan : I Etude spectrale d'un signal électrique

- 1) Signal périodique
- 2) Généralisation pour un signal qq

II Traitement linéaire : Filtrage d'un signal

- 1) Linéarité
- 2) Fct de transfert - diagramme de Bode
- 3) Cas du RC
- 4) Autres ex de filtres

III La modulation d'amplitude non linéaire

- 1) Problématique Wasselot de spectre (moyennage = filtrage)
- 2) Modulation d'amplitude
- 3) Demodulation par détection synchrone

Dire à into qu'on fait que de l'analogie

mais qu'il y a des traitements des signaux numériques

général^o d'harmoniques sinusoï $\xrightarrow{\text{filtre}}$ non linéaire \rightarrow analogique \rightarrow Produit multiple
product²
= multiplication en optique
laser rouge \rightarrow laser bleu

Intro: Signal = grandeur f calculant de l'information et évoluant généralement au cours du tm.

Il faut différencier signaux \mathbb{R}^0 ou signaux discrets (numériques),
(analogiques)

BUT: regarder les signaux et comment les modifier et quoi ça apporte.
tm \leftrightarrow fréquence.

I ETUDE SPECTRALE D'UN SIGNAL ELECTRIQUE

1) Signal périodique

Soit $s(t)$ un signal périodique, \mathbb{R}^0 , unique.
Alors d'après le Th de Fourier, le signal peut être décomposé en une somme de signaux sinusoides (= série de Fourier) tq:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

avec: $a_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} s(t) \cos(n\omega t) dt$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} s(t) \sin(n\omega t) dt.$$

RQ: • $n=0$ $\langle s \rangle = \frac{a_0}{2}$ (moyenne) : composante \mathbb{R}^0 du signal
• $n=1$ Fondamental (1^{er} harmonique)
• $n \geq 2$ harmonique

• Pour un signal pair: $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0$
impair: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$

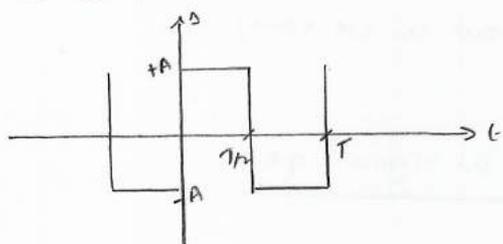
F Décomposer un signal périodique en série de Fourier cosinus (2)
 l'analyse harmonique ou analyse spectrale du signal. L'ensemble des coeff a_n et b_n constitue le spectre de Fourier

Or les grandeurs mesurables en physique sont l'amplitude et la phase du signal, et on peut recréer la décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ par:

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

avec $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$

Regardons la décomposition d'un signal en créneau



• $s(t)$: impair $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} a_n = 0$

• $b_n = \frac{2}{T} \int_{T/2}^T s(t) \sin n\omega t dt$

$$= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \sin n\omega t dt - \int_{T/2}^T A \sin n\omega t dt \right)$$

$$= \frac{2}{T} \left[-\frac{A}{n\omega} \cos n\omega t \right]_0^{T/2} + \left[\frac{A}{n\omega} \cos n\omega t \right]_{T/2}^T$$

$$= \frac{2A}{n\omega T} \left(-\cos n\omega \frac{T}{2} + 1 + \frac{A}{n\omega} \cos n\omega T, -\cos n\omega \frac{T}{2} \right)$$

$$= \frac{4A}{n 2\pi} \left(1 - (-1)^n \right)$$

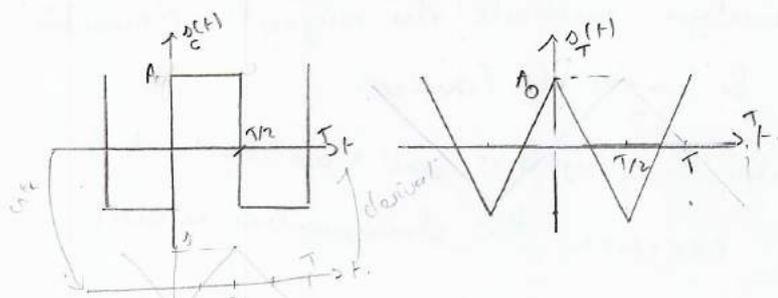
$\begin{cases} n \text{ pair} & 0 \\ n \text{ impair} & \frac{4A}{(2k+1)\pi} \end{cases}$

d'où $s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$

Conclusion: • pour un signal carré, on va avoir des harmoniques impaires dont l'amplitude va \rightarrow en $\frac{4A}{\pi(2k+1)}$

\Rightarrow vérification avec l'exp.

Decomposition d'un signal en triangle



On voit que l'intégration d'un signal créneau de période T et d'amplitude A est un signal triangulaire d'amplitude $A_0 = +\frac{A T}{4}$, de \tilde{m} période.

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } s_T(t) &= \int s_c(t) dt' = \int \frac{4A}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega t'}{(2p+1)} dt' \\
 &= -\frac{4A}{\pi \omega} \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2} = -\frac{4}{\pi} \frac{A_0 4T}{T 2\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2} \\
 &= -\frac{8A_0}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2} \quad (\text{CVU et } 6^\circ)
 \end{aligned}$$

Pour un triangle : \rightarrow des amplitudes en $\frac{8A_0}{\pi^2(2p+1)^2}$
 (décroissance bec \oplus importante que pour un créneau).

2) Généralisation pour un signal qq

Pour un signal qq, on peut également obtenir son spectre en spectre en fréquence par la Transformée de Fourier tq :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(p) e^{j2\pi p t} dt$$

$$S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi p t} dt$$

Ainsi pour tous signaux (périodiques ou non), on peut obtenir un spectre en fréquences.

Et à ces signaux, on peut leur appliquer des P.P.Ts, ce qui va modifier leur spectre en fréquence.

II TRAITEMENT LINEAIRE: FILTRAGE D'UN SIGNAL

3

1) Linearité



Un syst est dit linéaire lorsque la relation entre le signal d'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est une équation différentielle linéaire. avec $\sum_{R=0}^N a_R \frac{d^R s}{dt^R} = \sum_{P=0}^M b_P \frac{d^P e}{dt^P}$ (1)

2) Fonction de transfert - diagramme de Bode

Si le signal est linéaire, alors lorsqu'on envoit en entrée une sinusoïde, en sortie, on doit également voir une sinusoïde.

Prenons alors

$$\begin{cases} e(t) = E_m \cos(\omega t + \phi_e) \\ s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi_s) \end{cases}$$

en notation complexe:

$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= E_m e^{j(\omega t + \phi_e)} = \underline{E}_m e^{j\omega t} \\ \underline{s}(t) &= S_m e^{j(\omega t + \phi_s)} = \underline{S}_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

avec $s = \text{Re}(s)$

d'où dans (1) on a:

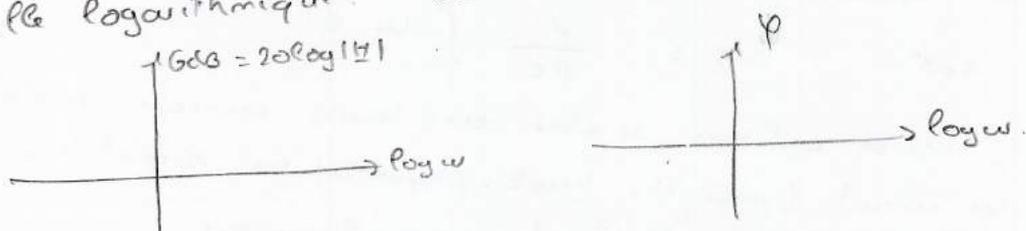
h : caractéristique linéaire du filtre.

$$\frac{\underline{S}_m}{\underline{E}_m} = \frac{\sum_{P=0}^M b_P (j\omega)^P}{\sum_{R=0}^N a_R (j\omega)^R} = \underline{H}(j\omega) \leftarrow \text{Fonction de transfert}$$

$$\underline{H}(j\omega) = G e^{j\varphi} \quad \text{avec } G: \text{gain du système } (= |\underline{H}|)$$

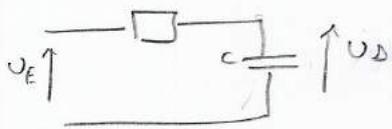
$$\varphi: \text{phase du système } (= \arg(\underline{H}))$$

Or quand un syst possède une large plage d'utilisation en fréquence, l'étude de $|\underline{H}|$ et $\arg(\underline{H})$ est souvent mal adaptée car elle favorise un certain nb de données en pulsation; d'où l'utilisation de l'échelle logarithmique. avec



3) Cas du RC : passe bas d'ordre 1

* Etudions le circuit:

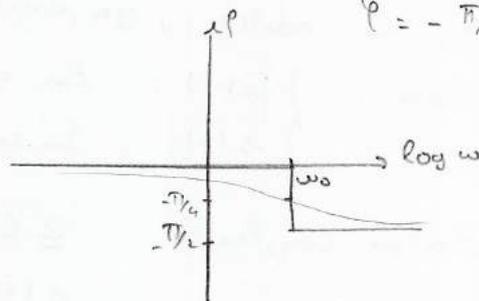
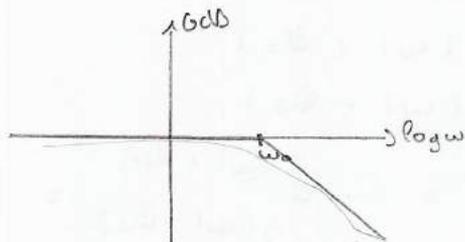


(Diviseur de tension): $\underline{U}_s = \underline{U}_e \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R}$
 d'où $\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

ω_0 : fréquence de coupure

* Diagramme de Bode : Regardons le comportement asymptotique:

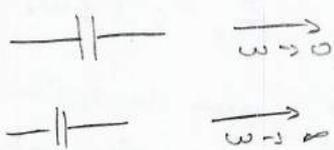
- Si $\omega_0 \gg \omega$, $\underline{H} \approx 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$
 $\varphi = 0$
- Si $\omega_0 \ll \omega$, $\underline{H} \approx \frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow G_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$
 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
- Si $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\varphi = -\pi/4$



Le circuit est un petit passe bas d'ordre 1.

RO: La nature du pôle/zéro aurait pu être déterminée directement en regardant le comportement limite des dipôles du circuit pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

En effet:



d'où $\underline{U}_s = \underline{U}_e$

d'où $\underline{U}_s = 0$

* Regardons le caractère intégrateur du circuit

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \underline{U}_s (1 + jRC\omega) = \underline{U}_e$$

Donc si $RC\omega \gg 1$ alors $j\underline{U}_s RC\omega = \underline{U}_e$ d'où $RC \frac{dU_s}{dt} = U_e$

soit $U_s = \frac{1}{RC} \int U_e dt$

Ainsi, si on applique en entrée une tension continue, on doit se Pa
 sortie du circuit (pour des hautes fréquences) un signal triangulaire.
 (Le signal se déforme). Vérification par l'expérience

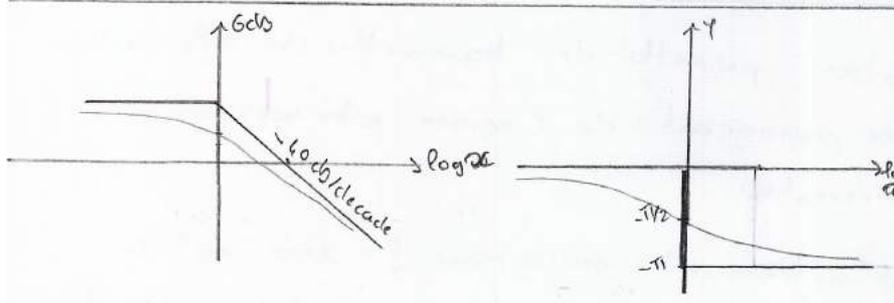
a) Autres exemples de filtres

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(4)

Passer bas d'ordre 2:

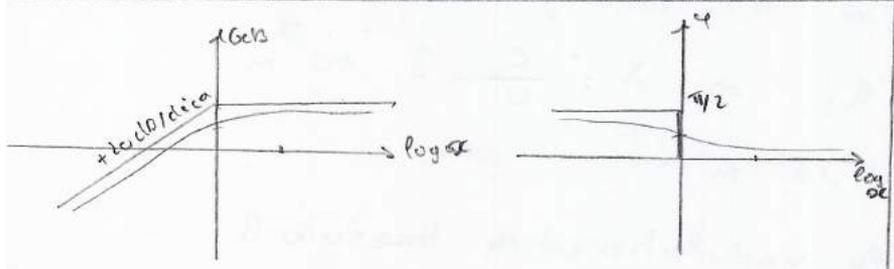
$$H = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$



Pour:
 $\omega \ll \omega_0$: signal transmis avec peu de déformation
 $\omega \gg \omega_0$: signal déformé
 - Filtrage plus net que celui du 1^{er} ordre.

Passer Haut d'ordre 1:

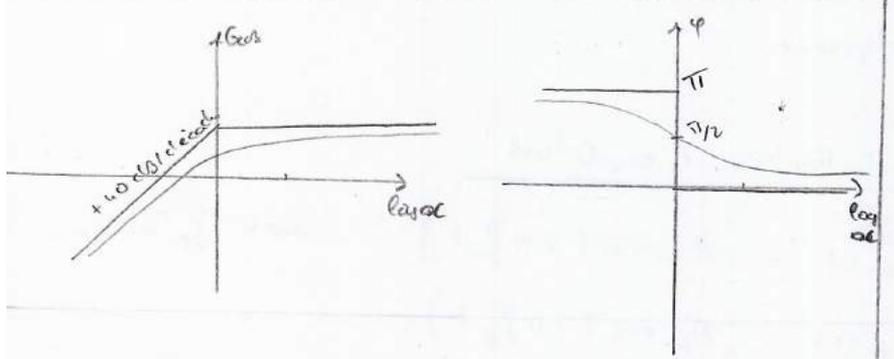
$$H = \frac{H_0}{1 + jx}$$



Pour
 $\omega \ll \omega_0$: signal coupé / atténué
 $\omega \gg \omega_0$: signal passant
 Caractère dérivateur pour les basses fréquences

Passer Haut d'ordre 2

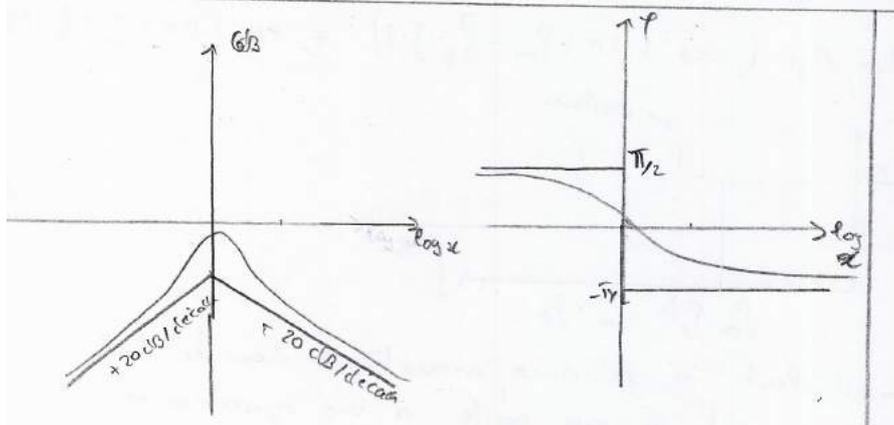
$$H = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$



Pour:
 $\omega \gg \omega_0$: signal passant sans atténuation voir coupé
 Filtrage net que celui du 1^{er} ordre

Passer bande d'ordre 2

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$$



Le filtrage passe bande permet que les harmoniques proches de la fréquence prévue de filtrage.

III LA MODULATION D'AMPLITUDE

1) Problématique

Les syst de communication permettent de transmettre des informations à l'aide d'un signal se propageant ds l'espace entre une antenne d'émission et une antenne de réception.

Supposons que le signal à transmettre aura pour $f = 100 \cdot 10^6 \text{ Hz}$.
on aura: $\lambda = 3 \text{ m}$, d'où Longueur antenne = $\frac{\lambda}{4} = 75 \text{ cm}$

\Rightarrow donc un signal à HF sera facilement transmissible.

Par contre si $f = 40 \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 3 \cdot 10^7 \text{ m}$
soit $L_{\text{antenne}} = 75 \cdot 10^5 \text{ m} !!$

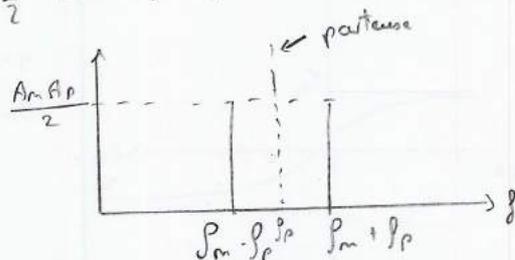
Donc le but de la modulation est de transporter le spectre d'un signal B.F vers les H.F pour pouvoir le transmettre facilement par voie hertzienne.

2) Modulation d'amplitude

• signal modulant: $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ avec $f_p \gg f_m$.
• signal porteur: $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$.

$$\begin{aligned} \text{d'où } s(t) &= m(t) \cdot p(t) = A_m A_p \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t) \\ &= \frac{1}{2} A_m A_p (\cos(2\pi (f_m - f_p) t) + \cos(2\pi (f_m + f_p) t)) \end{aligned}$$

• Etude spectrale



Ainsi le signal modulant se retrouve maintenant dans les H.F.
L'opération de modulation consiste en qq sorte à une opération de chgt de bande de fréquence

3) Demodulation par détection synchrone

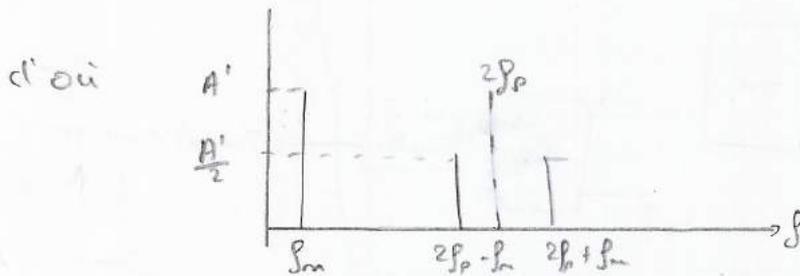
(5)

Le but de la demodulation est d'extraire le signal de BF

La demodulation synchrone consiste à multiplier le signal $s(t)$ par un signal de même fréquence et même phase que celui de la porteuse.

$$p'(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \phi) \quad \text{Prendre } \phi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } s'(t) &= p'(t) \cdot s(t) \\ &= A \cos^2(2\pi f_p t) \cos(2\pi f_m t) \\ &= A' (\cos(4\pi f_p t) + 1) (\cos 2\pi f_m t) \\ &= A' \left(\cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{2} (\cos(2\pi(2f_p - f_m)t) \right. \\ &\quad \left. + \cos(2\pi(2f_p + f_m)t) \right) \end{aligned}$$



Ainsi en effectuant un filtre PB on peut récupérer notre signal

IV TRAITEMENT DU SIGNAL NUMERIQUE

1) Pourquoi regarder les signaux numériques ?

Les signaux naturels sont analogiques (ie qu'ils varient de manière ∞ dans le temps). Mais le syst numérique (varie de manière discret) permet de concevoir des syst de traitement de l'information

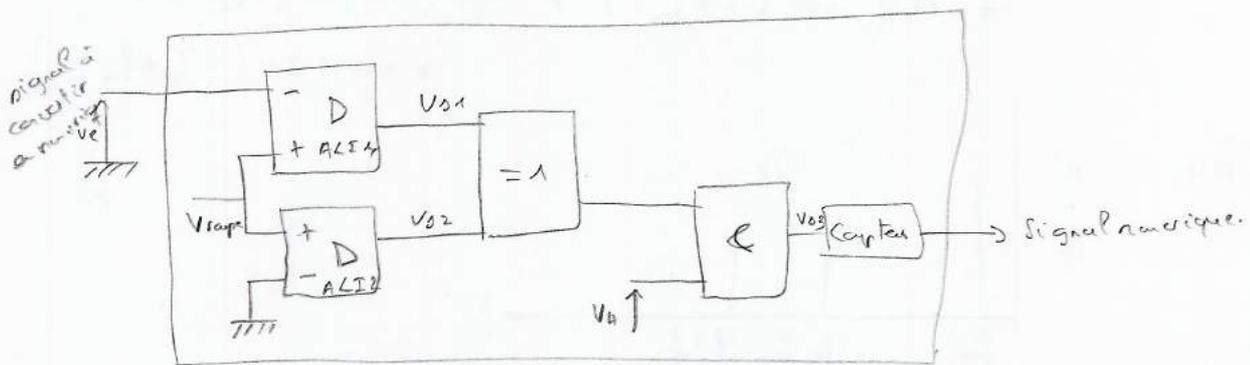
bits \odot mais de manière simple.

Donc le but est de transformer un signal analogique en un signal numérique, en utilisant un Convertisseur analogique-numérique. Ce CAN comprend 2 actions :

- l'échantillonnage qui transforme le signal à support G° en un signal à support discret
- la quantification qui remplace les valeurs G° par des valeurs discrètes

Regardons maintenant le CAN simple rampe

2) CAN simple rampe



- V_{ramp} est une rampe de tension (valeur max V_{max}) générée par le CAN.
- V_h est une tension créneau de fréquence f_H (fréquence d'horloge) générée par le CAN.

* Aux niveaux des ALI, il n'y a pas de rétroaction négative, donc V_{d1} et V_{d2} ne peuvent prendre que 2 valeurs chacune.

ALI₂ Lorsque $V_{ramp} > 0V \Rightarrow V_{d2} = +V_{sat} \equiv 1$.

$V_{ramp} < 0V \Rightarrow V_{d2} \equiv 0$

ALI₁ Lorsque $V_{ramp} > V_e \Rightarrow V_{d1} \equiv 1$.

$V_{ramp} < V_e \Rightarrow V_{d1} \equiv 0$

On va regarder que le cas où $V_{rappe} > 0$ soit $V_{s2} \equiv 1$.

(6)

• Au niveau de la porte "ou exclusif"

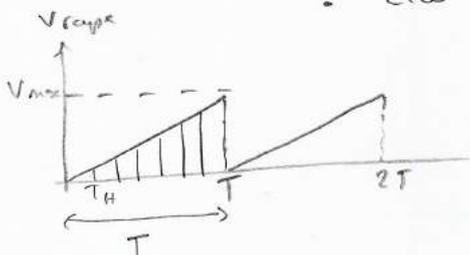
$V_{s1} \equiv 1$	$V_{s2} \equiv 1$	$V_{s2} \equiv 0$
$V_{s2} \equiv 1$	0	1

• Au niveau de la porte "Et" :
 Si $V_{rappe} > V_e$, $V_{s3} \equiv 0$
 Si $V_{rappe} < V_e$, $V_{s3} \equiv V_H$.

Ainsi si $V_{rappe} \in [0, V_e]$, la sortie de la porte "Et" vaut V_H .
 Le compteur compte le nb de signaux de l'horloge reçu ($V_H \equiv 1$)
 tant que $V_{rappe} < V_e$.

* Regardas maintenant quel est le nb d'impulsions comptées pour une tension V_E donnée ?

- Paramètres :
- tension max d'entrée : V_e
 - fréquence d'horloge f_H = période T_H .
 - durée de la rampe T (de 0 à V_{max}).



→ $T = n T_H \Rightarrow n = \frac{T}{T_H}$ pour $V_e = V_{max}$.
 → pour $V_{rappe} < V_e$, $V_{s3} \equiv V_H$ mais au delà de V_e , l'horloge ne compte plus
 d'où $V_e = \frac{4}{7} V_{max}$ soit $n = \frac{T}{T_H} \frac{V_e}{V_{max}}$

→ résolution = $\frac{V_{max}}{n} = \frac{V_{max}}{T} T_H$
 → fréquence d'échantillonnage = $\frac{1}{T}$.

Ainsi le traitement numérique présente qq avantages par rapport au signal analogique :

- immunité au bruit : signal codé numérique n'est pas brouillé lors de sa lecture.
- souplesse : il est facilement ajustable en cours de pch.
- renouvelé : mettre le signal à nouveau

Mais ces avantages sont tempérés par qq limites :

- La numérisation en elle-même peut dégrader le signal, d'ici peut émaner une quantification ou d'un échantillonnage insuffisant.
- Le traitement numérique est nécessairement \oplus lent, \oplus consommateur et \oplus gourmand en ressources matérielles que l'approche analogique.

CP 24 ONDES PROGRESSIVES, ONDES STATIONNAIRES

①
26

Biblio : - Sang - Physique des ondes, Stéphane Olivier
- Hachette - Ondes rec. d'éluc.

Plan : I Esc de phénomènes de propagation
1) Ondes ds un câble coaxial
2) Ondes sur une corde vibrante
3) Ondes acoustiq ds les fluides

II Ondes progressives

1) Sol générale de D'Alembert

2) Cas d'une onde progressive harmonique

(3) Transp. d'énergie) (N'oubliez pas l'atténuation $\propto e^{-\alpha x}$)

3) Somme de 2 ondes progressives progressives est une onde stationnaire

III Ondes stationnaires

1) Equat^o de D'Alembert

2) CL.

I Esc de phénomènes de propagation

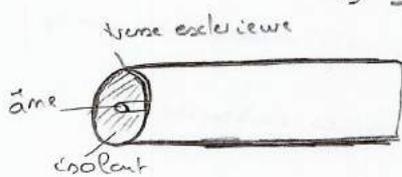
1) Corde vibrante

2) Auto osc avec un tableau pour les variables conjuguées

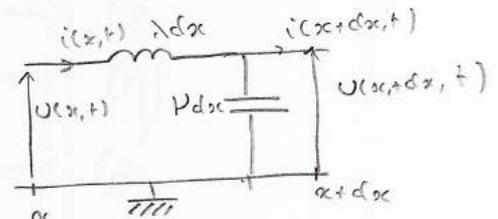
Intro : Excp d'une corde d'escalade

I EX DE PHENOMENES DE PROPAGATION

1) Ondes ds un câble coaxial



âme = est un cyl conducteur
 tresse = tresse de fils de cuivre, et est
 reliée à la masse du réseau.



λdx : inductance, λ inductance linéique
 μdx : capacité ; μ : capacité linéique

Loi des mailles : $U(x,t) = \lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + U(x+dx,t)$

$$\Leftrightarrow - \frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

Loi des nœuds : $i(x,t) = i(x+dx,t) + \mu dx \frac{\partial U}{\partial t}$

$$\Leftrightarrow - \frac{\partial i}{\partial x} = \mu \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2)$$

Decouplage : $\frac{\partial}{\partial x}$ (1) et $\frac{\partial}{\partial t}$ (2) donnent : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lambda \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \lambda \mu \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$

d'où $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ avec $\rho = U$ ou i

Dimension de $\frac{1}{\lambda \mu}$: $[\lambda] = H \cdot m^{-1}$ $[\mu] = F \cdot m^{-1}$

$$\Rightarrow [\lambda][\mu] = H \cdot F \cdot m^{-2} = s^2 m^{-2}$$

D'où on peut poser : $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \mu}}$ (ça a bien une unité)

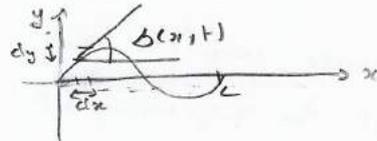
Ainsi $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ c'est ce qu'on appelle l'équation de D'Alembert

(2)
24

2) Ondes sur une corde vibrante

Système : corde de section carrée, de largeur l , de masse linéique μ .

Hyp : corde inextensible. Chacun de ses pts gardes la même abscisse. On note $y(x, t)$ le déplacement du pt et abscisse x à l'instant t .

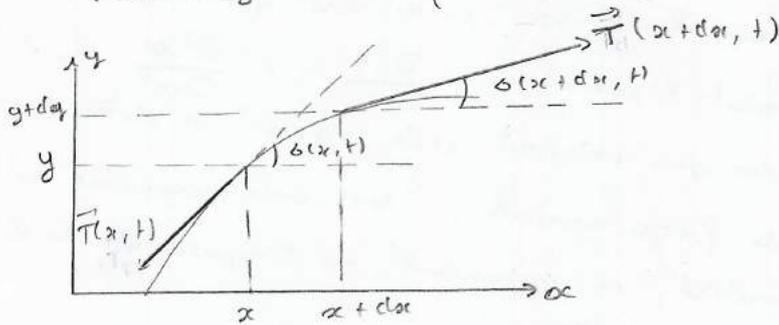


- $|\delta(x, t)| \ll l$ de DL $\sin \delta \approx \delta$, $\tan \delta \approx \delta$, $\cos \delta \approx 1$.
- mot purement transversal

Csq : $dy = y(x+dx, t) - y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} dx$
 or $\tan \delta = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$ et $|\delta(x, t)| \ll l$
 Donc $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$.

• $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \approx dx$.

Mise en équation :



P.R.C. $\mu dx \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) + \vec{T}(x, t)$

projectia $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } \vec{e}_x : 0 = T(x+dx, t) \cos \delta(x+dx, t) - T(x) \cos \delta(x) \\ \vec{e}_y : \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx) \sin \delta(x+dx) - T(x) \sin \delta(x) \end{array} \right.$

DL $\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x : 0 = T(x+dx) - T(x) \\ \vec{e}_y : \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx) \delta(x+dx) - T(x) \delta(x) \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial T}{\partial x} dx \Rightarrow \text{tension uniforme et ne dépend de que des pts T(t)} \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T \delta}{\partial x} dx \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} dx$

Mais $\Delta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

$T(t) = T_0 + T_1(t)$ avec $T_0 \gg T_1(t)$.

$T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (T_0 + T_1(t)) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T_0 \left(1 + \frac{T_1}{T_0}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

D'où $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ avec $\frac{T_0}{\mu}$ homogène à une vitesse au carré.

3) Ondes acoustiques dans le fluide

Les grandeurs couples sont le déplacement d'une particule de fluide (noté u) et la surpression (p). Là encore, à ce stade, on suppose que les hypothèses de départ impliquent un traitement simplifié (à l'axe x) du pb.

On peut écrire $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ ou $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} = 0$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$ ρ_0 : masse volumique du fluide au repos.
 χ_0 : sa coefficient de compressibilité.

Conclusion: Dans un 3^{es}, on a vu que les axes, de deux domaines, vérifiaient l'équation $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$, dite de D'Alembert.

Ces axes qui vérifient cette équation sont dites progressives.
 Dac de façon générale, "une onde progressive est une évolution réversible et alternante, se propageant ds l'espace et ds le tm, des prop φ locaux du milieu."

Regardons now quelle est la forme de la solution général de l'équation de D'Alembert.

II ONDES PROGRESSIVES

1) Solution générale de l'équation de D'Alembert

Eq d'onde à 1D: $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t}\right) = 0$

D'où l'idée du chgt de variables:

$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$

Donc $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v}$ 21 (3)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \frac{2 \partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

$$\bullet \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) = c \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) (-c) + c \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) (c)$$

$$= +c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

Donc $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

$$\Leftrightarrow c \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial s}{\partial v} = \text{const}(u)$$

Ainsi $s = f(u) + g(v) = f(x-ct) + g(x+ct)$.

Interprétation (Sans) : Ici s dépend que d'un paramètre d'espace. on appelle donc une onde plane.

Prends maintenant que s_p :

$$s_p(x, t) = f(x-ct) = f\left(x + \frac{p}{c} - c\left(t + \frac{p}{c}\right)\right) = s_p\left(x + \frac{p}{c} + t + \frac{p}{c}\right)$$

$$\text{Et } s_p(x, t) = f(x-ct) = f\left(0 - c\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = s\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Ainsi ce qui se passe en x à l'instant t , se reproduit exactement en $x + p$ à l'instant $t + \frac{p}{c}$: il y a de propagation du signal à la vitesse c , de la vers positif de l'axe Ox .

Et une onde qui se propage est dite progressive.

Conclusion : Une onde de la forme $s(x, t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ est la superposition de 2 ondes se propageant en sens inverse à la vitesse c . Et $f(x-ct)$ et $g(x+ct)$ sont 2 ondes planes progressives.

2) Cas d'une onde progressive harmonique

Reprenons le cas où l'onde se propage suivant les $x \uparrow$, de manière sinusoidale

$$\text{I.e. } s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$$

s est solution de l'équation de D'Alembert

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow -h^2 s + \frac{\omega^2}{c^2} s = 0$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\omega}{c} \quad \text{relation de dispersion}$$

$$s = s_0 \cos(\omega t - h x)$$

3) Somme de 2 ondes progressives en toutes
= onde stationnaire

(Illustrer la réflexion d'une onde à l'aide de la corde d'un diapason fixée à ses extrémités, puis libre à ses extrémités).

Considérons $s_+(x, t) = s_0 \cos(\omega t - h x)$ et $s_-(x, t) = s_0 \cos(\omega t + h x)$

Car l'équation de D'Alembert est linéaire alors $s_+ + s_-$ est également solution de D'Alembert.

$$\text{tg} \quad s_+ + s_- = 2 s_0 \cos(\omega t) \cos(h x)$$

Une onde pouvant se mettre sous la forme $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ est dite stationnaire.

Étudions en détail les ondes stationnaires

III ONDES STATIONNAIRES

1) Équation de D'Alembert

Cherchons des solutions particulières de l'éq de D'Alembert sous la forme:

$$s(x, t) = f(x) g(t) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} f(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Car les variables x et t sont indépendantes alors:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = C_0$$

Donc si $C_0 > 0$, la solution est une exp divergente, ce n'est pas.

Prends $C_0 < 0$ avec $C_0 = -h^2$.

$$\left. \begin{aligned} (f(x)) \hat{f}''(x) &= -h^2 \\ (g(t)) \hat{g}''(t) &= -c^2 h^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = p_0 \cos(hx + \varphi_f) \\ g(t) = g_0 \cos(hct + \varphi_g) \end{cases} \quad 29 \text{ (4)}$$

D'où $s(x, t) = p_0 \cos(hx + \varphi_f) g_0 \cos(\omega t + \varphi_g)$ avec $h = \frac{\omega}{c}$.

Transition: nous allons voir que si on impose des CL, on peut rechercher des sol. particulières sous la forme d'ondes stationnaires.

2) Conditions aux limites

a) Corde fixée à ses 2 extrémités: oscillat° lib. , modes propres (Sonz).

(comp avec la corde de Melde)

Chercher les solutions satisfaisant les CL d'une corde vibrante:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0, t) = y_0 \cos(\varphi_f) \cos(\omega t + \varphi_g) = 0 \\ y(L, t) = y_0 \cos(hL + \varphi_f) \cos(\omega t + \varphi_g) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\varphi_f) = 0 \\ \cos(hL + \varphi_f) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_f = \frac{\pi}{2} + h\pi \\ hL = n\pi \end{cases}$$



D'où $h_n = \frac{n\pi}{L}$ soit $\omega_n = h_n c = \frac{n\pi c}{L}$

D'où $\omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\lambda_n}{c}} = \frac{2\pi c}{\lambda_n} \Rightarrow L = \frac{n\lambda_n}{2}$

La longueur de la corde est un multiple entier de la demi-longueur d'onde, ce qui est normal car les extrémités $x=0$ et $x=L$ st des noeuds, distants de d'une demi-longueur-d'onde.

D'où $y_n(x, t) = y_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi_g\right)$

mode propre de vibration

En réalité tous les modes st superposés et c'est l'équat° de D'Alembert qui est linéaire:

$$y(x, t) = \sum_1^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi_g\right)$$

b) Corde fixée à une extrémité: oscillat° forcées, résonance

CL: $\begin{cases} y(0, t) = a \cos(\omega t) \\ y(L, t) = 0 \end{cases}$

$$\bullet \quad y(x, t) = y_0 \cos(\varphi_F) \cos(\omega t + \varphi_0) = a \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow a = y_0 \cos \varphi_F \quad \text{et} \quad \varphi_0 = 0$$

$$\bullet \quad y(L, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kL + \varphi_F) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\omega t) \cos(kL + \varphi_F) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(kL + \varphi_F) = 0$$

$$\Leftrightarrow kL + \varphi_F = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_F = \frac{\pi}{2} - kL$$

$$\text{Donc } a = y_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - kL\right) = y_0 \sin kL \quad \Leftrightarrow y_0 = \frac{a}{\sin kL}$$

$$\text{Ainsi } y(x, t) = \frac{a}{\sin kL} \cos(\omega t) \cos(kx + \frac{\pi}{2} - kL)$$

$$y(x, t) = \frac{a \cos \omega t \sin(k[x-L])}{\sin kL}$$

CAP

Ici la solution diverge pour $\sin kL = 0$ soit $kL = n\pi$, soit pour des pulsations $\omega_n = n \frac{c\pi}{L}$. On retrouve les pulsations propres d'une corde vibrante de n raies fixée à ses 2 extrémités. On a de n pulsations de largeur n/L .

En réalité, l'amplitude des vibrations est importante à la résonance mais ne devient pas ∞ ; elle est limitée par les phénomènes dissipatifs et les non linéarités qui apparaissent avec fortes amplitudes.

$$U_s(t) = \frac{4}{\pi} U_m \sum_{p \text{ impair}} \frac{1}{p} \frac{\sin(p^2 \frac{\pi}{T} t + \varphi_p)}{\sqrt{1 + p^2 \frac{4\pi^2 \delta^2}{T^2}}}$$

• $t \ll \delta$: $U_s(t) = \frac{4}{\pi} \frac{T}{2\pi\delta} U_m \sum_{p \text{ impair}} \frac{-\cos p \frac{2\pi t}{T}}{p^2}$
 \Rightarrow on retrouve le signal triangulaire attendu

* Regarder le Filtré Passe Bande. (à faire)

- une Analyse spectrale et une analyse temporelle, on tombe sur le même résultat (idée à faire passer sur la page).
- modulat^o et demodulat^o peuvent se faire en numérique
- * III : choix de filtre : ex de traitement non linéaire, modulat^o
- * autre racio : multipliage
- Faire le traitement du signal numérique.
- Avoir à tête (pour les q) les repères impressionnelles et indicelles (transformée de Laplace).
- échantillonnage pour des traitements linéaires.

• Filtrage numérique pour un Pense bas:

$$G \frac{dU_S}{dt} + U_S = U_e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dU_S}{dt} = \frac{U_e - U_S}{G}$$

methode d'Euler: $U_S(t + \Delta t) = U_S(t) + \Delta t \frac{U_e(t) - U_S(t)}{G}$

utilisé du numérique \rightarrow \oplus calculé par les bandes passantes des amplis
 \rightarrow \oplus de pb avec les bobines

\oplus fréquence d'échantillonnage est faible
 \Rightarrow meilleur signal \Rightarrow possibilité de signal.

• La partie II est des en pre-requis

car la charge par Actia d'un signal sur un filtre.

Pense bas: * valeur moyenne.

* $f \ll f_c : U_S(t) \approx U_e(t)$

* $f \gg f_c : U_S(t) \approx \langle U_e(t) \rangle$

$$U_S(t) \approx \langle U_e \rangle + \frac{1}{m} \int U_e^2(t) dt$$

Regarder alors la décomposition spectrale par un filtre P. Bas.

• triangulaire: $U_e(t) = \frac{8 U_m \cos(\frac{2\pi}{T} t)}{\pi^2} \sum_p \frac{\cos(p \frac{2\pi}{T} t)}{p^2}$ avec p impair

• Pense Bas: ~~voir~~ $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega G}$
 $|H| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 G^2}}$, $\tan \varphi = -\omega G$, $\cos \varphi > 0$.

$$U_A(t) = \frac{8 U_0}{\pi^2} \sum_{p \text{ impair}} \frac{1}{p^2} \frac{\cos(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_p)}{\sqrt{1 + p^2 \frac{4\pi^2}{T^2} G^2}}, \quad \tan \varphi_p = -p \frac{2\pi G}{T}$$

* grande fréquence: $T \ll G : \Rightarrow \varphi_p = -\frac{\pi}{2}$.

d'où $U_A(t) = \frac{8 U_0}{\pi^2} \frac{T}{2\pi G} \sum_{p \text{ impair}} \frac{1}{p^2} \sinh\left(\frac{2\pi f}{T}\right)$

\Rightarrow on va avoir qu'une harmonique \Rightarrow observation d'une sinusoïde

Autres exemples * $U_e(t) = \frac{4}{\pi} U_m \sum_{p \text{ impair}} \frac{1}{p} \sinh\left(\frac{p 2\pi f}{T}\right)$

$$H = \frac{1}{1+j\omega G}$$

CP 25 : ONDES ACOUSTIQUES ✓

①

Plan : I Modeles des ondes acoustiques

- 1) Position du pb - approximat^o acoustiques
- 2) Mise en equation
- 3) Celerite du son ds un GP

II Propagati^o des ondes sonores

- 1) ondes acoustiq planes progressives
- 2) Impedances acoustiques.

III Aspect energetique

- 1) Bilan d'energie
- 2) Intensite et niveaux sonores

IV Reflexion et transmission entre 2 milieux

- 1) Position du pb
- 2) Coeff de reflexion et de transmission.

Biblio : CAP Brepa PC-PC*
Tout en Un PC-PC*

Intro : * Dire qu'on a fait le choix de parler des ondes acoustiq ds un fluide et non ds des solides m[^] si cela f. C'est ma chaine personnel.
* (exp) avec un "clap"!! \Rightarrow Les particules de fluide au voisinage de nos mains voient leur volume et de leur masse volumiq modifier. Cette modif de vol entraine une modif de pression qui permet la mise en met des particules de fluides voisines. \Rightarrow c'est pourquoi vous entendez le bruit.

Donc une onde sonore est une onde mecaniq longitudinale qui propage une perturbati^o (sans transport de matiere mais avec de l'energie) ds un milieu materiel. et la propagati^o resulte d'un couplage entre les variations de pression et le deplacem[^] des particules de fluides.

I MODELE DES ONDES ACOUSTIQUES.

1) Positra du pb - approximation acoustique (Sanz)

Considerons un fluide parfait où on néglige la viscosité :

Au repos ; le fluide est caractérisé par :

- une pression uniforme p_0
- une masse volumique μ_0
- une vitesse particulière nulle.

L'onde sonore est une perturbation \vec{u} à cet état d'équilibre \Rightarrow

- $p(n, t) = p_0 + p_1(n, t)$ avec $p_1 \ll p_0$
- $\mu(n, t) = \mu_0 + \mu_1(n, t)$ avec $\mu_1 \ll \mu_0$
- $\vec{u}(n, t) = \vec{u}_1(n, t)$ avec $u_1 \ll c$.

De telle sorte que $\frac{p_1}{p_0}, \frac{\mu_1}{\mu_0}, \frac{u_1}{c}$ ont tous le même ordre de grandeur, c'est-à-dire ϵ (infinitésimale petit).

Car en supposant qu'on ait un ordre ϵ , on simplifie grandement les calculs, de telle sorte qu'ils soient linéaires.

En effet, (excp) avec un émetteur et récepteur, quel qu'il soit en sinusoidal sur l'émetteur, je reçois une sinusoidal sur le récepteur \Rightarrow linéaire

2) Mise en équation. (linéarisation des équations pour qu'elles soient linéaires).

a) Conservation de la matière

Equation locale de la conservation de la matière :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{u}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 + \vec{\nabla} \cdot (\mu_1 \vec{u}_1) = 0$$

\uparrow
ordre 2

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = 0$$

b) Equation d'Euler

$$\mu(n, t) \left(\frac{\partial \vec{u}(n, t)}{\partial t} + (\vec{u}(n, t) \cdot \vec{\nabla}) (\vec{u}(n, t)) \right) = - \vec{\nabla} p(n, t)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{\nabla} p_0 = \vec{0}$$

on obtient:

$$(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right) = -\nabla P_1 \quad (2)$$

Or par lemmes $\mu_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ et $(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1$ ordre 2. car:

$$\left(\frac{\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \|}{\| \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \|} = \frac{v/\tau}{v^2/L} = \frac{v}{L\tau} \ll 1 \text{ car } \frac{L}{\tau} = c \right)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1$$

c) Coefficient de compressibilité isotherm.

Fluide considéré \vec{c} (adiabatique, réversible) = isentropique.

\Rightarrow coefficient de compressibilité:

$$\chi_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1 - \mu_0}{p_1 - p_0} \approx \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{p_1}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \chi_s \mu_0 p_1$$

RQ: $\chi_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s \Rightarrow d\mu = \mu \chi_s dp$

• en plus: $d\mu = \frac{D\mu}{Dt} dt = \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \mu \right) dt = \frac{\partial \mu}{\partial t} dt$

$dp = \frac{Dp}{Dt} dt \approx \frac{Dp_1}{Dt} dt = \frac{\partial p_1}{\partial t} dt$

\Rightarrow D'où $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = (\mu_0 + \mu_1) \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$

ordre 1 $\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \Rightarrow \mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$

d) Equation de D'Alembert

• $\nabla \cdot (\nabla P_1) = -\mu_1 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) = -\mu_1 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}_1)$

Or $\mu_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = -\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla P_1) = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$

Or $\mu_1 = \chi_s \mu_0 p_1$ d'où $\Delta P_1 = \chi_s \mu_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

Ainsi $\Delta P_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$ (1)

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \mu_0}}$

3) Celerite du son dans un GP.

a) Homogénéité.

$$\left. \begin{aligned} [X_S] &= \frac{[S]}{[F]} = \frac{[S]}{[n][a]} = T^2 L^1 n^{-1} \\ [c] &= L \cdot T^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$[c_0] = n \cdot L^{-3}$$

b) son dans un GP

GP isothermique $\Rightarrow pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow \gamma p V^{\gamma-1} dV + p dp V^\gamma = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

or $X_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{\gamma p}$

Donc $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 X_S}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{n}}$ avec $p = \frac{\mu RT}{n}$

II PROPAGATION DES ONDES SONORES

1) ondes acoustiques planes progressives

a) ondes planes progressives.

Equation de propagation de p D: $\frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$

Resssemble à l'équation de D'Alembert, donc la sol de (1) est une superposition de 2 ondes planes progressives, ayant des direct° opposées lq.

$$p_x(x, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{allant vers la} \\ x \text{ croissant}}} + \underbrace{g\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{allant vers la} \\ x \text{ décroissant}}}$$

b) ondes planes progressives monochromatiques

Considérons le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoidale se propageant suivant la direction \vec{x} : $p_x(n, t) = p_m \cos(\omega t - kx)$

en \mathbb{C} : $p_x(n, t) = p_m e^{i(\omega t - kx)}$

Donc de (1): $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$ relation de dispersion

2) Impedances acoustiques

• Pour une onde progressive harmonique a a:

$$p_1 = p_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$
 (propagation vers \odot)

•
$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(n, t) = - \vec{\nabla} p_1(n, t) \xrightarrow{\text{en } \vec{e}} \mu_0 j \omega \vec{v}_1 = j \vec{k} p_1$$

Or \vec{v}_1 et \vec{k} sont dans la \vec{n} direction, d'où :

$$p_1 = \frac{\mu_0 \omega v_1}{k} = \mu_0 c$$
 d'après la relation de dispersion

d'où $Z_a = \text{impédance acoustique} = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa_s}}$

RQ: • est généralisée pour les milieux solides
• pour une propagation vers \ominus on a : $Z_a = -\mu_0 c = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\kappa_s}}$

• $Z_{a, \text{solide}} > Z_{a, \text{liquide}} \gg Z_{a, \text{gaz}}$

car $\mu_{liq} > 1000 \mu_{gaz}$ et $c_{liq} > 5 c_{gaz}$
avec $Z_{eau} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
 $Z_{air} = 440 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

III ASPECT ENERGETIQUE

1) Bilan d'énergie

a) Bilan local d'énergie

Onde sonore caractérisée par :

- + un déplacement des particules de fluide = e_c
 - + compression ou dilatation des particules = e_p
- } $e_m = \text{énergie mécanique}$

La propagat° de l'onde sonore se traduit par la propagation de cette e_m

\vec{e} en EN , on définit le flux du vecteur densité de courant d'énergie à

travers une surface :
$$P(t) = \iint_n \vec{\Pi}(n, t) dS$$

Par conservation de l'énergie mécanique on a :

$$dE = \delta E_{ech}$$

dE : variation de l'énergie méca totale ptt dt
 δE_{ech} : énergie échangée par le syst

$$\bullet \delta E_{ech} = - P(t) dt = - dt \iint \vec{\pi}(n, t) d\vec{S}$$

$$\bullet E(t) = \iiint e(n, t) d\vec{v} \quad \text{avec } e : \text{densité vol d'énergie}$$

$$\Rightarrow dE = E(t+dt) - E(t) = \iiint (e(n, t+dt) - e(n, t)) d\vec{v}$$

$$= dt \iiint \frac{\partial e}{\partial t} d\vec{v}$$

$$\text{d'où } \left. \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \right\}$$

b) Vecteur densité de courant énergétique

Force de pression exercée sur une surface: $d\vec{F} = (p_0 + p_1(n, t)) d\vec{S}$
 Or l'élément de surface se déplace avec le fluide à la vitesse $\vec{v}_1(n, t)$

$$\text{D'où } d\mathcal{P}_{\text{Total}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_1 = p_0 \vec{v}_1 d\vec{S} + p_1(n, t) \vec{v}_1 d\vec{S}$$

Das le cadre des approximations acoustiques $\langle p_0 \vec{v}_1 d\vec{S} \rangle = p_0 \langle \vec{v}_1(n, t) \rangle d\vec{S}$

$$\text{d'où } d\mathcal{P}_{\text{tot}} = p_1 \vec{v}_1 d\vec{S} \Rightarrow \mathcal{P} = \iint p_1 \vec{v}_1 d\vec{S}$$

$$\text{D'où } \left. \vec{\pi} = p_1 \vec{v}_1 \right\} \text{ en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

c) Densité volumique d'énergie sonore

$$\bullet \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p_1 \vec{v}_1) = 0 \quad (1)$$

$$\bullet * \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} p_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_0 \vec{v}_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \vec{v}_1 \vec{\nabla} p_1$$

$$* \mu_1 = \chi_s \mu_0 p_1 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \\ \Leftrightarrow \chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = - p_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \vec{v}_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = - \vec{v}_1 \vec{\nabla} p_1 - p_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot (p_1 \vec{v}_1) = 0$$

$$\text{En identifiant avec (1): } \left. e(n, t) = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \right\}$$

avec e : densité volumique d'énergie sonore

$$\text{RQ: OEN PPH: } e = \mu_0 v_1^2 = \chi_s p_1^2, \quad \vec{\pi} = \mu_0 c v_1^2 \vec{v} = \frac{p_1^2}{\rho_0 c} \vec{v}$$

2) Intensité et niveau sonore

(4)

a) Intensité sonore

L'intensité sonore d'une onde acoustique est le flux surfacique moyen en tps du vecteur densité de courant énergétique:

$$I = \langle \|\vec{\Pi}(n, t)\| \rangle \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Elle représente la puissance moyenne transportée par l'onde par unité de surface.

RQ: OENPPH:
$$I = \frac{\langle P_n^2(n, t) \rangle}{\rho_0 c} = \frac{P_{1,0}^2}{2\rho_0 c} = \frac{P_{1,0}^2}{2Z_0}$$

b) Niveau sonore

(a dB)
$$I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_0}$$
 avec $I_0 = \text{valeur de référence} = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

RQ: $I_0 =$ seuil limite d'audition pour une $\omega = 1000 \text{ Hz}$, & domaine de sensibilité de l'oreille est max à cette ω .

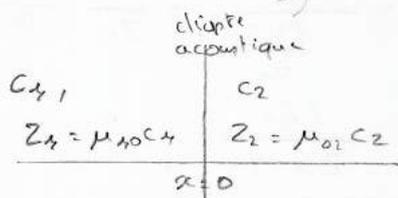
• échelle log car large intervalle de variat° de I et car percept° log de $I \Rightarrow$ loi de Fechner. (= sensat° perçue est prop au log de l'intensité du stimulus).

IV REFLEXION ET TRANSMISSION ENTRE 2 MILIEUX

1) Position du pb.

||

Condit° aux limites ($x=0$)



$p =$ surpression
 $v =$ vitesse

de la vitesse: Les 2 fluides ne peuvent ni se mélanger ni se séparer à l'interface \Rightarrow composante normale de la vitesse \vec{v}^n en $x=0$, donc \vec{v}^n de la vitesse est $\hat{n} \Rightarrow v(x=0^-, t) = v(x=0^+, t)$

Eq de la pression: TRC d'un petit élément de fluide d de même dm, situé entre $x = -\epsilon$ et $x = \epsilon$, sur l'axe Ox on obtient:

$$dm \frac{\partial v}{\partial t} (0, t) = (p_1(-\epsilon, t) - p_2(\epsilon, t)) dS$$

Bcd l'eq $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow p_1(0, t) = p_2(0, t)$ car $dm \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$

2) Coeff de réflexion et de transmission

Onde incidente : $p_i(x, t) = f(t - \frac{x}{c_1})$
 $v_i(x, t) = \frac{1}{Z_1} f(t - \frac{x}{c_1})$

Dans naissance de 2 ondes :

onde réfléchi : $p_r = g(t + \frac{x}{c_1})$ onde transmise : $p_t = h(t - \frac{x}{c_2})$
 $v_r = -\frac{1}{Z_1} g(t + \frac{x}{c_1})$ $v_t = \frac{1}{Z_2} h(t - \frac{x}{c_2})$

a) Coeff en amplitude

Vitesse : * $r_v = \text{coeff de réflexion} = \frac{v_r(0, t)}{v_i(0, t)} = \frac{-\frac{g(t)}{Z_1}}{\frac{f(t)}{Z_1}} = -\frac{g(t)}{f(t)}$

Or par Eq des vitesses et surpression on a :

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{Z_1} (f(t) - g(t)) = \frac{1}{Z_2} h(t) \\ f(t) + g(t) = h(t) \end{cases} \Rightarrow Z_1 (f(t) + g(t)) + Z_2 (g(t) - f(t)) = 0$$

D'où $r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$

* $t_v = \text{coeff de transmission} = \frac{v_t(0, t)}{v_i(0, t)} = \frac{\frac{h(t)}{Z_2}}{\frac{f(t)}{Z_1}} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{h(t)}{f(t)}$

D'où en éliminant $f(t)$ de le syst (1) on a : $t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

surpression : $r_p = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$

$t_p = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)} = \frac{h(t)}{f(t)} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$

b) Coefficients et puissance

(5)

Onde incidente : $\vec{\Pi}_i = P_i v_i \vec{a} = \frac{1}{Z_1} P_i^2 \vec{u}_x \Rightarrow I_i = \frac{\langle P_i^2 \rangle}{Z_1}$

Onde réfléchie : $\vec{\Pi}_r = -\frac{1}{Z_1} P_r^2 \vec{a} \Rightarrow I_r = \frac{\langle P_r^2 \rangle}{Z_1}$

Onde transmise : $\vec{\Pi}_t = \frac{1}{Z_2} P_t^2 \vec{a} \Rightarrow I_t = \frac{\langle P_t^2 \rangle}{Z_2}$

$$R = \frac{I_r(0,t)}{I_i(0,t)} = \frac{\langle P_r^2(0,t) \rangle}{\langle P_i^2(0,t) \rangle} = \frac{\langle g^2(t) \rangle}{\langle f^2(t) \rangle} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$$

$$T = \frac{I_t(0,t)}{I_i(0,t)} = \frac{\langle h^2(t) \rangle}{\langle f^2(t) \rangle} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Conservation de l'énergie à l'interface : $\boxed{R + T = 1}$

LP 26 : PROPAGATION AVEC DISPERSION ①

Leures : - H - prepa : "Ondes"
- Tec - Doc : "Physique des ondes"
• Durand : "Physique Tout-en-un"

Niveaux : 2nd année de CP.
Pré-requis : - Electromagnetisme
- Equations de d'Alembert

Plan : I Milieux non dispersifs vs milieux dispersifs

- 1) Relation de dispersion
- 2) Vitesse de phase.

II Paquets d'onde - vitesse de groupe

- 1) Propagation de 2 ondes planes monochromatiques
- 2) Paquet d'ondes
- 3) Evolution du paquet d'ondes

III Etude de propagation avec dispersion : Le plasma

- 1) Presentation du milieu
- 2) Equations de propagation - relation de dispersion
- 3) Etude et interpretation de la relation de dispersion.

Intro : Nous avons vu précédemment que l'onde électromagnétique plane, progressive est une sol particulière de l'équation de D'Alembert. Or pour créer une onde plane, il nous faudrait une source d'extension infinie et cela n'existe pas.

Donc dans cette leçon nous allons aborder la propagation des ondes avec de la dispersion, i.e. la dispersion de l'énergie de l'onde électromagnétique au cours de sa propagation. Pour cette leçon, on négligera l'absorption à savoir le EA. Et on va voir comment on peut créer une onde plane.

I MILIEUX DISPERSIFS VS MILIEUX NON DISPERSIFS

1) Relation de dispersion

Prenez par ex, la propagation des OEN de l'air.

L'équation de propagation s'écrit $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. (1)

Une solution de cette équation est une OEN PP de la forme

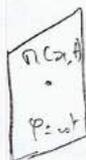
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{d'où ds (1)} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Ainsi, à partir de la relation de l'équation de propagation on peut définir la relation de dispersion $k = f(\omega)$.
(relation entre la fréquence temporelle et la fréquence spatiale de l'onde)

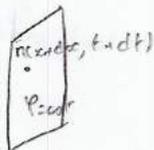
2) Vitesse de φ

La vitesse de φ est définie par la vitesse de propagation des surfaces équiphasées de l'onde progressive. $\varphi = kx - \omega t = \text{const}$. Donc

considérons



$$\varphi = kx - \omega t$$



$$\varphi = k(x + dx) - \omega(t + dt)$$

d'où $k dx - \omega dt = 0$

$$\text{d'où} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_\varphi.$$

- Pour l'air on a $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow v_\varphi = c = \text{const}$. Ainsi la vitesse est la \tilde{c} pour toutes les ondes quelles que soit la fréquence. \Rightarrow on parle de milieu non dispersif.
- Regardons maintenant pour le prisme.
on envoie une lumière blanche donc polychromatique sur un prisme d'indice n qui dépend de λ . (Loi de Cauchy $n(\lambda) = \frac{A}{\lambda^2} + B$)
 \Rightarrow à l'arrivée la lumière est décomposée en ses différents composants spectraux.

d'où $v_p = \frac{c}{n(\lambda)} = v_p(\lambda) \Rightarrow$ milieu dispersif. (2)

d'où le nom de l'exp : dispersion de la lumière blanche.

Ainsi la v_p n'a de sens que pour les OEPH car ds le cas d'un milieu dispersif, chaque onde plane de pulsation $\omega \neq \omega_0$, va avoir une vitesse de phase \neq . Ainsi l'onde réelle va se disperser à la vitesse de groupe.

II - PAQUETS D'ONDE - VITESSE DE GROUPE

Le caractère dispersif est un phénomène de propagation, lié à la dépendance de la vitesse de v avec ω , ne peut être mis en évidence qu'en associant plusieurs ondes de pulsations \neq .

1) Propagation de 2 OEPH.

Considérons 2 OEPH de pulsation ω_1 et ω_2 proches et de même amplitude. On a :

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + U_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x).$$

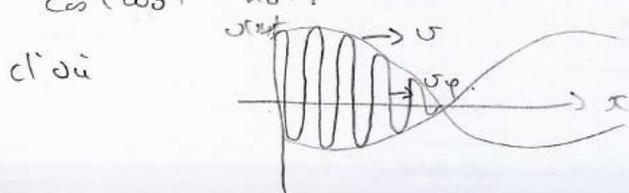
$$\text{Posons : } \begin{cases} \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, & k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \\ \delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, & \delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} |\delta\omega| \ll \omega_0 \\ |\delta k| \ll k \end{cases}$$

$$\text{d'où } u(x, t) = 2U_0 \underbrace{\cos(\delta\omega t - \delta k x)}_{(1)} \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 x)}_{(2)}.$$

Les variations de $u(x, t)$ sont donc à 2 instants t . On observe de
des battements spatiaux : une onde moyenne de nombre d'onde k_0 est

enveloppée par une onde envelope de nb d'onde δk .

De $\oplus, v \approx \frac{c}{n}$ $\omega_0 \gg \delta\omega$, alors les variations temporelles du terme $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ sont donc beaucoup plus rapides que celles de $\cos(\delta\omega t - \delta k x)$.



$$(2) : \text{OEPH de célérité } \frac{\omega_0}{k_0} = v_p$$

$$(1) : \text{OEPH de célérité } \frac{\delta\omega}{\delta k} = v$$

Conclusion: La structure de l'onde se déplace à une vitesse \neq de la vitesse de φ . (Utilisation des outils pédagogiques)

2) Paquet d'ondes

Ni l'OPPH, ni le cas étudié précédemment n'ait de réalité φ .
En effet, une onde réelle a une extension temporelle et une extension spatiale limitée.

On définit alors le paquet d'ondes:

Soit $u(x, t)$ une onde se propageant de la milieu étudié tq.
 $u(x, t) = \text{Re}(\underline{u}(x, t))$ avec $\underline{u}(x, t) = \int_0^t \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega$ (1)

On appelle paquet d'onde un ensemble d'OPPH de pulsations voisines, tq $\underline{A}(\omega)$ ne prend de valeurs significatives que sur un petit intervalle de pulsation $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$

$$(1) : \underline{u}(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega \quad \text{avec } k(\omega)$$

3) Evolution du paquet d'ondes

$$\underline{u}(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)} d\omega$$

onde moyenne. enveloppe, notée $\tilde{E}(x, t)$.

$$\left. \begin{array}{l} \omega - \omega_0 \in \left[-\frac{\Delta\omega}{2}, \frac{\Delta\omega}{2}\right] \\ \Delta\omega \ll \omega_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{variations temporelles de } \tilde{E}(x, t) \\ \text{petites devant onde moyenne.} \end{array}$$

* \tilde{E} ω proche de ω_0 , alors DL à l'ordre 1 de $k(\omega)$.

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \tilde{E}(x, t) &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - x \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0})} d\omega \\ &= \tilde{E}(0, t - x \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}) \end{aligned}$$

$E(x, t)$ se propage donc à la vitesse $v_g(\omega_0) = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$ (3)
 appelée vitesse de groupe. A cet ordre d'approximation, $E(x, t)$
 se propage sans déformation.

* Poussons à l'ordre 2:

$$h(\omega) = h_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dh}{d\omega}\right)_{\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{d^2h}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}$$

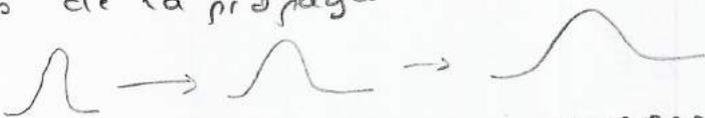
$$= h_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{1}{v_g(\omega_0)} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \left(\frac{d^2h}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}\right)$$

d'où :

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - d(\omega)x)} d\omega$$

avec $d(\omega) = \frac{1}{v_g(\omega_0)} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \left(\frac{d^2h}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}$.

Ainsi $v = \frac{1}{d(\omega)} = v(\omega) \Rightarrow E(x, t)$ change au
 cours de la propagation \Rightarrow le paquet se déforme.
 (voir graphes dans les
 aides pédagogiques)



III EX DE PROPAGATION AVEC DISPERSION: LE PLASMA.

1) Présentation du milieu

Milieu: milieu ionisé avec des ions positifs (+e, π) et des électrons
 (-e, m)

• Supposé peu dilué \Rightarrow interact^o charge-charge négligées.

• OENPPNT $\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_j)}$.

Consq: • $\pi \gg m \Rightarrow$ ions fixes l^o aux e⁻.

• $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{h \vec{z} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \|\vec{F}_e\| = e \|\vec{E}\|, \|\vec{F}_0\| = e v \|\vec{B}\|$
 $\Rightarrow \frac{\|\vec{F}_0\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{v}{c} \ll 1$

\Rightarrow action du champ magnétique de l'axe négligeable devant celle du champ électrique.

Pulsation de plasma: PFD sur l'e⁻:
 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}_0 e^{i(\omega t - R_3)}$

$$\vec{v} = \frac{-ie}{m\omega} \vec{E}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E} = -i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E} \quad (3)$$

avec $\omega_p = \text{pulsat}^\circ \text{ plasma} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

2) Equation de propagation - relation de dispersion

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - R_3)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

d'où $-R^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}$ avec (3)

d'où $\underline{R^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$

3) Etude et interprétation de la relation de dispersion

(2)

* Pour $\omega < \omega_p$, k est un imaginaire pur.

d'où $k = \pm i k'$ avec $k' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \frac{1}{\delta}$.

• "+" : onde se propage en la direct° + $\vec{v}_g \Rightarrow$ amplitude amplifiée $\Rightarrow \phi$ de réalité possible.

• "-" : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i\omega t} = f(z) g(t)$.

(1) : amortissement

(2) : ϕ de propagat°

\Rightarrow onde stationnaire avec l'amplitude qui \rightarrow
 \Rightarrow onde évanescente

* Pour $\omega > \omega_p$, $k \in \mathbb{R}$.

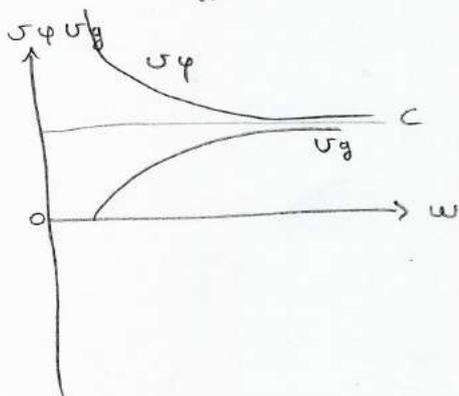
d'où $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

• $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$

• $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$

$\Rightarrow 2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$

$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$



CONCLUSION

Nous avons vu qu'une propagation dispersive, v_p dépend de la pulsation et le paquet d'onde, caractérisé par v_g , peut se déformer au cours de la propagation.

La dispersion intervient pour le plasma, mais également pour le guide d'ondes.

- ⊕ : calculs avec aide.

la plan.

• câble coaxial : oui on peut.

⊖ : - introduction technique, il faut poser les bases de la leçon.

Introduit : dire ce qu'est la dispersion, qu'on utilise les fonctions avec des mots simples.

• Transition entre I et II : v_p : sens avec une onde plane progressive pour propagation des ondes libres, avec une centre d'onde. propagation du paquet d'onde, avec vecteur \vec{p} .

OENP : vitesse de \vec{p} se propage

paquet d'onde : vitesse de \vec{p} se propage avec le paquet d'onde

LP 26: PROPAGATION AVEC DISPERSION.

Questions du Jury.

1) Rappel en prérequis: c'est quoi?

$$\vec{\nabla}(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \vec{z}$$

2) Cauchy:

$$n(\lambda) = A^2 + \frac{B^2}{\lambda}$$

3) Intro: on prend k réel, c'est vrai?

(En contradiction avec la partie III (3))

4) Est ce que la dispersion et l'absorption sont des notions indépendantes?

Peut-on les avoir séparément?

D'où vient l'absorption? et la dispersion?

Au niveau microscopique que représente l'absorption?

5) En fonction de ω il y a \neq résonance, ϵ_r change de ω
A relier avec la partie | le milieu.

Imaginaire et réelle de ϵ_r !

Cette résonance pour certaine ω .

entraîne une absorption.

dispersion $\rightarrow \text{Re}(\epsilon_r)$.

absorption $\rightarrow \text{Im}(\epsilon_r)$.

Les deux sont reliés.

II Dispersion de quoi?

C'est l'énergie qui se disperse au cours de la propagat°

v de groupe : vitesse de propagat° de l'énergie.

Onde plane \rightarrow énergie infinie. $-\infty \rightarrow +\infty$.

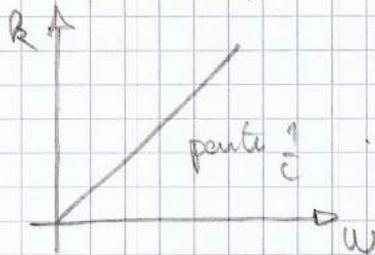
Onde réelle $\rightarrow \Sigma$ Onde plane de $\omega_0 \neq$.

Dispersion \rightarrow chaque ω_0 aura une $v_g \neq$.

Le paquet d'onde se disperse.

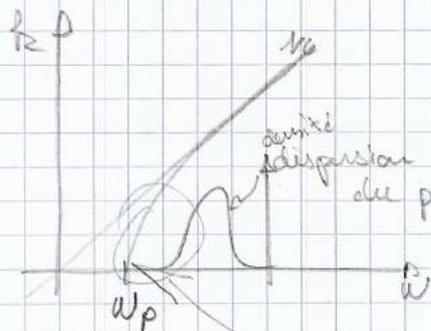
III Graph de k en fonct° de ω ?

1) v de groupe dans le vide.



2) v de groupe dans le plasma.

$$v_{eg} = c \times \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$



pour $\omega = \omega_p \rightarrow v_{eg} = 0$

pour $\omega < \omega_p$

pour avoir une dispersion il faut des relat° non linéar entre k et ω .

CP27 Propagation guidée des ondes

Niveau: NP

Biblio: Tallet: optiq 4.

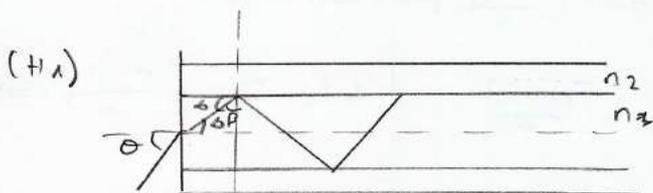
- H₂-proba: ondes 2^{es} années
- H₁-proba: optique.
- Courants: NP-NP

Info: On a déjà étudié la propagation libre d'une onde E₀ à travers le rayonnement dipolaire, et ce champ rayonne en $\frac{1}{r^2}$.
 Donc si je veux rayonner loin, il faut que j'aie un grand champ. Or pour entre ce pb, on peut capter l'onde pour entretenir le champ électrique; on va de poser des CL.
 Mais ceci a des coq, on ne pourra pas propager à toutes les fréquences!

I FIBRE OPTIQUE

(T): Traitement de la propagat° guidée de ce milieu n₁ entouré par 2 interfaces planes // avec un milieu d'indice n₂

1) Approche géo: capteur



réflexion totale qui si n₁ > n₂
 (n₁ sin i₁ = n₂ sin i₂)

• réflexion totale: n₁ sin alpha > n₂

• sin theta = n₁ sin delta

$$\Leftrightarrow \sin^2 \delta < 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \theta}{n_1^2} < 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta < \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \Rightarrow \text{réflexion successive.}$$

$$\Leftrightarrow n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > n_2$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha > \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha > \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \alpha > \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

2) Approche ondulatoire

(T): superposition d'ondes réfléchies. => interférences.
 ondes qui se propagent sans atténuat° n'ont celle par lesquelles les ondes réfléchies se superposent à 4.

⇒ calcul de $\beta_0 \neq$ de marche: (methode 2)

$$\sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a} \Rightarrow \text{que certains modes peuvent se propager.}$$

3) Csq : dispersion

$$(T): \beta_3^p = \frac{\omega}{c} \cos \theta_p = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_p} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{p^2 \lambda^2}{4a^2}}$$

⇒ relation de dispersion : signaux se déplacent au cours de la propagation et la fibre.

II GUIDES D'ONDES METALLIQUES

après un guide circulaire on va étudier un guide rectangulaire.
mais pour commencer : propagation guidée entre 2 plans métalliques.

1) Propagation guidée entre 2 plans métalliques //

(Cep) : → position des pb
→ recherche de E : équation d'iff: $\frac{dE}{dy} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) E(y) = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_n = E_0 n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \Leftrightarrow (\omega^2 - \beta^2) \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \dots$$

→ propagation que pour $\omega < \frac{n\pi c}{a}$ ($\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$)

(H₂)
→ vitesse de groupe.

2) Propagation en un guide d'onde rectangulaire

* → Si a a pb les : dans avec Cppria
→ Si a n'a pas les regarder à H, propa de modes propres possibles de propagation!

* aspect énergétique, vel. de propagation: H₂ p₁ a

* $\Delta \cdot \vec{E} = \left(R^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E}_n$: équation avec v p relative à H.
Sa résolut^o, compte tenu de C 2, calculer à ces modes propres (H p₁ a).

CP 28: ✓ OEN de les milieus dielectriques

Niveau:

Biblio: H-prepa acte 2^{ème} (1)
Serg uc-PC* 28
Cap - prepa PC-PC*

Pré-requis: OEN de Peide, Nazareff, mica

- Plan:
- I Milieus dielectriques
 - 1) Charges libres, charges liées (C)
 - 2) Vecteur de polarisation (H, C) S
 - 3) Vecteurs densités (S, C)
 - 4) Susceptibilité dielectrique (H, C)

 - II Propagation d'une OEN DS un dielectrique
 - 1) Equations de Nazareff (C)
 - 2) Equat^o de propagation (C, H)
 - 3) Relat^o de dispersion (S)
 - 4) Indice du milieu (H, C)

 - III Susceptibilité dielectrique
 - 1) modele de l'e⁻ elastique + lié (H)
 - a) Presentat^o
 - b) Equat^o
 - c) Susceptibilité du milieu
 - 2) Indice optique (S)

Intro: Comparaison avec les milieus conducteurs.

I MILIEUX DIELECTRIQUES

1) Charges libres et charges liées

(Cap): * Les sources du champ E ON st des charges électriq ou des courants électriques, c'est des charges en mot.

→ charges libres: particules chargées susceptibles de se déplacer et tout le vol d'nature.

→ charges liées: particules qui ne peuvent que subir de petits déplacements au v^l positif et

$$\Rightarrow \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_p \quad \text{et} \quad \rho = \rho_f + \rho_p.$$

* Un milieu diélectrique est un milieu susceptible d'être polarisé, c'est de posséder un moment dipolaire électrique permanent ou d'en acquérir un sous l'effet d'un champ électrique ext.

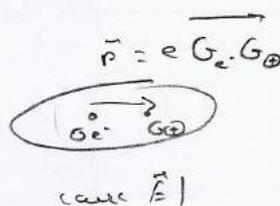
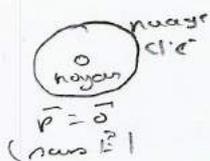
Ici on ne considère que le diélectrique est parfait, c'est qu'il est isolant soit qu'il n'a pas de charges libres ($\rho_f = 0$, $\vec{J}_f = \vec{0}$).

2) Vecteurs de polarisation

(H) Les charges liées d'un diélectrique ne st pas complètement immobiles, elles peuvent se déplacer légèrement autour de leur posit^o moyenne sous l'act^o d'un champ électrique ext. Ces déplacements peuvent provoquer l'apparit^o de moments dipolaires induits: on dit que le milieu se polarise!

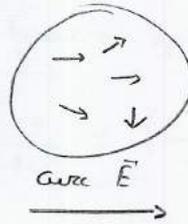
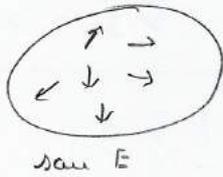
Il y a trois types de polarisat^o: électronique, orientat^o et ionique.

(Cap): Polarisat^o électronique: sous l'effet d'un champ \vec{E} , le nuage électronique d'un at se déforme, les barycentres des charges \oplus (noyau) ne coïncident plus avec le barycentre des charges \ominus = polarisat^o induite (appait^o d'un moment dipolaire induit).



ep) Orientalia: Pour des molécules polaires (= moment dipolaire permanent) la présence d'un champ électrique a tendance à aligner les moments dipolaires ds le sens du champ. à cause d'un couple $\vec{\Gamma} = \vec{p}_0 \wedge \vec{E}$

schéma ds H-prépa)

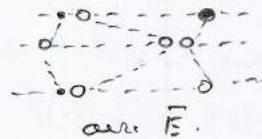
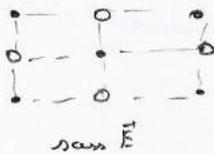


(2)

ep) Zonique: Un cristal ionique se déplace ds un champ électrique et il apparaît un moment dipolaire résultant

H-prépa)

• : \oplus
○ : \ominus



⇒ On définit le vecteur de polarisation $\vec{P}(n, t)$ du milieu \vec{E} le moment dipolaire moyen par unité de volume au pt n à l'instant t

$$\vec{P}(n, t) = \frac{d\vec{p}(n, t)}{d\vec{v}} \quad \text{unité: } C \cdot m^{-2}$$

3) Vecteurs densités

a) Densité de courant de polarisation

5) Considérons un milieu diélectrique soumis à un champ électrique sinusoidal de pulsation ω . Sous l'act^o de ce champ électrique, la charge q_i située au repère au pt A_i se déplace légèrement à A_i' et est associée de fait $\vec{v}_i(t)$. Il apparaît alors un moment dipolaire $\vec{p}_i = q_i \overline{A_i A_i'}$. A ces charges q_i en mot, nous pouvons associer un vecteur densité de courant $\vec{j}_p(n, t)$ (= vecteur densité de courant de polarisation) \vec{j}_p :

$$\begin{aligned} \vec{j}_p(n, t) &= \frac{1}{d\vec{v}_n} \sum_{A_i} q_i \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{d\vec{v}_n} \sum q_i \frac{d\overline{A_i A_i'}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{d\vec{v}_n} \sum q_i \overline{A_i A_i'} \right) \\ &= \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{d\vec{v}_n} \sum \vec{p}_i \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{d\vec{v}_n} d\vec{P}(n, t) \right) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ &\Rightarrow \underline{\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \end{aligned}$$

b) Densité volumique de charges

(S)

A ce courant de polarisation est associée une densité volumique de charges de polarisation $\rho_p(n, t)$ que l'on peut déterminer grâce à l'équation locale de conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_p + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = 0$$

$$\Rightarrow \rho_p + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

(Cap): Le déplacement des charges liées au voisinage de leur position eq peut être décrit par une densité vol de charges de polarisation reliée à la polarisation selon

$$\rho_p(n, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

4) Susceptibilité électrique

(H) La plupart des milieux ne présentent pas de polarisation permanente. Pour ces milieux, lorsque l'intensité du champ électrique n'est pas trop importante la relation entre \vec{P} et \vec{E} reste linéaire.

Lorsque les variations du champ électrique sont rapides, la polarisation induite ne suit pas toujours instantanément les variations du champ : \vec{E} et \vec{P} sont reliées par des ED linéaires.

Lorsque \vec{E} varie sinusoidalement vs le temps, on adopte la notation \underline{E} .

Relation entre \underline{E} et \underline{P} :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \epsilon_0 [\underline{\chi}] \underline{E}$$

(H), (Cap)

\Rightarrow Ici on va considérer un milieu linéaire avec $[\underline{\chi}]$ est un tenseur d'ordre 0 (= un scalaire)

- milieu homogène (\hat{m} prop de l'espace)
- isotrope : coeff de prop entre \underline{P} et \underline{E} ne dépend pas de l'orientation de ces vecteurs

de ces vecteurs

$$\underline{D} \perp \underline{H} \perp \underline{I} \Rightarrow \underline{P} = \epsilon_0 \chi \underline{E} \quad \chi \text{ sous chaque}$$

II PROPAGATION D'UNE OEA DS UN MILIEU DIELECTRIQUE

(3)

cas)
Hyp: D L H I ne possedant pas de charges et de courants libres.

Le milieu en presence d'un champ electrique non uniforme est decrit par $\chi(\omega)$.

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \vec{J} = \epsilon_0 \times \vec{E}$$

1) Equat° de Maxwell

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_p}{\epsilon_0} = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \mu_0 \vec{J}_p + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \vec{\nabla} \cdot ((1+\chi) \vec{E}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\chi) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 (1+\chi) \vec{E})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \mu_0 \epsilon_0 (1+\chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2) Equation de propagation

RQ: Ds les lignes, il n'y a pas $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
 (valeurs de déplacement électro)

$$\text{(cap)} \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \Delta \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) : \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{D}) \\ = -\mu_0 \epsilon_0 (1+\chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{(1+\chi)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

(H): avec $1+\chi = \epsilon_r$ permittivité relative du milieu.

3) Relat° de dispersion

On réalise une étude harmonique en recherchant des sol \mathbb{C} de la forme,
 par le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\vec{k} \in \mathbb{C}$.

$$(S) \Rightarrow \underline{E}^2 = \underline{\epsilon}_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$$

Posons $\underline{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_1'(\omega) + i\epsilon_2'(\omega)$ où $\epsilon_1'(\omega) = 1 + \chi_{e1}'(\omega)$ $\epsilon_2'(\omega) = \chi_{e2}'(\omega)$ } (S)

$$\underline{E} = (\bar{e}_1'(\omega) + i\bar{e}_2'(\omega)) \vec{0}$$

$$\Rightarrow (e_1' + i e_2')^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_1'(\omega) + i \epsilon_2'(\omega))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1'^2 - e_2'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1' \\ 2e_1'e_2' = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2' \end{cases}$$

\Rightarrow L'onde se propage dans le diélectrique avec la vitesse de phase

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{q})} = \frac{\omega}{|e_1'(\omega)|} \quad \text{Le milieu est dispersif.}$$

L'amplitude de l'onde s'atténue avec la distance caractéristique

$$S(\omega) = \frac{1}{|e_2'(\omega)|} \quad \text{L'absorb}^\circ \text{ est due à la partie imaginaire de la permittivité diélectrique.}$$

a) Indice du milieu

(H), (Cap)

L'indice $\underline{n}(\omega)$ d'un diélectrique linéaire et isotrope, soumis à une OEN plane, sous harmonique progressive $\Rightarrow \underline{E} = \underline{n}(\omega) \frac{\omega}{c}$

$$\text{or } \underline{E}^2 = \underline{\epsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \underline{n}^2 = \underline{\epsilon}_r$$

Si on pose $\begin{cases} n = n_1 - j n_2 \\ \underline{\epsilon}_r = \epsilon_1' - j \epsilon_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1^2 - n_2^2 = \epsilon_1' \\ 2n_1 n_2 = \epsilon_2' \end{cases} \quad (4)$

$\Rightarrow n_1$: indice de réfraction. $v_p = \frac{c}{n_1}$

n_2 : absorb $^\circ$ de l'ach. par le milieu = indice d'extinct $^\circ$.

Δ (4) et (5) ϕ ϵ_2 \hat{n} notat $^\circ$!

III SUSCEPTIBILITE DIELECTRIQUE

(4)

(H) Pour expliquer la permittivité diélectrique d'un milieu (graineur macro) nous devons étudier, à l'échelle micro, l'interaction du champ E ou avec les charges liées du milieu.
 \Rightarrow pour cela on va utiliser un modèle classique.

1) modèle de l'électron élastiquement lié

a) Présentation

(H) Le champ d'une OEN met en mouvement les charges liées du milieu matériel où elle se propage. Si la réponse est linéaire, une onde macroscopique oscillante de ces charges a la pulsation ω .

Dans le cadre de ce modèle, une charge liée est soumise à :

\rightarrow Forces de rappel élastique, prop. à son déplacement \vec{r} / r a sa pos. d'éq.

$$\vec{F} = -R\vec{r}$$

\rightarrow Force de choc amorti d'énergie en introduisant un tps de relaxation ζ

$$\vec{F} = -\frac{m}{\zeta} \dot{\vec{r}}$$

\rightarrow Force de Lorentz où pour une charge non relativiste, nous négligeons le terme magnétique

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

b) Equations, c) susceptibilité du milieu.

(H) • PFD

$$m\ddot{\vec{r}} = -R\vec{r} - m\frac{\dot{\vec{r}}}{\zeta} + q\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R}{m}}, \quad Q = \omega_0\zeta$$

\Rightarrow En régime sinusoidal établi

$$\vec{r} = \frac{\frac{q}{m\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \vec{E}$$

$$\vec{p} = q \vec{r} \Rightarrow \vec{p} = \frac{\frac{q^2}{m \omega_0^2} \vec{E}}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

on a N charges liées $\Rightarrow \vec{P} = N \vec{p} = \frac{\frac{q^2 N}{m \omega_0^2} \vec{E}}{1 + j \omega \frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \vec{E} = E_0 e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \chi_e = \frac{\chi_0}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ avec $\chi_0 = \frac{N \cdot q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$

$\vec{E} \propto E \in \mathbb{C} \Rightarrow$ posons $\chi_e = \chi_1 - j \chi_2$

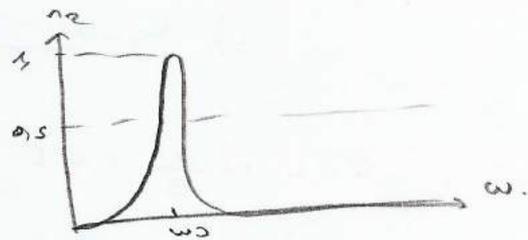
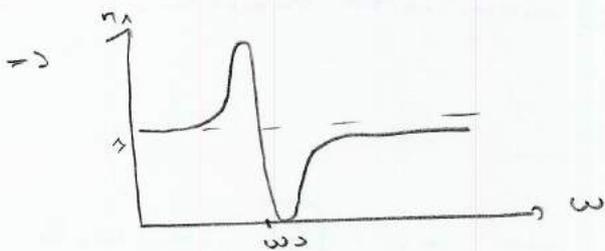
$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \chi_1(\omega) = \chi_0 \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q \omega_0}\right)^2} \\ \chi_2 = \chi_2(\omega) = \chi_0 \frac{\frac{\omega}{Q \omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q \omega_0}\right)^2} \end{cases}$$

\rightarrow Donner graphes χ_1 explicatif et pour la généralisation.

2) Indice optique

(5)

$$\chi_e = \frac{\chi_0}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{\chi_0}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$



\Rightarrow absorpt° importante au v (ou) et négligeable ailleurs.

Plaque - nous hors de cette zone tq $\omega \ll \omega_0$.

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\frac{q^2 N}{m \omega_0^2 \epsilon_0}}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 1 + \frac{\frac{q^2 N}{m \epsilon_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{Q}}$$

Comme on se place hors zone d'absorption alors

$$\epsilon_r \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec } \omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m \epsilon_0}}$$

$$= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{0L}^2} \right) \left(1 + \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega_{0L}^2} \omega^2}{1 + \frac{\omega_p^2 \omega_{0L}^2}{\omega_{0L}^2}} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{0L}^2} \right) \left(1 + \alpha \frac{\omega^2}{\omega_{0L}^2} \right)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_{0L}^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{0L}^2} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow n \approx \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{0L}^2} \right)} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \frac{\omega^2}{\omega_{0L}^2} \right) = n_0 + \frac{A}{\omega_{0L}^2}$$

\Rightarrow Loi de Cauchy

Conclusion: Ici on a considéré χ \vec{c} etant linéaire et χ un scalaire

Pourtant χ peut être une matrice qui définit les cranes optiques:

uniaxe $\chi_{xx} = \chi_{yy} \neq \chi_{zz}$
 biaxe $\chi_{xx} \neq \chi_{yy} \neq \chi_{zz}$ } anisotrope.

c'est nous \rightarrow isotrope $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz}$

\Rightarrow ce qui caractérise la dispersion.

CP29: OEN de les milieus conducteurs.

Niveau:

(Le out!)
Biblio: H. Pripa: Ondes 2^{ème} année
Saug, Tout-en-Un.

①
28

Pre-requis: Eq de Maxwell et Guide
• OPAH

- Plan:
- I Modélisation du conducteur
 - 1) Modèle de Drude
 - 2) Conductivité en régime variable
 - 3) Dissipé vol de charges
 - II Equat° Ds le conducteur
 - 1) Eq de Maxwell et relat° de dispersion
 - 2) Régime limite
 - III Effet de peau à basse fréquence
 - 1) Relat° de dispersion et épaisseur de peau
 - 2) Champ EM
 - IV Limitat° des hautes fréquences
 - 1) Réseau métallique
 - 2) zone de transparence

Intro:

I MODELISATION DU CONDUCTEUR

1) modele de Drude

(S)
Pour calculer la capacité electricque d'un conducteur m tallic, nous adaptons le modele de Drude: un e- libre P est soumis à la force qu'exerce le champ $E(t)$ et à la force de frottement usqueane que traduit globalement l'effet des collisions à l'et du milieu. $\vec{p} = -\frac{m}{\sigma} \vec{v}(P)$

où σ est une constante, de l'ordre de $10^{-14} s$ des un bon conducteur et la seule le vecteur est $\vec{v}(P)$ est considéré ici à la vitesse moy des e- d'un vol meso $d\sigma_P$ entourant P et na à la vitesse totale d'un e-, composée de la vitesse d'agitation thermique et de la vitesse due à la presence du \vec{E} .

RQ: modele acceptable : domaine radio aux UV certains.

2) Conductivité en regime variable

1) Modele Eulerien

Considérons un vol $d\sigma$ avec n e- par unite de vol, avec de la vitesse \vec{v}

$$\text{TRC} : \quad d m \vec{a} = -\frac{d m}{\sigma} \vec{v} - n_0 e d\sigma \vec{E} - n_0 e \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\text{avec } d m = n_0 m d\sigma, \quad \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Simplifications

→ act du champ mag negligible devant celle de l'electricite :

$$\|\vec{F}_m\| \sim e v B, \quad \text{or } \|B\| \sim \frac{\mu_0 E}{c} = \frac{E}{c v_0} \quad \text{avec } v_0 \sim c$$

$$\Rightarrow \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

→ acc convective negligible devant acceleration locale.

$$A = \|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\| \sim \frac{v^2}{\lambda} \quad \text{or } \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \sim \frac{v}{T} = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\beta} \sim \frac{v T}{\lambda} = \frac{v^2}{\omega} = \frac{v}{v_0} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

$$\Rightarrow m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{m}{\sigma} \vec{v} - e \vec{E}$$

$$\text{Si } \vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow \vec{v} = \frac{-e\vec{\sigma} \vec{E}}{1 + i\vec{\sigma}\omega} \quad (2) \Rightarrow$$

vecteur densité vol de courant $\vec{j} = -n_0 e \vec{v} \Rightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E}$
 avec $\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + i\vec{\sigma}\omega}$ avec $\gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \vec{\sigma}}{m}$ conductivité statique.

(Pine ?) $\left. \begin{array}{l} \gamma \omega = 5 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \text{ S} \text{ bon cacl} \\ \gamma_{\text{max}} = 10^{-11} \text{ S m}^{-1} \text{ mauvais cacl.} \end{array} \right\}$

(J) et (H)

RQ: • Si $\omega \vec{\sigma} \ll 1$ cacl or $\omega \ll \frac{1}{\vec{\sigma}} = 10^{14} \text{ rad/s}$, $\gamma \approx \gamma_0$ et la loi d'ohm est valable $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.

• une conductivité σ = un déphasage entre le vecteur densité de courant électrique et champ électrique

• en haute fréquence ($\omega \vec{\sigma} \gg 1$) $\gamma \approx -i \frac{\gamma_0}{\vec{\sigma}\omega}$: magné pure

Les vecteurs \vec{j} et \vec{E} sont quadrature et $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) dt = 0$

3) Densité vol de charges

(2):

$$\left. \begin{array}{l} \text{n.G.: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{eq continuité de la charge: } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{loi d'ohm locale: } \vec{j} = \gamma \vec{E} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0 \\ \Rightarrow (i\omega + \frac{\gamma}{\epsilon_0}) \rho = 0 \\ \Rightarrow \rho = 0 \end{array}$$

Transition: $\rho = 0$ ou nous permet de réduire le E de 1.

II EQUATIONS DE LE CONDUCTEUR

1) Eq de Maxwell et relat° de dispersion

(5) n.G: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

n.Φ: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

n.F: $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$

n.A: $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$
 $= \mu_0 (\gamma + i\omega \epsilon_0) \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega \epsilon_0}\right) i\omega \vec{E}$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega \epsilon_0}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

⇒ Les eq de Maxwell ds le métal prennent donc la même forme que ds un milieu vide de charge et de courant et si caelid^o de remplacer ϵ_0 par

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0} \right), \text{ l'equat}^{\circ} \text{ de dispersion devient:}$$

$$\underline{k}^2 = \underline{\epsilon} \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\mu_0 \gamma \omega}{1 + i\omega\epsilon_0} \quad (*)$$

(H)

2) Regime limite.

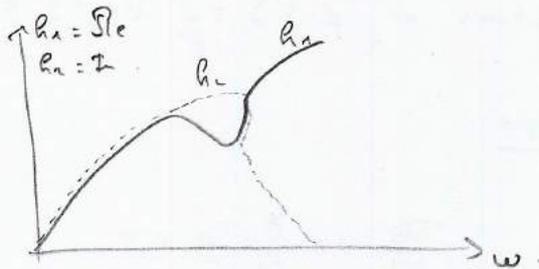
(H) ² decrit : $c^2 k^2 = \omega^2 - c^2 \frac{\gamma}{\epsilon_0} \frac{\omega}{1 + i\omega\epsilon_0} = \omega^2 - \frac{\omega p^2}{1 + \frac{1}{j\omega\epsilon_0}}$

avec $\omega p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$

⇒ k est un \mathbb{C} . Posons $\underline{k} = k_1 - jk_2$

Et on va regarder les évolut^o de k_1 et k_2 en fct de ω

avec $k_1 > 0$: propa ds le x π .



caractéristiques asymptotiques!

• $\omega \ll \frac{1}{\epsilon_0} = 10^{14} \text{ s}^{-1}$ $k_1 \approx k_2$

• $\frac{1}{\epsilon_0} \ll \omega \ll \omega_p = 10^{16}$ $k_2 \gg k_1$

⇒ $k \in i\mathbb{R}$

• $\omega \gg \omega_p \Rightarrow k_1 \gg k_2 \Rightarrow k \in \mathbb{R}$.

III EFFET DE PEAU A BASSE FREQUENCE ($\omega \ll \frac{1}{\epsilon_0}$)

(J)

1) Relation de dispersion et pénétration

Dn le cas où $\omega \ll \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \underline{k}^2 = -j^2 \mu_0 \epsilon_0 \omega$

(*) $k^2 = \pm e^{-i\pi/2} \mu_0 \epsilon_0 \omega$

(**) $k = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \omega} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \frac{1-i}{\delta}$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ épaisseur de peau

RQ: Dans ce cas, la conductivité est réelle et vaut γ_0 et le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction. L'equat^o de Maxwell Ampère se simplifie et ds $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E} \Rightarrow \text{AERS}$

⇒ $\nabla \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$: equat^o de diffusion

(Sec 1)

2) Chap électromagnétique

③ 29

Si nous considérons une OPH-L se propageant des 6 sens des z ↑ polarisée rectilignement selon Ox , le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1-i}{\delta \omega} E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_y$$

\Rightarrow Les amplitudes de \vec{E} et \vec{B} $\propto e^{-x/\delta}$

$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$ est la longueur caractéristique de cet amortissement.

(H) Donner le tableau : δ dépend de la fréquence :

ex : $f = 50 \text{ Hz}$, $\delta = 2,9 \text{ m}$

$f = 10 \text{ Hz}$, $\delta = 9,5 \text{ cm}$

\Rightarrow cette épaisseur très faible de la couche des acides métalliques ou couche très fine de E_{OH} qui ne pénètre quasiment pas à l'intérieur du métal est localisée dans une petite pellicule au x (surface).

(S) De \oplus , la puissance moy transportée par l'onde s'atténue avec une distance caractéristique égale à $\frac{\delta}{2}$

En effet $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu} \right) = \frac{E_0^2}{2 \mu \sigma \omega \delta} e^{-2z/\delta} \vec{u}_z$

IV LIMITATION DES HAUTES FREQUENCES

1) Zone $\frac{1}{\delta} \ll \omega < \omega_p$: miroir métallique, onde évanescente.

(H)

Si $\omega < \omega_p \Rightarrow k$ est un imaginaire pur $\Rightarrow \underline{k}_z = -j k_2 = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{-k_2 x} e^{j\omega t} \\ \vec{B}(x,t) = \underline{k}_2 \vec{e}_x \wedge \vec{E}_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \end{cases}$$

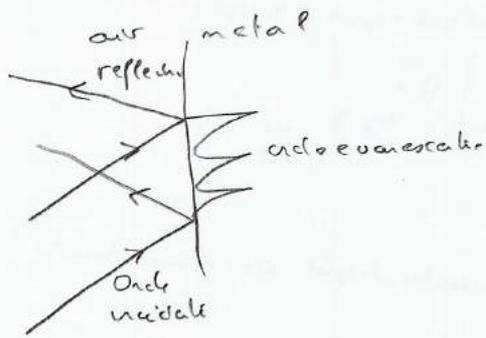
\Rightarrow onde stationnaire à amplitude exp \Rightarrow onde évanescente.

$\Rightarrow \vec{E}$ et \vec{B} en quadrature $\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = 0$ de $\vec{\Pi}$ que le flux moyen d'énergie

La \Rightarrow exp obs cliffure de cette onde pour l'effet de peau car il n'y a pas ici de dissipat° de l'énergie de l'onde par le milieu

\Rightarrow où est perdue l'énergie ?

En fait, pour voir le champ EOM oscillant, il faut envoyer un OEA vers le métal. Nous pouvons provoquer son angle de rebroussement de la surface métallique.



Pour un bon conducteur c'est le cas de ce capteur car $\omega < \omega_p$ de $10^{14} \text{ Hz} < \omega < 10^{16} \text{ Hz}$ de $\lambda \in [0,03 \mu\text{m}; 3 \mu\text{m}]$
 \Rightarrow La réflexion que explique l'excitation d'une surface métallique.

2) Zone de transparence ($\frac{1}{3} \ll \omega_p < \omega$)

La relat° de dispersion admet ici $\omega > \omega_p$ d'onde réel, positif pour la propagat° de \vec{T} .

$$\underline{k}_x = k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \quad (\text{relat}^\circ \text{ de Klein - Gordon})$$

\Rightarrow onde se propage dans le métal sans atténuat°: le métal est transparent dans ce domaine spectral.

La propagat° reste dispersive, puisque la vit de \vec{T} dépend de la pulsat°.

$$v_g = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

LP 30[√]: RAYONNEMENT DIPOLAIRE ①

ELECTRIQUE

Biblio: - Physique Tout en Un PC-PC*, Demod
- Ondes, H-prépa - CAP Prépa Physique PC-PC* ou NS-NS*
- Electromagnétisme, Pery, Demod

Niveau: - 2^{ème} année de CP (NP)

Pré-requis: - champs électrique et magnétique
- ondes transverse

Plan: I Position du problème

- 1) Le dipôle électrique élémentaire
- 2) Expression des potentiels retardés
- 3) Approximations et détermination du potentiel vecteur retardé.

II Champs électrique / magnétique rayonnés

- 1) Calculs des champs \vec{E} et \vec{B}
- 2) Zone de rayonnement (+ symétrie)
- 3) Structure du champ rayonné

III Puissance rayonnée par le dipôle oscillant

- 1) Vecteur de Poynting
- 2) Puissance totale rayonnée
- 3) Formule de Larmor



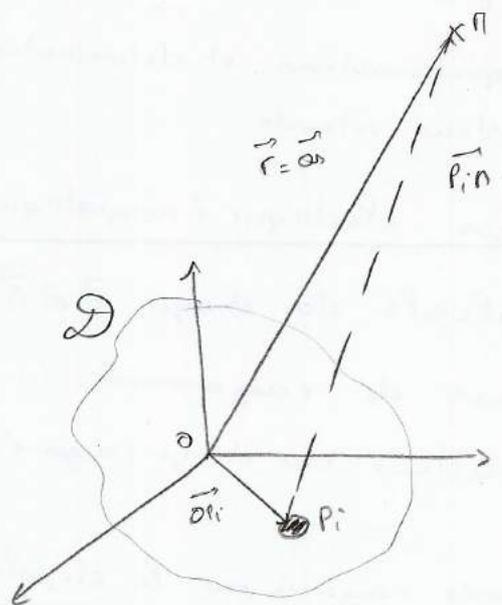
IV Diffusion d'un rayonnement par un électron atomique

- 1) Détermination de la puissance rayonnée
- 2) Diffusion de Thomson ($\omega \gg \omega_0$)
- 3) Diffusion de Rayleigh ($\omega \ll \omega_0$)

Intro: Dans d'autres leçons, nous nous sommes intéressés aux OEN dans le vide ou dans un milieu matériel mais nous nous intéresserons aux moyens de les produire.

C'est ce que nous allons voir maintenant avec le rayonnement dipolaire. c'est ce que produit un champ électromagnétique lorsque des charges sont accélérées.

Regardons tout d'abord le dipôle élémentaire constitué de 2 charges.



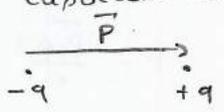
Distribution de charges produisant un champ E. P.

I POSITION DU PROBLEME

(2)

1) Le dipole électrique élémentaire

Considérons un dipôle élémentaire constitué de 2 charges $(-q, +q)$ distantes de d . Alors il \exists un moment dipolaire instantané \vec{p} tel que:

$$\vec{p} = q \vec{d}$$


Pourquoi ce type de dipôle ? car le rayonnement des antennes radioélectriques peut être décrit comme celui de plusieurs dipôles rayonnants élémentaires répartis le long de l'antenne.

Dans le cas d'une répartition discrète de charges au pt P_i : $\vec{p} = \sum q_i \vec{OP}_i$

2) Expressions des potentiels retardés

→ Considérons une distribution de charges occupant un domaine \mathcal{D} de l'espace en notant O l'origine des coordonnées. Ce domaine est le siège de courants créés par le mouvement des \neq charges et on suppose qu'il n'y a pas de charges ni de courants ailleurs ($\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$)

Expression du potentiel vecteur retardé:

$$\vec{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i(\mathbf{r}, t - \frac{R_{Pi}}{c})}{R_{Pi} - \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{R}_{Pi}}{c}} \quad \leftarrow \text{(formule hors programme)}$$

Et en utilisant la jauge de Lorentz ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$), on trouve

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}, 0) - c^2 \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dt \quad \left(\text{calcul inutile car avec } \vec{A} \text{ on peut trouver } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ produits à grande distance} \right)$$

\vec{A} et V sont des potentiels retardés. Ils traduisent le fait que le champ \vec{E} n'a pas mis un certain temps à se propager d'un point à un autre de l'espace.

→ Mais les expressions sont compliquées pour déterminer les champs \vec{E} et \vec{B} , donc on effectue des approximations

3) Approximations et détermination du potentiel vecteur retardé

→ La distance d'observation $OR = r$ est très grande devant les dimensions de la distribution, d , d'où $r \gg d$.

→ Les charges mobiles se déplacent à la vitesse $v \ll c$, charges non relativistes. Or $v = \frac{d}{T}$ avec T le temps d'évolution typique de la distribution de charges d'où $d \ll \lambda$ ($\lambda = cT$).

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i (P, t - \frac{|\vec{r}_i|}{c})}{|\vec{r}_i|^3}$$

Approximations: $t - \frac{|\vec{r}_i|}{c} \approx t - \frac{|\vec{O}P|}{c} = t - \frac{r}{c}$, $r_i \gg \frac{v_i r_i}{c}$

d'où $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \vec{v}_i (P, t - \frac{r}{c})$

Or avec le moment dipolaire $\vec{p} = \sum q_i \vec{O}P_i$
d'où $\dot{\vec{p}} = \sum q_i \vec{v}_i (t - r/c)$

Ainsi: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}} (t - r/c)}{r}$

II CHAMPS ELECTRIQUE - MAGNETIQUE RAYONNES

1) Calculs des champs \vec{E} et \vec{B}

Pour simplifier les calculs considérons $\vec{p} = p \vec{e}_3$ (1 direction)

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p} \cos \theta}{r} \vec{e}_r - \frac{\dot{p} \sin \theta}{r} \vec{e}_\theta \right)$$

avec $\dot{p} = \dot{p}(t - r/c)$

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \wedge \left(\frac{\dot{p} \cos \theta}{r} \vec{e}_r \right) - \nabla \wedge \left(\frac{\dot{p} \sin \theta}{r} \vec{e}_\theta \right) \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \left(\frac{\dot{p} \cos \theta}{r} \right) \wedge \vec{e}_r + \frac{\dot{p} \cos \theta}{r} \nabla \wedge \vec{e}_r - \nabla \left(\frac{\dot{p} \sin \theta}{r} \right) \wedge \vec{e}_\theta - \frac{\dot{p} \sin \theta}{r} \nabla \wedge \vec{e}_\theta \right)$$

Or en coord. sphériques: $\nabla \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$, $\nabla \wedge \vec{e}_\theta = \frac{\vec{e}_\varphi}{r}$

et $\frac{\partial \dot{p}(t - r/c)}{\partial r} = -\frac{\ddot{p}}{c}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\varphi - \sin \theta \left(-\frac{\dot{p}}{r^2} - \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \vec{e}_\varphi - \frac{\ddot{p}}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

Pour \vec{E} , $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$ (3)

D'où $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{2p\cos\theta}{r^3} + \frac{2\dot{p}\cos\theta}{r^2c} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{p\sin\theta}{r^3} + \frac{\dot{p}\sin\theta}{r^2c} + \frac{\ddot{p}\sin\theta}{rc^2} \right) \vec{e}_\theta \right]$

2) Zones de rayonnement.

Lorsque la charge est animée d'un mouvement oscillatoire,

$$p = p_0 \cos(\omega(t - r/c))$$

$$\dot{p} = -p_0 \omega \sin(\omega(t - r/c))$$

$$\ddot{p} = -p_0 \omega^2 \cos(\omega(t - r/c))$$

Amplitudes des divers termes:

$$\frac{p}{r^3} \# \frac{p_0}{r^3} \quad \frac{\dot{p}}{r^2c} \# \frac{p_0 \omega}{r^2c} = \frac{p_0 2\pi}{\lambda r^2} = \frac{p_0}{r^3} 2\pi (r/\lambda)$$

$$\frac{\ddot{p}}{rc^2} \# \frac{p_0 \omega^2}{rc^2} = \frac{p_0}{r} \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) = \frac{p_0}{r^3} 4\pi^2 \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

- 3 zones:
- $r \ll \lambda$: $\frac{p}{r^3}$ qui prédomine : zone statique
 - $r \# \lambda$: $\frac{\dot{p}}{r^2c}$ qui " " : zone intermédiaire
 - $r \gg \lambda$: $\frac{\ddot{p}}{rc^2}$ " " : zone de rayonnement

3) Structure du champ rayonné

Avec ce qui précède, on en déduit :

$$\vec{E}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin\theta}{r} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin\theta}{rc} \vec{e}_\phi$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{ray}} \perp \vec{O} \vec{r} \\ (\vec{e}_r, \vec{E}, \vec{B}) : \text{trièdre direct} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{\text{ray}} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}_{\text{ray}}}{c}$$

Conclusion: - Dans la zone de rayonnement, le champ électromagnétique a localement la structure d'une onde plane se propageant dans la direction \vec{u}_r , à la vitesse c .

Commentaires: - Le champ dépend de $\sin\theta$, il est nul sur l'axe du dipôle ($\theta = 0$ ou π) et maximal dans le plan équatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

• Pour le champ rayonné, on prend la dérivée seconde du moment dipolaire \Rightarrow seules les charges accélérées rayonnent un champ électromagnétique. (utilisé dans les accélérateurs de particules pour produire des rayons X).

III PUISSANCE RAY PAR LE DIPOLE OSCILLANT

1) Le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}_{\text{ray}} \wedge \vec{B}_{\text{ray}}}{\mu_0} = \frac{E \vec{e}_\theta \wedge \frac{E}{c} \vec{e}_\varphi}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{\ddot{p}^2 (1 - \frac{r}{c}) \sin^2 \theta}{r^2 c} \vec{e}_r$$

Commentaires: La puissance rayonnée est anisotrope. Aucune puissance n'est rayonnée selon l'axe du dipôle. Le vecteur de Poynting est toujours radial: l'énergie E produite à grande distance est toujours cédée par le syst de charges en mouvement au milieu ext. et pas l'inverse.

2) Puissance totale rayonnée

C'est la flux de $\vec{\Pi}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r .

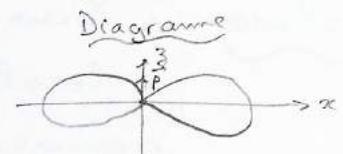
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_r dS \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{r^2 c} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi c} \ddot{p}^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$\left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^\pi \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \right)$$

$$= \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{D'où } \mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2$$



Commentaires: • La puissance rayonnée ne dépend pas explicitement de r
 \Rightarrow caractéristique de l'énergie E .

3) Formule de Larmor

$$\vec{p} = q \vec{NP} \Rightarrow \vec{p}_0 = q \vec{z}_0 \quad (4)$$

Accélération d'une charge q : $a = -30 \omega^2 \cos(\omega t - r/c)$

$$\text{d'où } \langle a^2 \rangle = 30^2 \frac{\omega^4}{2} = \frac{p_0^2}{q^2} \frac{\omega^4}{2}$$

$$\text{d'où } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \langle a^2 \rangle$$

$$\text{car } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

Larmor.

IV DIFFUSION D'UN RAYONNEMENT PAR UN ELECTRON ATOMIQUE

On considère un champ E_n se propageant ds un milieu matériel constitué d'atomes et tente de comprendre l'effet qu'il produit ds le milieu: les e^- des atomes vont se déplacer sous l'action du champ E_n (les noyaux restent fixes). Les charges se déplacent dc, en acquérant un moment dipolaire variable.

1) Détermination de la puissance rayonnée

Syst : $\{e^-\}$

- Forces :
- force élastique = $-m\omega_0^2 \vec{r}$
 - force de frottement visqueuse = $-\delta \dot{\vec{r}}$
 - force due à un champ électrique sinusoidal ext = $-q E_m e^{-j\omega t} \vec{e}_3$

PPD sur l'axe \vec{e}_3 :

$$m \ddot{z} = -m\omega_0^2 z - \delta \dot{z} - q E_m e^{-i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{1}{\sigma} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{q E_m}{m} e^{-i\omega t} \quad \text{avec } \sigma = \frac{\delta}{m}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-q E_m e^{-i\omega t}}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i\omega}{\sigma})}$$

$$\vec{p} = -q z \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{p} = \frac{q^2 E_m e^{-i\omega t}}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i\omega}{\sigma})} \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{p} = p_0(\omega) e^{-i\omega t}$$

avec $p_0(\omega) = \frac{q^2 E_m}{m((\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega}{Q})}$

D'où $\langle P \rangle = \frac{p_0^2(\omega) \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{q^4 E_m^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3 m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/Q^2)}$

2) Diffusion de Thomson ($\omega \gg \omega_0$)

$\langle P \rangle = \frac{q^4 E_m^2}{12\pi \epsilon_0 c^3 m}$

La puissance diffusée est indépendante de ω et de λ .

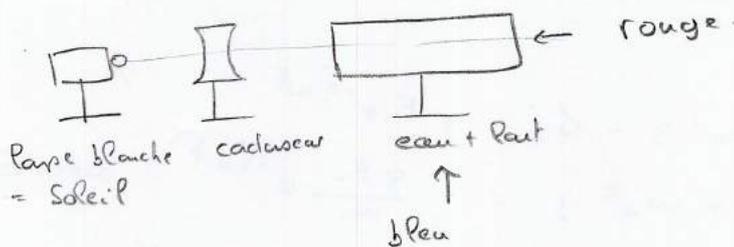
3) Diffusion de Rayleigh ($\omega \ll \omega_0$)

$\langle P \rangle = \frac{q^4 E_m^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3 m \omega_0^4}$

avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$\Rightarrow \langle P \rangle \propto \frac{1}{\lambda^4}$ (si $\lambda \uparrow$, $\langle P \rangle \uparrow$)

Puisque l'onde excitatrice est le Soleil, l'atmosphère diffuse \oplus les radiations bleues que les radiations rouges.
 Au soleil couchant, qd l'onde a traversé une couche d'atmosphère suffisamment épaisse, le bleu est très atténué alors que le rouge ne l'est presque pas \Rightarrow le ciel apparaît rouge.



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \right) \sin\theta \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \sin\theta \right) \wedge \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \sin\theta + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \sin\theta \right) \vec{\nabla} \wedge \vec{e}_\varphi \right.$$

$$\left. + \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \sin\theta \right) \wedge \vec{e}_\varphi \right)$$

$$\cdot \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \sin\theta + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \sin\theta \right) \vec{\nabla} \wedge \vec{e}_\varphi$$

$$= \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \sin\theta + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \sin\theta \right) \left(\frac{\cos\theta}{r \sin\theta} \vec{e}_r - \frac{\vec{e}_\theta}{r} \right)$$

$$= \left(\frac{\ddot{\vec{p}} \cos\theta}{r^2 c} + \frac{\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^3} \right) \vec{e}_r - \left(\frac{\ddot{\vec{p}} \sin\theta}{r^2 c} + \frac{\dot{\vec{p}} \sin\theta}{r^3} \right) \vec{e}_\theta$$

$$\cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc} \sin\theta \right) \wedge \vec{e}_\varphi = \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc^2} \sin\theta + \frac{\dot{\vec{p}} \sin\theta}{r^2 c} \right) \vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^2 c} \vec{e}_r$$

$$\cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \sin\theta \right) \wedge \vec{e}_\varphi = \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 c} \sin\theta + \frac{2\dot{\vec{p}} \sin\theta}{r^3} \right) \vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^3} \vec{e}_r$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^3} + \frac{2\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^2 c} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\dot{\vec{p}} \sin\theta}{r^3} + \frac{\ddot{\vec{p}} \sin\theta}{r^2 c} + \frac{\ddot{\vec{p}} \sin\theta}{r c^2} \right) \vec{e}_\theta$$

(intégrer et ⊗ par c?)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^3} + \frac{2\dot{\vec{p}} \cos\theta}{r^2 c} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{r^3} + \frac{\ddot{\vec{p}}}{r^2 c} + \frac{\ddot{\vec{p}}}{r c^2} \right) \sin\theta \vec{e}_\theta$$

Rayonnement dipolaire.

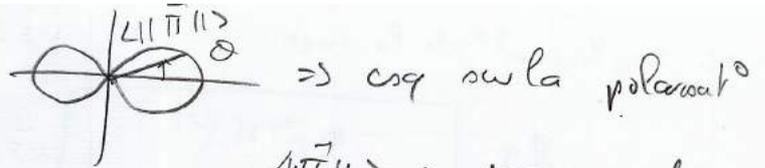
Demo pour calculer E.

$\lambda_{\text{bleu}} = \frac{\lambda_{\text{rouge}}}{2} \Rightarrow$ La puissance de flux est 16 fois \oplus élevée de le bleu que dans le rouge, ce qui explique que le ciel est bleu.

Lors nous regardons le soleil couchant, il nous apparaît rouge. En effet la lumière venue par le soleil traversant une grande épaisseur d'atmosphère s'appauvrit en bleu, elle est donc si décolorée rouge. car la distance d'atténuation est 16 fois \oplus importante pour le bleu que pour le rouge.

Les dipôles absorbent une partie du rayonnement incident et le réémettent, sous forme de ray dipolaires de tout l'espace. C'est pour cela que les pulsations de \oplus haute ω (bleu) que ce phénomène est important. Le faisceau de lumière blanche initiale va de au cours du chemin, s'appauvrit en ray de haute freq. En partie de cause, la quasi totalité de l'énergie associée au bleu a été absorbée et reconstruite par les dipôles dipolaires par les ω lipidiques et occulés les composantes de \oplus basse pulsation (rouge) est transmises avec une faible atténuation.

$\langle \vec{\Pi} \rangle \propto \sin^2 \theta$



$\langle \vec{\Pi} \rangle$: puissance surfacique
éclairement en optique.

-> analyse de la polarisation

-> analyse préalable des symétries.

(1)

$$\vec{A} = f(r,t) \vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (f) \vec{e}_3 = \frac{df}{dr} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_3$$

avec $\vec{A} = \int (r,t) \vec{e}_3$

descript° des vitesses des particules : ici particules particulières.
(maximal)

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P, \frac{t-PA}{c})}{r} \text{eulerien}$$

potentiel scalaire en statique et on prend en compte des
retards.

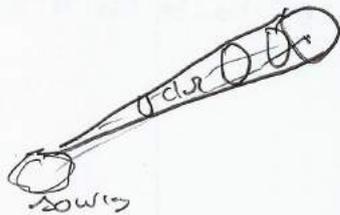
analyse des symétries :



rayonnent d'une charge

$\vec{B} \otimes$ Plan (0, z) pla de symétrie
de B derrière

=> sur l'axe du dipôle $\vec{B}_{\vec{e}_3} = \vec{0}$.



ode à très grande distance.

=> localent. on a une axe plane

planéité si savoir comment.
on a une axe plane

=> $\langle \vec{\Pi} \rangle \propto$ avec carrés de l'amplitude du champ électrique

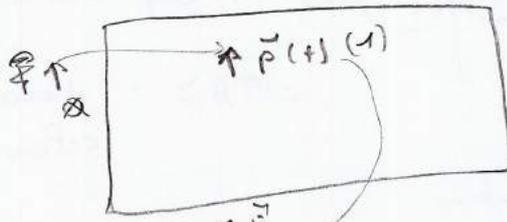
=> $\langle \vec{\Pi} \rangle \propto f(r,t) \frac{E^2}{c^2}$

=> puissance rayonnée : $dP \propto dr r^2 f(r,t) \frac{E^2}{c^2}$

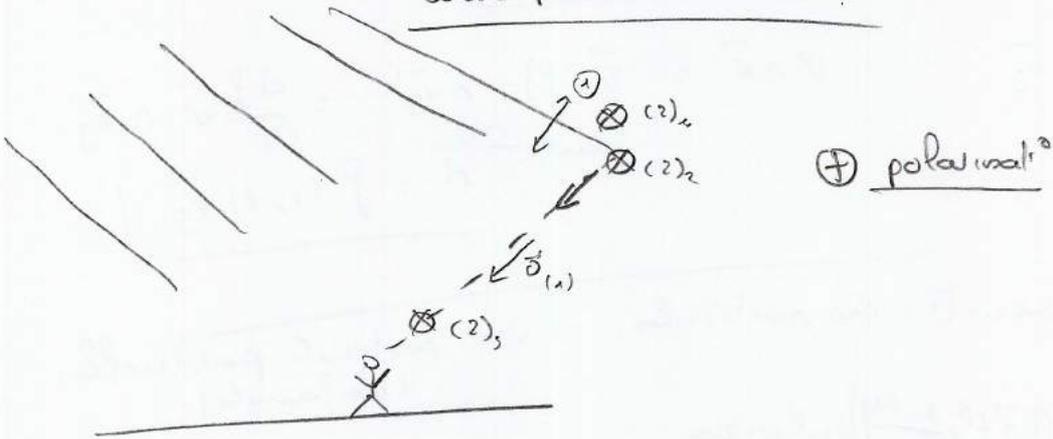
=> conservation de P : P indpt de r => $E \propto \frac{1}{r}$

⇒ expliquer de la luce.

(1)



↑ E_{ind}
 lumière polarisée verticalement.



$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (p(t) - \frac{1}{c} \dot{p}(t)) = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} (-\frac{1}{c})$$

\vec{r} : déplacement du centre du barycentre des e^-
 / \vec{r} au barycentre du noyau.



\vec{r}_g : déplacement due aux choses et au rayon (polarisation)

phénomène pas.

module planétaire Bohr :

e^- tourne ds le noyau.

$$M \omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

accélération

↓
 Pray : $E = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\sigma \approx \frac{E}{P_{ray}} = 10^{-14}$$

⇒

(FTN)

rayonnement dipolaire magnétique avec transit atantig.

antennes : on sait de l'approximation : ($\lambda \ll r$ pas valable) mais l'approximation petit élément, OK. mais il ressemble car champ magnétique n'est nul sur l'axe OK

CP 31: Présentation de l'OG à l'aide du principe de Fermat:

Niveau: NPSE

Biblio: (1) Pégis optique
(2) Becherer, optique géo
(3) Houard, optique
(4) F. Roualt, optique.

Pre-requis:

Plan: I Cadre de l'étude et présentation du principe (2)

- 1) Rayons lumineux
- 2) Chemin optique
- 3) Principe de Fermat

II Lois de l'opt géo

- 1) Propagation rectiligne (2)
- 2) Retour inverse (1)
- 3) Lois de Snell Descartes (1)
- 4) Loi paraxiale de l'OG (1)
- 5) mirages (3).

III Stigmatisme (1, 2, 4).

- 1) Rigoureuse
- 2) Approche.

Intro: Voir (B) : comparaison des démonstrations de Descartes et Huygens sur les lois de l'optique géométrique.
• Principe de Fermat précède le principe de moindre action en mécanique.

I CADRE DE L'ETUDE ET PRESENTATION DU PRINCIPE

1) Rayons lumineux.

(N) $D \gg \lambda$.

(B): Rayons lumineux: → propagation en ligne droite de manière homogène
→ ndpts les uns des autres
→ propagation de la lumière réversible.

2) Chemin optique.

(B)

\vec{x}

\vec{x}_B

$$t_{AB} = \sum_i \frac{P_i}{v_i} \quad \text{avec } v_i = \frac{c}{n_i}$$

- milieu homogène : $t_{AB} = \frac{1}{c} \sum_i P_i n_i$
- milieu inhomogène : $t_{AB} = \frac{1}{c} \int_A^B dP n$

$$\Rightarrow \text{chemin optique: } \begin{array}{l} \text{homogène: } \angle_{AB} = \sum P_i n_i \\ \text{inhomogène: } \int_A^B dP n = \angle_{AB} \end{array}$$

3) Principe de Fermat

(B)
(ou)
(H)

Principe: La lumière se propage d'un pt A à un pt B en suivant un chemin optique \angle_{AB} stationnaire.

(B) : Bien expliquer le terme de stationnaire en considérant 2 trajets de la lumière et $\frac{\partial \angle_{AB}}{\partial d_i} = 0$

II LOIS DE L'OPTIQUE GEO

1) Propagation rectiligne

(B) Milieu homogène ; indice constant du pt $\angle_{AB} = n \sum P_i = n P_{AB}$.
 \angle_{AB} doit être minimum \Rightarrow propagation rectiligne.

2) Retour inverse

$$(B) \angle_{AB} = \int_A^B n ds = \int_B^A n (-ds) = \int_B^A n ds' = \angle_{BA}$$

\angle_{AB} stationnaire $\Rightarrow \angle_{BA}$ aussi \Rightarrow le trajet de la lumière ne dépend pas du sens de parcours.

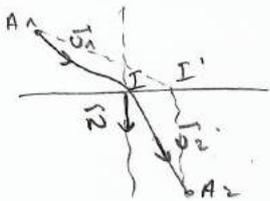
3) Loi de Snell Descartes

$AB = \vec{u} \cdot \vec{AB}$ \vec{u} vecteur unitaire porté par le rayon de A vers B.

$$\angle(AB) = n AB = n \vec{u} \cdot \vec{AB}$$

$$\bullet \quad d\angle(AB) = n d(\vec{u} \cdot \vec{AB}) = n \vec{AB} \cdot d\vec{u} + n \vec{u} \cdot d\vec{AB} \\ = n \vec{AB} \cdot d\vec{u} + n \vec{u} \cdot (d\vec{OB} - d\vec{OA})$$

$$\Rightarrow \underline{d\angle(AB) = n \vec{u} (d\vec{OB} - d\vec{OA})}$$



$$\angle(A_1 A_2) = n_1 A_1 I + n_2 I A_2$$

$$\Rightarrow \delta L = n_1 \vec{u}_1 \cdot \delta \vec{I} - n_2 \vec{u}_2 \cdot \delta \vec{I} \\ = -\delta \vec{I} \cdot (n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1)$$

$$\vec{c} \delta L = 0 \Rightarrow n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{n}$$

Loi de la refraction:

$$\rightarrow \vec{u}_2 = \frac{n_1 \vec{u}_1 + a \vec{n}}{n_2} \Rightarrow \vec{u}_2 \in \text{C}(\vec{u}_1, \vec{n})$$

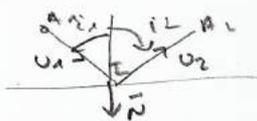
\Rightarrow rayon réfracté \in au plan d'incidence.

$$\rightarrow n_1(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1) = a \vec{n} \wedge \vec{n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow n_2 (\vec{n} \wedge \vec{u}_2) = n_1 \vec{n} \wedge \vec{u}_1$$

$$\Leftrightarrow n_2 \sin r_2 = n_1 \sin i_1$$

Loi de la réflexion:



$$\rightarrow \vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \left(\frac{a}{n_2}\right) \vec{n}$$

\Rightarrow rayon réfléchi \in au plan d'incidence.

$$\rightarrow \vec{n} \wedge \vec{u}_2 = n \vec{n} \wedge \vec{u}_1$$

$$\Leftrightarrow -n \sin r_2 = n \sin i_1$$

$$\Leftrightarrow r_2 = -i_1$$

4) Loi fondamentale de l'OS.

(P) Formulation vectorielle des lois de Snell Descartes permet d'établir l'équation cliff de la trajectoire d'un rayon lumineux ds un milieu non homogène.

$$d(n\vec{u}) = a \vec{n}$$

$$dn \vec{u} + n d\vec{u} = a' \vec{\nabla} n$$

\vec{n} et grad n colinéaires $\Rightarrow d(n\vec{u}) = a' \vec{\nabla} n$.

$$\underbrace{\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}}_{\text{car } d\vec{r} = \vec{\nabla} n d\vec{r}} \quad dn + 0 = a' \vec{\nabla} n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = a' \frac{dn}{ds}$$

car $d\vec{r} = \vec{\nabla} n d\vec{r}$

$$\text{d'où } a' = ds \text{ et } \underline{\underline{\frac{dn\vec{u}}{ds} = \vec{\nabla} n}}$$

5) Mirages.

(3) exp: l'air + (eau + eau salée ou eau alcool)

Langue explicative sur les mirages!

III STIOMATISAE.

(P). FR ou BFR 1) Rigoureuse.

Cas : OR-IR : $\angle(A_2, A_1) = \alpha$

Cas (OR-IV) : on a parallèle.

Transitions : Trop rares pour couvrir les besoins de l'urgence.

2) Approché

(P) et BFR ou FR.

CP 32: Microscopies optiques +

CP32
③

Niveau:

(H)
Bibli: Optique, Sylvain Houard
(B) Optiq geo, Becherrowy.

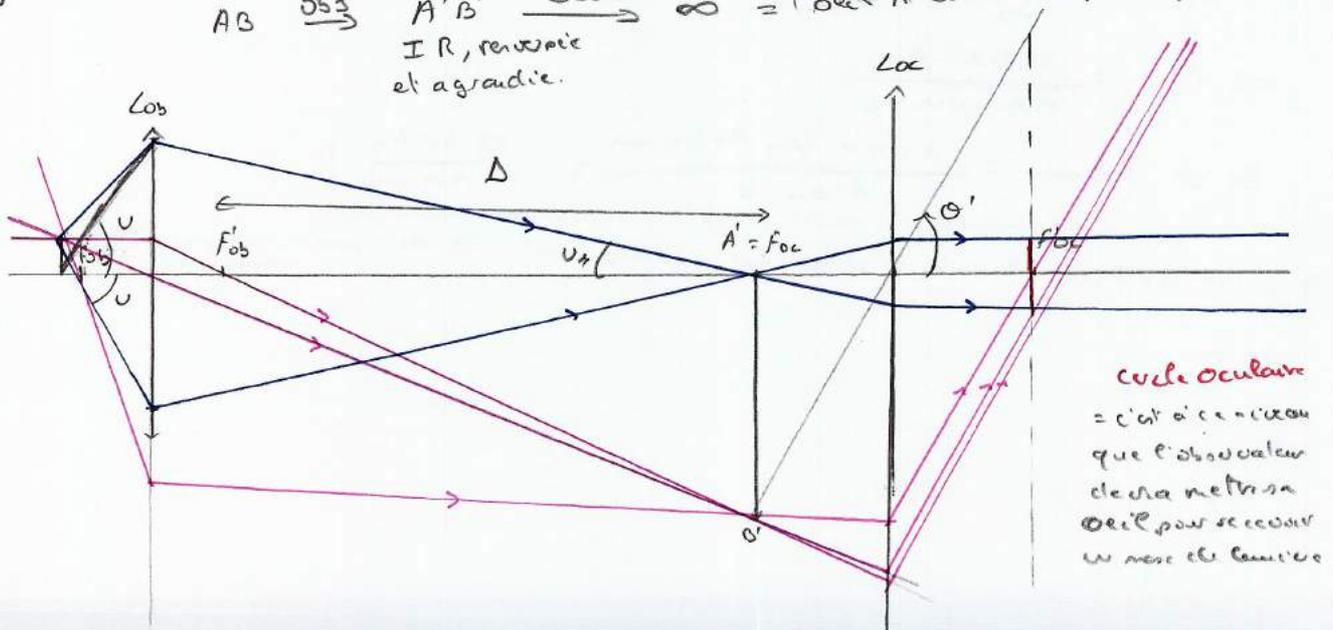
Pré-requis: - optique géo
- diffraction.

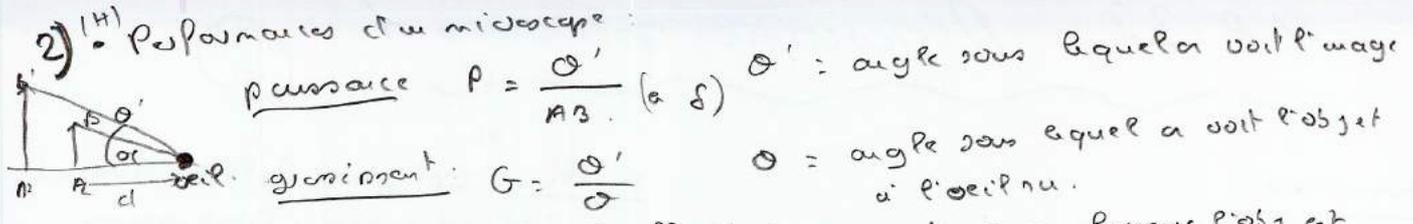
- Plan:
- I Etude géo du microscope optique
 - 1) Obj et oculaire
 - 2) puissance et grossissement
 - II Pouvoir séparateur d'un microscope
 - 1) Limite de résolution
 - 2) Profondeur de champ
 - III Ess de microscope
 - 1) microscope à immersion
 - 2) microscope à fluorescence

Info: (B) Un micro est un instrument qui permet d'obtenir une image agrandie d'objets semblables à l'œil nu. Le microscope optique le plus répandu utilise la lumière visible. Le 1^{er} micro a été construit par les Hollandais Hans et Zacharias Jansen en 1600. Il n'a pas suscité l'enthousiasme des 1^{ers} lecteurs. Actuellement les microscopes de divers types ont attribué à approfondir notre connaissance du monde micro de la Pa. La X en permet pas la bio.

I] 1) (H) - Lentilles : obj et oculaire

AB $\xrightarrow{\text{obj}}$ A'B' $\xrightarrow{\text{oculaire}}$ ∞ = (œil ni accomode pas !)
IR, renversé et agrandie.





2) (H) Performances d'un microscope :

puissance $P = \frac{\theta'}{AB}$ (a d)

θ' : angle sous lequel voit l'image

grossissement $G = \frac{\theta'}{\theta}$

θ : angle sous lequel a voit l'objet à l'œil nu.

\Rightarrow G mesure le rapport des tailles des images relatives lorsque l'obj est vu respectivement à travers un instrument optique et à l'œil nu.

Or $\tan \theta \approx \theta = \frac{AB}{d} \Rightarrow G = \frac{\theta'}{AB} \cdot d = P \cdot d$

• De la pratique on utilise les notions de puissance latérale P_i et de grossissement commercial G_c .

\rightarrow P_i : • image A'B' réglée à l'inf
• œil placé au foyer image de l'oculaire

avec $P_i = \frac{1}{f'_{oc}}$ (donc dans les annexes (41))

G_c de f' à partir du point principal.

$\Rightarrow P_i = |\gamma_{obj}| P_{oc} = \frac{\Delta}{f'_{oc} f'_{ob}}$

$\left| \frac{1}{f'_{ob}} \right.$ puissance de l'obj
 $\left. \frac{\Delta}{f'_{oc}} \right.$ puissance de l'oculaire.

$G_c = |\gamma_{obj}| G_{oc} = \frac{\Delta}{(u_{ob}) f'_{ob} f'_{oc}}$

\rightarrow Pour les calculs numériques.

Transm. (H) La caractéristique la plus importante d'un obj est ω_0 : ouverture numérique

II) (H) La limite de résol. d'un micro est la distance min devant 2 pts A et B de la lamelle échantillon pour que leurs images à travers le micro soient séparées.

Cette distance AB min est usée par la diffraction.

$R_{\lambda} = \frac{0,61 \lambda_{\lambda}}{u_{\lambda}}$ or $\lambda_{\lambda} = \frac{\lambda_0}{n_{\lambda}}$, $u_{\lambda} \approx \sin u_{\lambda}$.

$\Rightarrow R_{\lambda} = \frac{0,61 \lambda_0}{n_{\lambda} \sin u_{\lambda}}$

De ω_0 $AB_{min} = \frac{n_{\lambda} \sin u_{\lambda} \Delta AB_{min}}{n_{\lambda} \sin u_{\lambda}} = \frac{0,61 \lambda_0}{n_{\lambda} \sin u_{\lambda}}$

(B) On définit la ns d'ouverture ω_0 ou ω par $(n \sin u)$

2) (b) La diffraction par le diaphragme d'ouverture affecte aussi la profondeur de champ.

$$\text{profondeur de champ} = \frac{1,22}{\Delta N^2} \lambda \sqrt{n^2 - \Delta^2}$$

LP3
②

III]

1) Pour \uparrow le pouvoir de résolution d'un microscope, on doit \uparrow Δ sans \uparrow les aberrat^o géo. on peut également \uparrow $n = \text{objectif}$ à immersion.

2) Utilisation du phénomène de fluorescence et de phosphorescence.

CP 33: Interférences à 2 axes en optique

CP33
(1)

Niveau: NP

Biblio: Cap ^(C) propa NP

Optiq, Farrow, Renault
(F)

Pré-requis: OEA

- DL
- optique géo.

(S) Sans aucun programme

Plan I Interférences à 2 axes

- 1) Modèle ondulatoire de la lumière (C)
- 2) Superpos^o de 2 axes (C, S)
- 3) Caract^o et interférence (S)

II Figures et interférence et dispositifs

- 1) Allures des figures (C)
- 2) Dispositifs interférentiels (C)
- 3) Exp des Fata di Young (Cap)

III Cohérences

- 1) D'où viennent les cohérences? (F)
- 2) Cohérence spatiale (C)
- 3) " " temporelle (F)

Intro (Cap) Le phénomène d'interférences est une manifestation flagrante de la nature ondulatoire de la lumière. La lumière présente un double caractère: c'est une OEA tout à fait constituée de particules élémentaires sans masse appelées photons: on parle de dualité onde-particule. Cette leçon permet d'étudier le cas simple et interférences à 2 axes et de préciser notamment les caract^o des lesquelles de telles interférences peuvent être observées!

I] 1) Ici nous allons considérer que la lumière se propage de l'avant à l'arrière.
Soit $\vec{E}(\vec{r}, t)$ le champ électrique de l'onde capté \vec{r} à t .
 \Rightarrow vecteur densité de flux de puissance [ON]: $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c \|\vec{E}(\vec{r}, t)\|^2 \vec{u}$.
 \vec{u} : sens de propagation

• Les capteurs optiques et sensibles à la puissance moy reçue.

\Rightarrow on doit regarder l'éclairement \mathcal{E} tq: $\mathcal{E}(n) = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$

$$\mathcal{E}(n) \propto \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$$

(c)

2) Soit 2 ondes monochromatiques:

$$E_1(n, t) = E_{10}(n) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(n)) \quad , \quad \omega_2 = \omega_1 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(n))$$

Par le th de superposit^o: $E(n, t) = E_1(n, t) + E_2(n, t)$

$$\Rightarrow E = E_0 \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = E_0 \left(E_{10}^2 \langle \cos^2(\dots) \rangle + E_{20}^2 \langle \cos^2(\dots) \rangle + 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos(\dots) \cos(\dots) \rangle \right)$$

$$\approx \frac{E_0 c}{2} (E_{10}^2 + E_{20}^2) + E_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left(\langle \cos[\omega_1 + \omega_2]t - (\varphi_1 + \varphi_2) \rangle + \langle \cos[\omega_1 - \omega_2]t - (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \right)$$

$$(s) \cdot \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1 + \varphi_2)) \rangle = \langle \cos(\omega' t - \varphi') \rangle = 0$$

$$(c) \Rightarrow E = E_1 + E_2 + \underbrace{E_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle}_{E_3}$$

On observe des interférences que si $E_3 \neq 0 \Rightarrow E \neq E_1 + E_2$.

→ interférences constructives si $E(n) > E_1(n) + E_2(n)$

→ " destructives si $E(n) < E_1(n) + E_2(n)$.

$$3) (s) \text{ Si } \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow E_3 = E_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = E_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos \Delta \varphi \rangle$$

En optique, le retard de φ varie aléatoirement. Si il varie de manière inégalement $\Delta \varphi$ prend toutes les valeurs possibles avec $\langle \cos(\Delta \varphi) \rangle = 0$

⇒ si les 2 sources ne sont pas en \vec{n} , il n'y a pas d'interférences!

Pour obtenir un phénomène d'interférence il faut stabiliser le déphasage par une durée au Θ égale au $\varphi \varphi \Theta$ où Θ est le t_{ps} de réponse du récepteur. Ceci est réalisé en fabriquant les 2 ondes par clonage d'une seule onde ⇒ sources cohérentes.

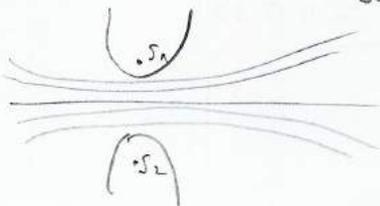
$$\Rightarrow E(n) = E_1 + E_2 + 2 \sqrt{E_1 E_2} \cos \Delta \varphi$$

$$\text{Cas où les 2 sources ont } \vec{n} \text{ éclairant } \Rightarrow E(n) = 2E_0 (1 + \cos(\Delta \varphi(n)))$$

$$\text{II] 1) } \Delta \varphi = \varphi_2(r_2) - \varphi_1(r_1) = \varphi(S_2) - \varphi(S_1) + n\lambda(S_2 - S_1) = k(r_2 - r_1)$$

surfaces d'égal éclairant et les surfaces $tq \Delta \varphi = \text{const} \Rightarrow r_2 - r_1 = \text{const}$.

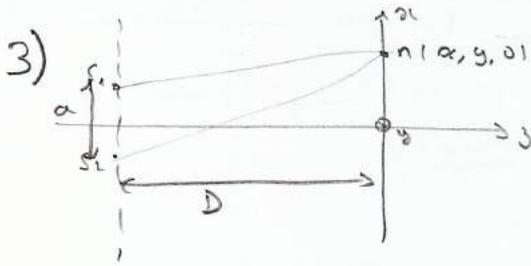
⇒ hyperboles de foyers S_1 et S_2 .



- écran \perp à l'axe des sources : anneaux
- écran // " " : franges quasi rectilignes!

- 2) → syst a distance du fait d'angle : miroirs de Lloyd, Young, ...
 → syst a distance d'amplitude : interférence de Michelson.

CP 3.3
 2



$$\begin{aligned} \delta &= (S_2 n) - (S_1 n) \\ &= S_2 n - S_1 n \\ &= \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} \\ &= D \left(\left(1 + \frac{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

$$D \ll \frac{ax}{D}$$

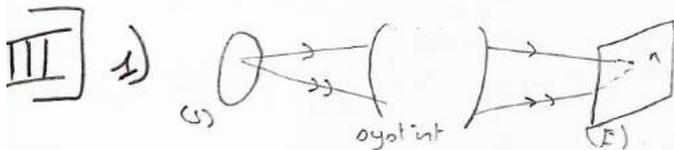
Supposant 2 sources de \vec{n} unitaire \Rightarrow

$$E(x) = 2E_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right)$$

Def: On appelle interférence la distance entre 2 franges brillantes rectilignes consécutives = période spatiale de l'éclairant.

Franges brillantes $\Leftrightarrow \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{ax}{\lambda D} = n \Leftrightarrow x = \frac{\lambda D n}{a}$

$$\Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$$



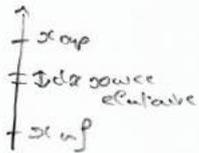
on déf la visibilité V etant

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

qd $V = 1 \Rightarrow$ franges parfaites noires = condit optimale pour obs des interférences!
 mais en general $V < 1$.

- (S) d'où il issue les rayons interfèrent en n n'est pas rigoureusement punctuelle et au pt n peuvent se superposer des phénomènes venant des \neq stes sources, ce qui brouille les franges = cohérence spatiale
 - (S) ne peut être rigoureusement mono, elle a plutôt un intervalle de $\lambda \Rightarrow$ cohérence temporelle
- $\oplus |V_2 - V_3|$ est grand, \oplus cohérence temporelle \uparrow
- et c'est V qui mesure le degré de cohérence!

2) Considérons la largeur de la fente source

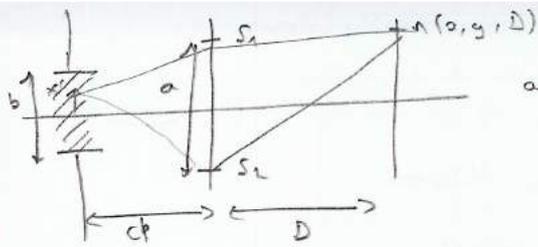


décomposer la source large en une infinité de fentes sources élémentaires de largeur dx . Ces fentes ne sont pas cohérentes entre elles. $\Rightarrow \Sigma E_0$ éclairant.

On attribue à chaque fente source élémentaire un éclairant monochromatique, E d'axe x , $dE_0 = f(x) dx$. avec f la densité spatiale d'E monochromatique qui permet de voir les variat° de l'intensité de la source.

Pour simplifier $dE_0 = f_0 dx$, $E_0 = b f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{E_0}{b}$

$$\Rightarrow dE_0 = \frac{E_0}{b} dx$$



$$dE = 2 dE_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right)$$

avec $\delta = \frac{a \sin \alpha'}{d} + \frac{a \sin \alpha}{D}$ et $dE_0 = \frac{E_0}{b} dx$

$$\Rightarrow E = \frac{2 E_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a \sin \alpha'}{d} + \frac{a \sin \alpha}{D} \right) \right) \right) dx$$

$$\Rightarrow E = 2 E_0 \left(F(b) \cos \left(\frac{2\pi a x}{\lambda D} \right) \right) \text{ avec } F(b) = \text{sinc} \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)$$

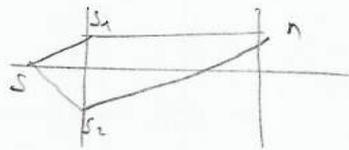
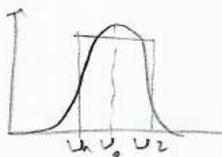
• Si $b = 0 \Rightarrow F(0) = 1 \Rightarrow E = 2 E_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a x}{\lambda D} \right) \right)$

• $C = \frac{E_{\text{min}} - E_{\text{max}}}{E_{\text{min}} + E_{\text{max}}} = |F(b)|$



La val de b caduisant à la 1^{er} annulation est ainsi au ordre de grandeur de la taille max que la source $\frac{\lambda d}{b}$ doit avoir si la source a obstacle frange de bande visible $\Rightarrow P_1 = \frac{\lambda d}{a}$

3) Regardas le caractere mono de la source sur la visibilité des franges. Une source n'est jamais parfaitement mono, chaque ray spectral λ_0 possède une certaine largeur $\Delta \lambda = \Delta \lambda_0$



$$dE_0 = \frac{E_0}{\Delta \lambda} d\lambda$$

$$dE = \frac{2 E_0}{\Delta \lambda} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a x}{D} \right) \right) d\lambda$$

$$E = \int_{\lambda_0 - \frac{\Delta \lambda}{2}}^{\lambda_0 + \frac{\Delta \lambda}{2}} \left(\frac{2 E_0}{\Delta \lambda} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a x}{D \lambda} \right) \right) \right) d\lambda$$

$$= 2 E_0 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi a x}{D \lambda_0} \Delta \lambda \right) \cos \left(\frac{2\pi a x}{D \lambda_0} \lambda_0 \right) \right) = 2 E_0 \left(1 + V \cos \left(\right) \right)$$

$$V = \text{sinc} \left(\frac{\pi a x}{D \lambda_0} \Delta \lambda \right) = V(u)$$



Au contrast pour

$$V < \pi \Leftrightarrow \frac{a x}{D} < c / \Delta \lambda$$

$$\Rightarrow \delta / \frac{c}{\Delta \lambda}, \text{ or } \theta \approx \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow \delta < c \theta = \lambda$$

\Rightarrow La δ entre les trajets parcourus par les ray qui viennent interférer a n doit être inf à la longueur λ en train d'être emi

Calculs pour les franges

LP36: Interferometre a division d'amplitude

LP39
②

Niveau: NP

Biblio: Tauras, opt Pet
electronique

Pré-requis: Interférences a 2 axes

- Cap ppp 1P + PP
- (C) • Rose, Augier, Physi
7cc R doc
CTI.
- Sag NP.

Plan: I Présentation de l'interferometre de nichelson



- 1) Présentation (C)
- 2) Principe / représentation

II Interferometre de nichelson avec une source ponctuelle

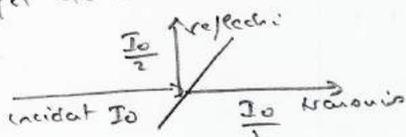
- 1) Lame d'air (schae eq, Pécabiat) (n, T) n non schéma
- 2) Coi d'air (" " " ") (n, T)

III Interferometre de nichelson avec une source étendue

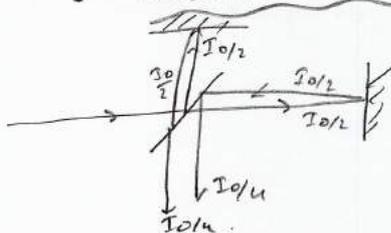
- 1) Lame d'air (Peca, S, ray, Luterplate, applicat*)
- 2) Coi d'air (Peca, franges d'ég épaisseur, applicat*)

Inho: Ici nous étudions de toute la page, l'interferometre de nichelson.
(n) Il a été utilisé pour réaliser l'exp historique de nichelson et Morley - IP.
Il agissait de mettre en évidence l'absence de l'éther par le ref géo
terrestre et de tester la loi de constⁿ des vit de la lumière de la
ref de Copernic et galiléen tg au ref géo.
(c) Les dispositifs d'interférences par division d'amplitude ont des prop
opécifig lorsque l'on utilise en source rouge ...

I) (c) Interferometre de nichelson: → division d'amplitude = separer
le faisceau en 2 parties par une lame semi-réfléchissante qui a pour
effet de transmettre la moitié de la puissance du faisceau = lame séparatrice.



Observation des interférences:

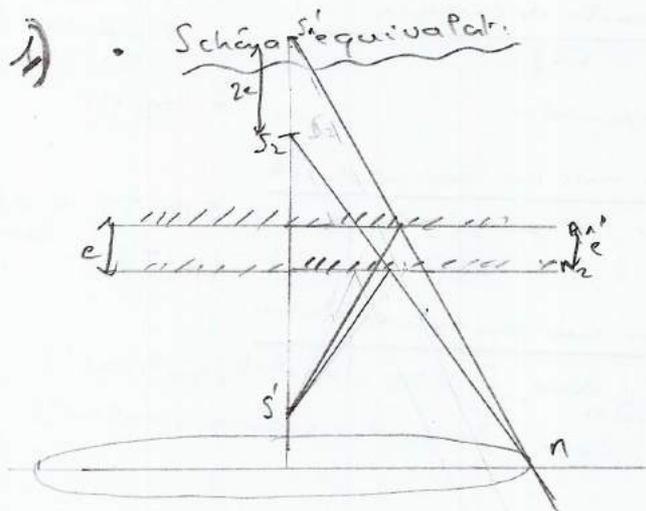


2) Description des rayons émergents : voir (n).

→ 2 configurations possibles :

- l'air
- coin d'air.

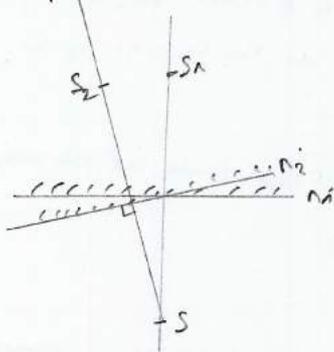
II 1) • Schéma équivalent



(1)
 • ⇒ Interferomètre est employé ici en diaphragme du front d'onde.
 L'effet, 3 rayons interfèrent au pt N ne st pas un seul ray direct par la séparatrice mais provient de 2 ray distincts issus des

franges d'interférences st des anneaux et st non localisés car on peut placer l'écran n'importe où.

2) • Schéma équivalent



Ici interféromètre utilisé en diaphragme du front d'onde

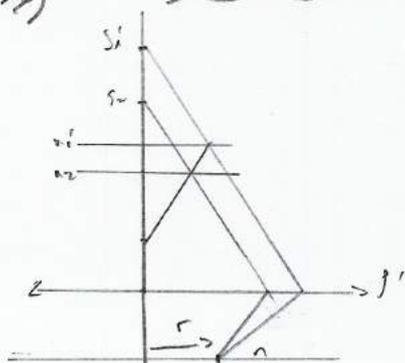
franges d'interférences st rectilignes sur un écran ! (non localisés).

III Transition

Ici franges non localisées !

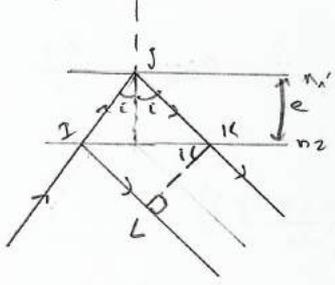
En utilisant une source large, les franges ont devenir lumineuses mais la prise à regarder est la localisation des franges !

III 1) • Schéma équivalent



→ Localisation à l'infini : utilisation d'un lentille de grande focale

→ δ : (Pour les 2 méthodes ... E avec Ch. 10)



$$\begin{aligned}
 (+) \delta(n) &= (SI)_2 - (SN)_2 \\
 &= (\cancel{SI}) + (IJ) + (JK) + (KL) \\
 &\quad - (\cancel{SI}) + (\cancel{SK}) - (\cancel{KL}) \\
 &= 2(IJ) - (IK) \\
 &= \frac{2e}{\cos i} - IK \sin i = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} \\
 \Rightarrow \delta(n) &= 2e \cos i
 \end{aligned}$$

(*) La lame d'air ayant une épaisseur uniforme, la δ est la même en tous les pts n; il n'y a pas de \vec{n} pour l'intensité, un anneau de phase par l'angle i a une intensité uniforme: les franges sont circulaires et égales d'inclinaison.
 ⇒ La source étant étendue, la luminosité des anneaux est bien \propto grande qui avec une source ponctuelle!

(*)

→ Intensité: $p_{\text{ref}} = \frac{2e \cos i}{\lambda_0}$, $p_{\text{max}} = \frac{2e}{\lambda_0} = E \left(\frac{2e}{\lambda_0} \right) + E$, avec $E \in [0, 1]$

pour le que n'a: $p_q = p_1 - q + 1$

$$\Rightarrow \frac{2e \cos i q}{\lambda_0} = E \left(\frac{2e}{\lambda_0} \right) - q + 1$$

$$\frac{DL}{\Rightarrow} \frac{2e}{\lambda_0} (1 - iq) = \frac{2e}{\lambda_0} - E - q + 1$$

$$\Rightarrow iq = \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (E + q - 1)} \quad \Rightarrow r = p' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (E + q - 1)}$$

(*) Supposons pour simplifier que p_{max} soit entier. Les rayons des anneaux $\uparrow \vec{c}$ $\sqrt{q-1}$: les anneaux sont de \oplus et \ominus rapprochés au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre de l'écran.

→ Centre plat: Si $e \searrow$, $r \nearrow$ et du fait que l'arc de cercle est plus petit que le rayon, les anneaux brillent de plus en plus au centre à chaque fois que l'épaisseur optique de la lame varie de $\frac{\lambda_0}{2}$. Zolc = 0, les rayons sont uniformes = centre plat.

→ Resque de l'écart des raies d'un doublet:

Soit du doublet de sodium ds (T):

2λ sont incohérents \Rightarrow les éclairements:

$$\begin{aligned}
 I(n) &= I_1(n) + I_2(n) = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \delta \right) \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \delta \right) \right) \\
 &= 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi D \Delta \lambda}{\lambda^2} \delta \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \delta \right) \right)
 \end{aligned}$$

au centre de l'écran: $\delta = 2e$. Entre 2 cavités nues successifs il faut caractériser de $\Delta e_0 = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta e_0}$

Si on a eu 3 brouillages successifs pour $\Delta e = 0,87 \text{ nm} \Rightarrow \Delta e_0 = \frac{\Delta e}{3}$

(Voir Sang)

$$\lambda_{01} = \lambda_{0m} - \frac{\Delta\lambda}{2}, \quad \lambda_{02} = \lambda_{0m} + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

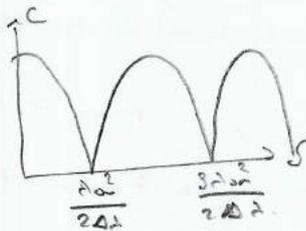
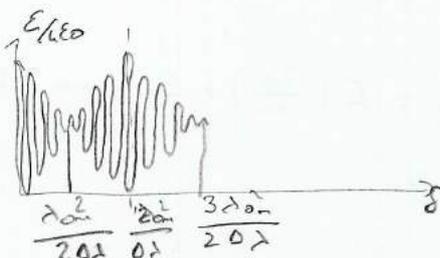
$$\Rightarrow E = 4E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{0m}^2} \delta\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{0m}} \delta\right) \right)$$

$$= E_{\text{moy}} (1 + \Gamma(\delta) \cos(\Delta\psi))$$

$$\Delta\psi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_{0m}}, \quad \Gamma(\delta) = \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_{0m}^2}\right)$$

Γ : pact de δ est la période = à $\frac{2\lambda_{0m}^2}{\Delta\lambda}$

$$E_{\text{max}} = 4E_0 \left(1 + \left| \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{0m}^2} \delta\right) \right| \right) \quad E_{\text{min}} = 4E_0 \left(1 - \left| \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{0m}^2} \delta\right) \right| \right)$$



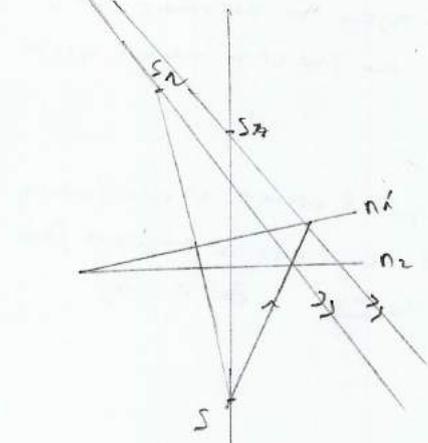
\rightarrow il peut y avoir coincidences ou anti-coïncidences.

(n) (Les ordres d'interférences du doublet diffèrent d'un entier $q + \frac{1}{2}$.)

$$\frac{2e_q}{\lambda_{01}} - \frac{2e_q}{\lambda_{02}} = q + \frac{1}{2} \Rightarrow e_q = \frac{(q + \frac{1}{2}) \lambda_{01} \lambda_{02}}{2(\lambda_{01} - \lambda_{02})}$$

$$\Delta e \approx \frac{\lambda_{0m}^2}{2\Delta\lambda_0}$$

3)



- Localisation près des miroirs \Rightarrow utilisation d'une lentille de courte focale, foyers rectilignes.

- $\delta(m) = 2e \cos i$

✓ CP 35 : DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

①

Niveau : PSE

Biblio → Farrow - Renault
→ Say
→ Cap - prepa
→ Perez.

Pré-requis : • Interférences
• optique géométrique

Plan :

I Mise en équation du phénomène de diffraction

- 1) Principe d'Huyghens - Fresnel
- 2) Diffraction à l'infini
- 3) Expression avec la TF

II Exemples de figures de diffraction

- 1) Par une fente rectangulaire
- 2) Par un trou

III Conséquences et applications

- 1) Limite de résolution
- 2) Théorème de Babinet
- 3) Filtrage des fréquences spatiales.

Intro : exp : diffraction par une fente fine : 

Le faisceau sortant du laser étant \parallel , on pourrait s'attendre à obtenir sur l'écran une tache de largeur a .
(Effectuer l'exp.)

Pour de petites valeurs de a , on constate que la tache de lumière sur l'écran s'élargit au fur et à mesure que $a \rightarrow$

En examinant soigneusement la répartition lumineuse sur l'écran, on constate qu'elle présente une structure : on observe une tache centrale

entourée de tâches 2nd bec \ominus intenses. En présence de diaphragme de petites tailles, la lumière s'écarte des lois de l'OG. \Rightarrow diffracte la lumière. (diffraction pour de petites dimensions).

I MISE EN EQUATION DU PHENOMENE DE DIFFRACTION

1) Principe d'Huygens - Fresnel

L'interprétation quantitative de la diffraction s'appuie sur une théorie exclusivement ondulatoire dont les précurseurs sont Huygens et Fresnel.

Regardons d'abord le principe d'Huygens.

La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte \tilde{c} une source secondaire qui émet des ondes petites sphériques et l'amplitude est proportionnelle à cet élément.

Revenons à l'exemple introductif:

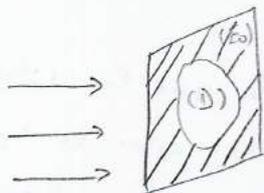


schéma de l'exemple introductif

On interpose, sur un faisceau \parallel , un écran (E_0) normal au faisceau et percé d'une ouverture (D) formant ainsi un diaphragme.

Soit (P) un pt situé derrière (E_0) . L'existence des phénomènes de diffraction montre que l'état vibratoire en (P) est affecté par la présence de (E_0) ; le principe d'Huygens permet de comprendre pourquoi.

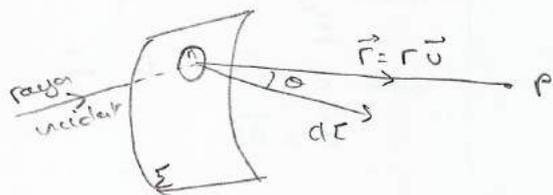
En effet, en mettant en place l'écran (E_0) , on supprime les sources secondaires correspondant aux parties opaques de (E_0) . L'état vibratoire en (P) ne dépend plus que des sources secondaires réparties sur l'ouverture (D) du diaphragme.

Requons ensuite le principe de Fresnel

L'amplitude \mathcal{C} de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes \mathcal{C} des vibrat^o produites par toutes les sources secondaires. On dit que toutes ces vibrations interfèrent pour former la vibration au point considéré.

RQ: L'addition des amplitudes \mathcal{C} découle naturellement de la linéarité des équations de Maxwell auxquelles satisfait le champ E ou F .

Exprémons maintenant l'expression formelle du principe d'H.F



Donc exprimons $d s(P)$, vibration en (P) de la source secondaire issue de l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le pt. n.

Soit λ la longueur d'onde de la radiation, $s(n)$ l'état vibratoire de la radiat^o incidente en n et pour $\vec{r} = \vec{n} \vec{p}$, $r = \|\vec{r}\|$.

La source secondaire est sphérique, donc son amplitude décroît en $\frac{1}{r}$. Par ailleurs de n à P , elle subit, par sa propagation un déphasage $\varphi = kr$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, d'où en introduisant ce facteur k la proportionnalité on a:

$$d s(P) = k s(n) \frac{e^{i k r}}{r} d\Sigma$$

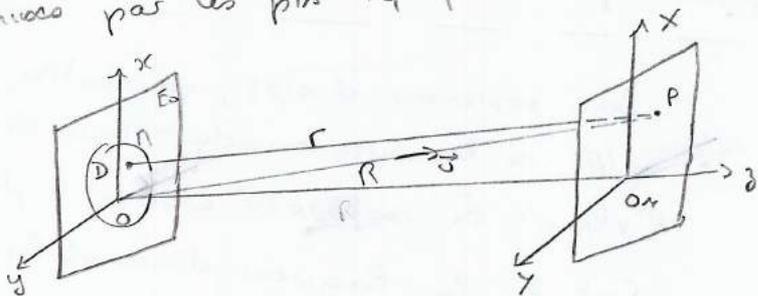
Puisque les vibrations issues des \neq sources secondaires interfèrent entre elles, l'état vibratoire $s(\rho)$ s'obtient en sommant les \neq contributions de $d\sigma(\rho)$ d'où

$$s(\rho) = \iint_{\Sigma} K s(\sigma) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} d\Sigma$$

Transition: Sous cette forme, le principe d'H.F n'est pas évident à mettre en œuvre. En effet, le facteur de proportionnalité K n'a pas été explicité et il dépend a priori de σ . De \oplus , $d\sigma(\rho)$ est ici traité \vec{E} un scalaire, car la lumière correspond à un champ électromagnétique et on peut passer sous certaines particularités les courants que si les champs correspondants sont colinéaires. D'où des approximat° à faire pour exploiter l'expression

2) Approximat° de Fraunhofer

Considérons une onde monochromatique tombant sur un diaphragme plan D . L'amplitude \mathcal{C} de l'onde du plan de D est $s_0(\sigma)$. En P son amplitude \mathcal{C} est la Σ des amplitudes \mathcal{C} des ondes sphériques émises par les pts tq que n . D'où en utilisant le principe de H.F.



$$s(\rho) = \iint_{\Sigma} s_0(\sigma) K \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} d\Sigma$$

avec $\vec{r} = \vec{r}_P$ et $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{R}$
 $\vec{R} = \vec{OP}$.

$$r = \left((x-x)^2 + (y-y)^2 + z^2 \right)^{1/2} = (x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2xX - 2yY)^{1/2}$$

$$\text{Or } R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{d'où } r = R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{2xX + 2yY}{R^2} \right)^{1/2}$$

Supposons que R soit grand devant les autres dimensions (= approximat° de Fraunhofer), de telle sorte que Q soit une onde et que r ne contribue que les termes linéaires en x ou y tq

$$\begin{aligned} r &= R \left(1 - \frac{2xX + 2yY}{R^2} \right)^{1/2} \approx R \left(1 - \frac{xX + yY}{R^2} \right) \\ &= R - (\alpha x + \beta y) \text{ avec } \alpha = \frac{x}{R} \text{ et } \beta = \frac{y}{R} \end{aligned} \quad (3)$$

Donc α et β st les cosinus, suivant les axes Ox et Oy du vecteur unitaire $\vec{e} = \frac{\vec{OP}}{OP}$ alors :

$$r = R - \vec{e} \cdot \vec{On}$$

d'où
$$s(P) = K \iint_{(D)} s_0(n) \frac{e^{i k R} e^{-i k \vec{e} \cdot \vec{On}}}{R} dS$$

$$s(P) = \frac{K}{R} e^{i k R} \iint_{(D)} s_0(n) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{On}} \text{ avec } \vec{k} = k \vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{OP}}{OP}$$

Formule fondamentale de la diffraction à l'infini

3) Expression avec la TF

Dans la formule précédente, on a considéré la surface de l'ouverture comme étant transparente. Dans certains cas, cette ouverture peut être caractérisée en chaque pt par un coeff de transmission pour l'amplitude $t(x, y)$; d'où

$$s(P) = s(\alpha, \beta) = \frac{K}{R} e^{i k R} \iint_{(D)} t(x, y) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx dy$$

$$\text{d'où } s(\alpha, \beta) = \frac{K}{R} e^{i k R} \iint_{(E_0)} t(x, y) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx dy$$

C'est la Transformée de Fourier de la transparence.

RQ : • $(x, y) \in D$, $t(x, y) = 1$ pour un trou.

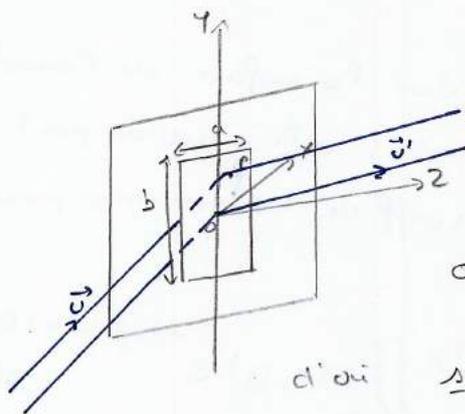
F • $(x, y) \notin D$, $t(x, y) = 0$.

C • avec la TF on trouve des propriétés de la diffraction.
(translation et dilatation de la pupille diffractante)

- La figure de diffraction reste \perp à la pente source lorsqu'on tourne cette dernière
- si on translate dans son plan la pente diffractante, la figure ne change pas.
- Si on élargit la pente, la figure de diffraction rétrécit.

II EXEMPLES DE FIGURE DE DIFFRACTION

1) Par une pente rectangulaire



$$\vec{r}' \begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{vmatrix} \quad \vec{r} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

$$\underline{A}(\alpha) = A e^{i k_0 (S \alpha)} \iint e^{-i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{\alpha}} dS$$

$$\text{or } (\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((\alpha' - \alpha)x + (\beta' - \beta)y)$$

$$\text{d'où } \underline{A}(\alpha) = A e^{i k_0 (S \alpha)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} ((\alpha' - \alpha)x + (\beta' - \beta)y)} dx dy$$

$$= A e^{i k_0 (S \alpha)} \left[\frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha' - \alpha)x}}{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha' - \alpha)} \right]_{-a/2}^{a/2} \cdot \left[\frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta' - \beta)y}}{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta' - \beta)} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= A a b e^{i k_0 (S \alpha)} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} (\alpha' - \alpha) \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda_0} (\beta' - \beta) \right)$$

$$\text{d'où l'éclairement vaut: } \mathcal{E} = S \operatorname{sinc}^2(\alpha)$$

$$= A^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} (\alpha' - \alpha) \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda_0} (\beta' - \beta) \right)$$

Etudions \mathcal{E}

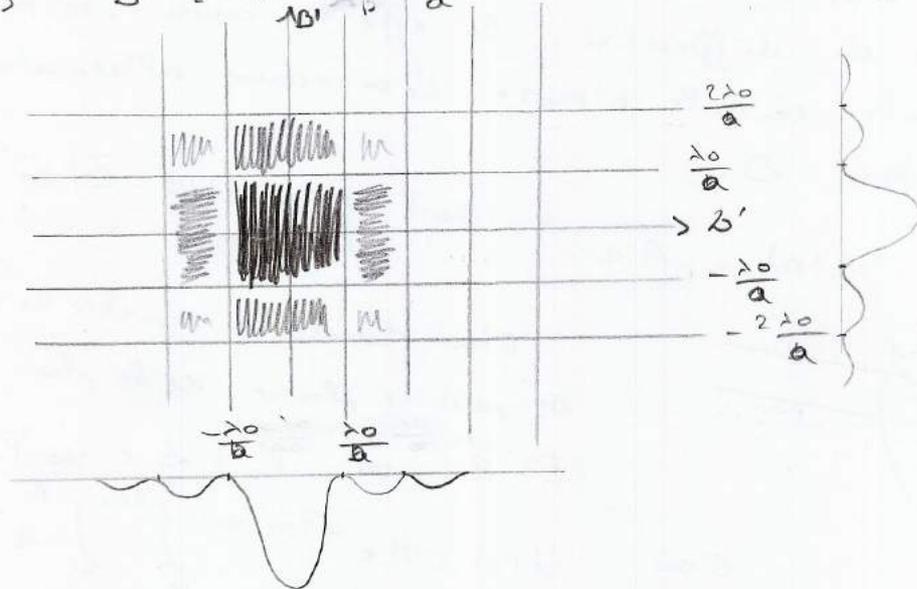
P étant fixe, alors (α, β) est fixe, seuls (α', β') varient.

- $E(\alpha', \beta')$ max qd $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_0}(\alpha' - \alpha)\right) = 1$ et $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda_0}(\beta' - \beta)\right) = 1$ 4
soit qd $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$

Ainsi le maximum d'éclairement est obtenu pour le rayon non dévié, celui qui respecte les lois de l'optique géométrique. Dans ce cas, toutes les arêtes des sources secondaires interfèrent constructivement, elles sont de la phase de λ est l'image de S .

Generalisation: en diffraction de Fraunhofer, le max d'éclairement est toujours obtenu au niveau de l'image géo de la source.

- $E(\alpha', \beta')$ min qd $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_0}(\alpha' - \alpha)\right) = 0$ ou $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda_0}(\beta' - \beta)\right) = 0$
 $\Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda_0}(\alpha' - \alpha) = n\pi$ ou $\frac{\pi b}{\lambda_0}(\beta' - \beta) = m\pi$
 $\Rightarrow \alpha' = \alpha + \frac{n\lambda_0}{a}$ ou $\beta' = \beta + \frac{m\lambda_0}{b}$

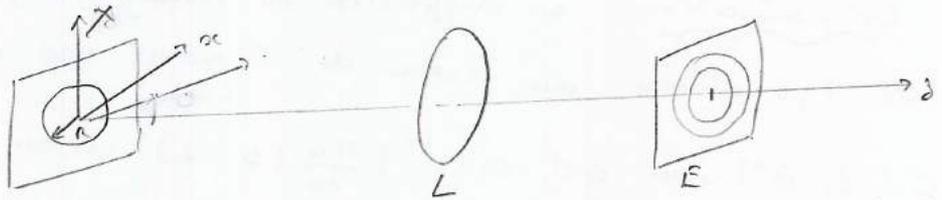


RQ: Dans le cas d'une fente fine ($b \gg a$), le maximum central est beaucoup plus étroit que celui de α . Il n'y a pratiquement pas de lumière en dehors de $\beta = 0$.
d'où $E(\alpha) = A^2 a^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_0}(\alpha' - \alpha)\right)$.

2) Par une pupille circulaire

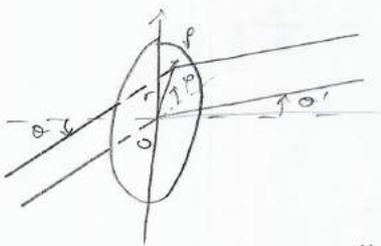
La diffraction a lieu par une ouverture circulaire de rayon R est en cas important de la pratique: il correspond en effet des faisceaux lumineux par les miroirs et les lentilles des instruments d'optiques.

Partage?



Etant donné la symétrie de révolution (autour de l'axe z) de la pupille, on s'attend à voir cette symétrie au niveau de la tâche de diffraction. En effet on aura, on aura une tâche brillante centrale entourée d'anneaux alternativement sombres et brillants. D'où

$$s(r) = A e^{i k_0 z} \iint e^{-i(\vec{e}' - \vec{e}) \cdot \vec{r}'} dS$$



Etant donnée la symétrie de révolution du pb, on peut se placer ds le plan $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ ($\vec{e}' - \vec{e}) \cdot \vec{r}' = k_0 (r' \cos \varphi)$.

$$d'où \quad s(r) = A e^{i k_0 z} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} r' \cos \varphi} r' dr' d\varphi$$

Cette exp ne s'intègre pas au moyen des pts élémentaires mais nécessite l'introduction "des pts de Bessel".

On obtient que la tâche centrale a un rayon $\frac{0,61 \lambda}{\alpha}$

où la tâche centrale porte le nom de tâche d'Airy.

III

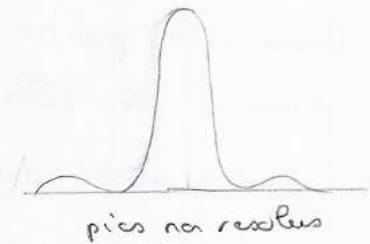
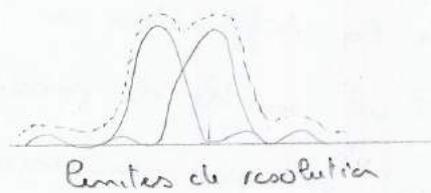
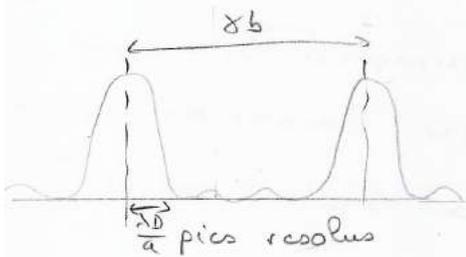
CONSEQUENCES ET APPLICATIONS

(5)

1) Limite de résolution

La diffraction limite la performance des instruments d'optique.

En effet, si l'on forme l'image de 2 pts voisins, on obtient en réalité 2 tâches de diffraction, qui si les 2 pts sont très rapprochés, finissent par empiéter l'un sur l'autre. Si cet empiètement est trop fort, on ne peut plus distinguer les images de ces 2 pts. On dit alors que le syst optique ne peut plus séparer les 2 pts.



La distance minimale qui doit séparer les 2 images pour qu'on les distingue est donnée par le Critère de Rayleigh:

On distingue 2 figures de diffraction lorsque le max principal de chacune des figures se trouve à l'extérieur de la tâche centrale de l'autre figure.

$$\Delta b = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

2) Théorème de Babinet

2 échantillons sont dits complémentaires si les parties opaques de l'un correspondent aux parties transparentes de l'autre soit $\forall P \in E, t_1(P) + t_2(P) = 1$.

Par linéarité de la formule de diffraction de Fraunhofer on a:

$$\Delta(n) = \Delta_1(n, t) + \Delta_2(n, t) = A e^{-i k_0 (S_0 n)} \left(\iint_{S_1} t_1(\vec{r}) e^{i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n}} d\vec{S} \right. \\ \left. + \iint_{S_2} t_2(\vec{r}) e^{i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n}} d\vec{S} \right) = A e^{-i k_0 (S_0 n)} \iint e^{i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n}} d\vec{S}$$

Cette dernière intégrale correspond au cas où il n'y a pas d'objet diffractant de la plan objet, elle est de nulle en n , différent de S' d'où $\Delta_1(n) = -\Delta_2(n)$ pour $n \neq S'$ et $E_1(n) = E_2(n)$.

$$\Delta(n) = 0 \text{ si } n \neq S' \\ \Delta(n) = t_0 \text{ si } n = S'$$

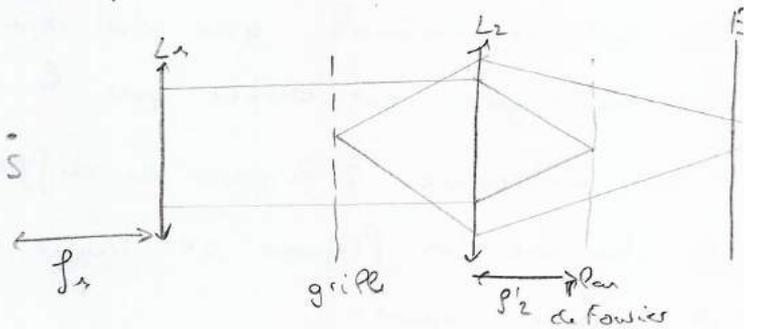
Th de Babinet. La figure de diffraction produite par 2 pupilles complémentaires est la \hat{m} , sauf dans la direction de l'optique géo

Secteur 3) Filtrage des fréquences spatiales

Dans cette partie nous allons illustrer, à l'aide de l'exemple d'Abbe, le rôle de la diffraction en formation des images et de montrer qu'il est possible de modifier l'image géométrique d'un objet par un syst optique en agissant directement sur le spectre de ses fréquences spatiales.

Schéma de l'ex

LASER



L_2 a un double rôle:

- L_2 conjugué l'objet diffractant (griPE) sur l'écran.
- $L_1 + L_2$ conjugué la source ponctuelle avec le plan de Fourier. c'est dans ce plan qu'on observe la figure de diffraction de

Fraunhofer et qui a poura filtrer spatialement les fréquences.

- En effet si on place une fente verticale de la plan de Fourier, on passe par tous les fréquences spatiales en y alors qu'en x, elles st coupées

Alors on a réalisé un passe bas sur x et un passe tout ou y. (6)
Et DC comme les fréquences en y sont conservées, on ne voit plus que
les lignes horizontales (variations de la transparence en y).

Conclusion : Diffraction : interférences de plusieurs ordres
secondaires.

CP 36 Diffraction par des structures périodiques

①

Niveau: L3

Biblio: (BFR optique)
 (Percutatoire)
 • Costello géo et radio-onstallo (Koussan)
 (Si il n'y a pas de lien cela vaut...)
 • Sonntag

Pre-requis: - diffraction de Fraunhofer
 - interférence
 - TF : notion de réseau réciproque et plan réticulaire

Plan: I Diffraction par un réseau

- 1) Présentation (BFR)
- 2) Formules du réseau (TF)
- 3) Etude de l'éclairement (T, S)
- 4) Etude d'un réseau de déviation (BFR)

II Diffraction par un cristal

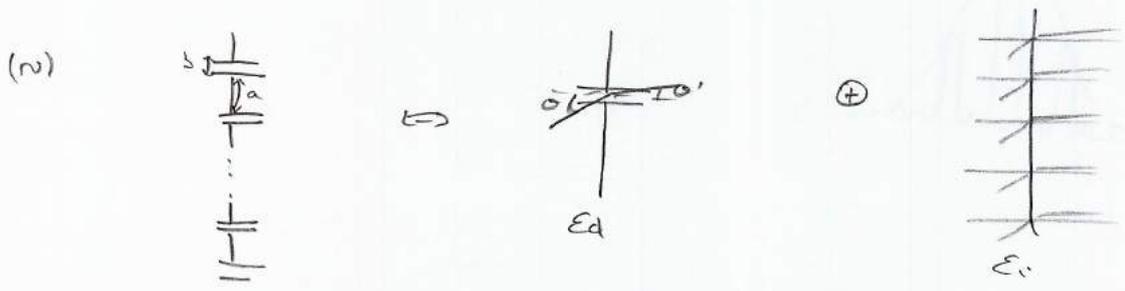
- 1) Diffraction, interface (n, R)
- 2) Réseau réciproque, diffraction (R, n)
- 3) Sphere d'Ewald (R, n)
- 4) 2q techniques de diffraction de RX (R)

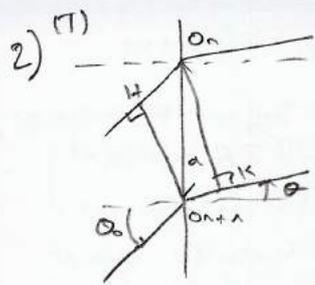
Intro: (S) Les objets diffractants et souvent constitués d'un motif réparti régulièrement par un réseau périodique de N points.

I) (BFR) (ou TF) 1) Un réseau, au sens optique, est constitué par une structure périodique qui diffracte une onde incidente. Cette structure périodique peut être formée d'un en de fentes // : on obtient aussi un réseau à 1D

On a les réseaux par réflexion : gravés sur une plaque métallique.
 par transmission " " du verre.

→ phénomènes d'interférences à N axes:





$$\delta = (SO_{n+1}n) - (SO_n n)$$

$$= (O_n n K) - (O_n H) = a \sin \theta - a \sin \theta_0$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

Diffraction qui si les axes interfèrent en phase

$$\Rightarrow \Delta \varphi \text{ multiple de } 2\pi$$

$$\Rightarrow \sin \theta_e - \sin \theta_0 = \frac{p \lambda_0}{a}$$

ou le ordre de diffraction.

3) (π/s)

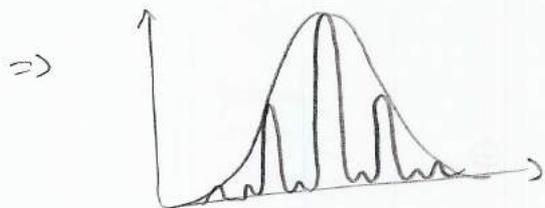
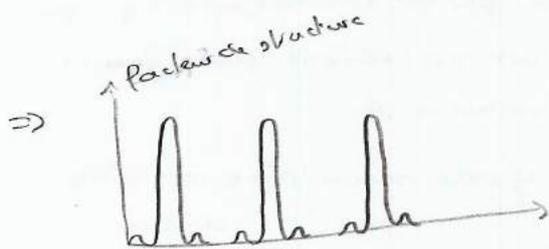
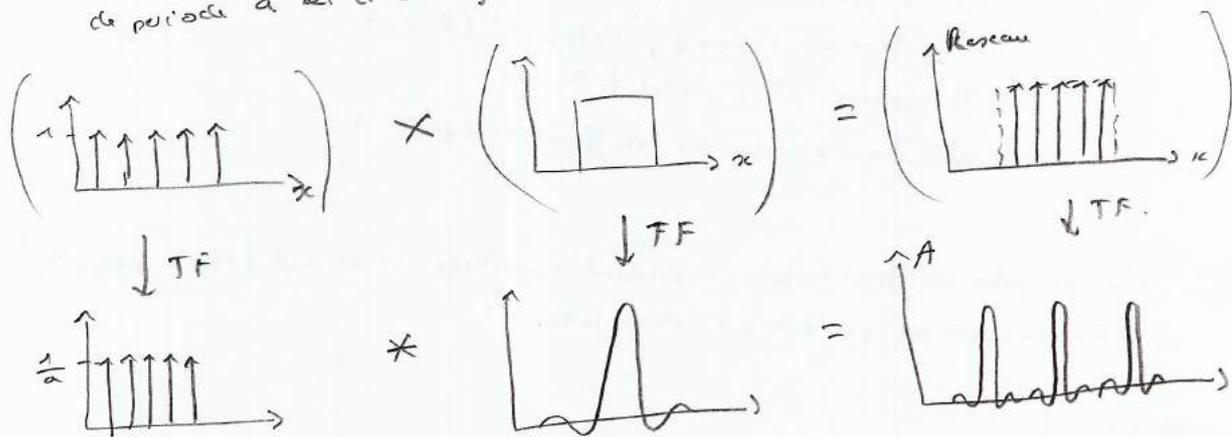
$$g_{\text{reseau}}(n) = a_1(n) + a_2(n) + \dots + a_n(n)$$

$$= a_1(n) + a_1(n) e^{i\Delta\varphi} + a_1(n) e^{i2\Delta\varphi} + \dots + a_1(n) e^{i(N-1)\Delta\varphi}$$

$$= a_1(n) \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi}}{1 - e^{i\Delta\varphi}} = a_1(n) e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \frac{\sin(\frac{N}{2}\Delta\varphi)}{\sin(\frac{\Delta\varphi}{2})}$$

$$\Rightarrow E = \underline{g} \underline{g}^* = E_0 \left(\frac{\sin(\frac{N}{2}\Delta\varphi)}{\sin(\frac{\Delta\varphi}{2})} \right)^2$$

(5) : Transparence d'un réseau est le produit simple d'un réseau de Dirac de période a et d'un pet rectangle de largeur $(= \text{pet part})$.



4) Etude du min de deviation:

CP36
②

(BFR): $D = \theta - i$, a ($\sin \theta - \sin i$) = R.A.

d'où, $\cos \theta d\theta = \cos i di$

$$\frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1 = \frac{\cos i - \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{di} = -2 \frac{\sin(\frac{\theta+i}{2}) \sin(\frac{\theta-i}{2})}{\cos \theta}$$

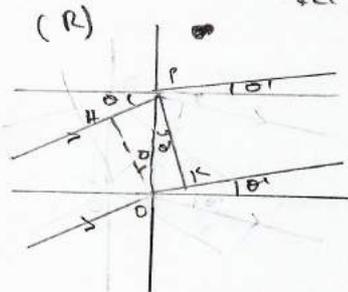
\Rightarrow deviat^o extrême pour $\theta = i$

min de deviation: $\sin \frac{D_m}{2} = R \frac{1}{2} a$.

Remarque: Ici réseau 1D
non réseau 3D.

II) 1) (v): $hV_{rx} \rightarrow$ (AT) \rightarrow diffraction

Ici on suppose qu'il n'y a pas de choc d'energie des photons.



(schéma ϕ & λ que de la
lune).

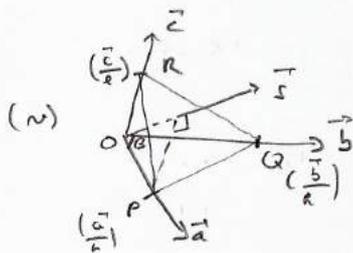
$$\begin{aligned} \varphi &= \mathbf{p}_h \cdot (-\vec{H} + \vec{O}k) = \frac{2\pi}{\lambda} (R\vec{OP} \cos \theta' - H\vec{OP} \cos i) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \vec{a} \cdot (\vec{S}_1 - \vec{S}_0) = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{a} \cdot \vec{S} \end{aligned}$$

Il y a interference constructive si la \neq de φ
entre 2 noeuds successifs est egale à un multiple
de 2π . d'où $\vec{a} \cdot \vec{S} = h$, $h \in \mathbb{Z}$

D'où à 3D: (1) $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{S} = h \\ \vec{b} \cdot \vec{S} = R \\ \vec{c} \cdot \vec{S} = P \end{cases}$

2) (R) Le syst (1) devint:

$$\begin{cases} (\frac{\vec{a}}{h} - \frac{\vec{b}}{R}) \cdot \vec{S} = 0 \\ (\frac{\vec{b}}{R} - \frac{\vec{c}}{P}) \cdot \vec{S} = 0 \\ (\frac{\vec{c}}{P} - \frac{\vec{a}}{h}) \cdot \vec{S} = 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{QP} \cdot \vec{S} = 0 \\ \vec{RQ} \cdot \vec{S} = 0 \\ \vec{PR} \cdot \vec{S} = 0 \end{cases}$

Si (h, R, P) nt x^{es} ent^{es} ent^{es} \Rightarrow plan (PQR) = plan réticulaire

$\Rightarrow \vec{S} \perp (\text{hRP})$

• Soit OT la distance réticulaire = d_{hkl} .

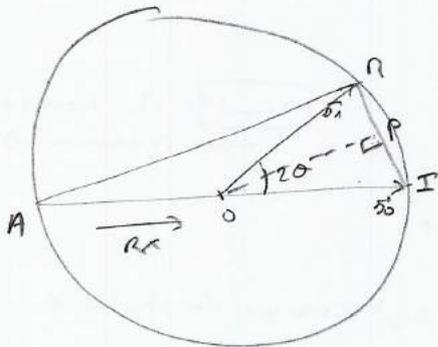
* $OT = d_{hkl} = OP \cos \beta = \frac{|\vec{a}|}{h} \cos \beta$

* $\vec{S} \cdot \frac{\vec{a}}{h} = 1 = |\vec{S}| \cdot \frac{|\vec{a}|}{h} \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{|\vec{S}| \frac{|\vec{a}|}{h}}$

$$\Rightarrow |\vec{S}| = \frac{1}{(d \cdot h \cdot k \cdot p)}$$

Les directions de diffraction permises de ce réseau sont celles qui par les rayons de son réseau réciproque.

3)



$$R = \frac{1}{\lambda}$$

Si le vecteur $\vec{IN} = \vec{S} = \frac{\vec{S}_1 - \vec{S}_0}{\lambda}$ est tel que on est une direct^o de diffraction alors N est un nœud du réseau réciproque.

$$(N) \quad \vec{IN} \sin \theta = \frac{PI}{OI} = \frac{PI}{\lambda} = PI \lambda.$$

$$\text{Or } PI = \frac{nI}{2} = \frac{1}{2d \cdot h \cdot k \cdot p}.$$

$$\Rightarrow \underline{2d \cdot h \cdot k \cdot p \sin \theta = 1} \quad \text{relation de Bragg.}$$

4) (R):

mono → lumière mono et orienter le cristal et au faisceau :
c'est la méthode du cristal tournant

→ cristal immobile, lumière poly : méthode de Laue.

épaisse → pas de cristal → broyage poudre → distribution de la poudre sur plaques
→ dispositif aléatoire des cristallites ⇒ a besoin que d'une source mono.

Niveau: L2

Pré-requis: • Inhomogènes

- Diffraction de Fraunhofer.
- Cristaux mailles cristallines.

I Diffraction par une fente

- 1) Présentation des réseaux
- 2) Formules des réseaux
- 3) Etude de l'éclairement par un réseau
- 4) Etude du minimum de première ordre

II Diffraction par une structure périodique.

- 1) Présentation
- 2) Diffraction des rayons X par les cristaux
 - a) Esquisse de Von Laue.
 - b) Formule de Bragg.

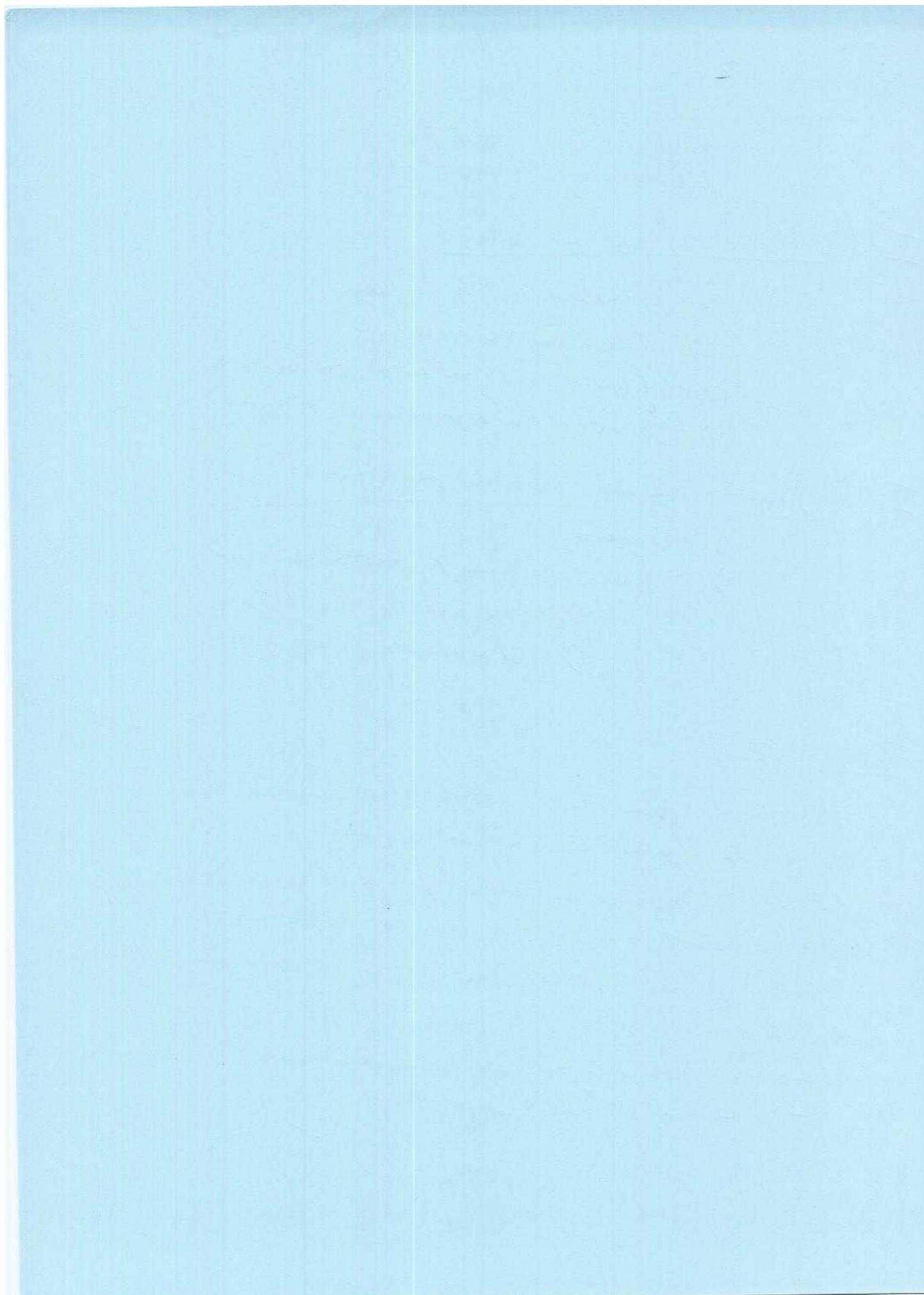
Intro: Essai

Structure périodiques caractérisent un objet qui se répète ~~par~~ avec un certain pas.

Quand l'incidence va envoyer une onde incidente sur cette structure, celle-ci va se diffracter

Quels sont les objets qui ont le potentiel pour diffracter la lumière?

- le réseau: cas de fentes identiques, //, équidistantes
- cristal: maille cristalline.



I] DIFFRACTION PAR UNE ~~PLAQUE~~ RESEAU plan 1

Exp:

1) Présentation des réseaux

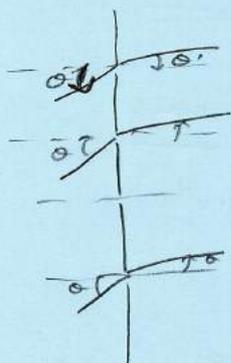
Un réseau au sens de l'optique est constitué par une structure périodique qui diffracte une onde incidente. Ici on se limitera à un réseau constitué de N fentes identiques //, équidistantes (réseau à 1D).

- on a des réseaux gravés sur des plaques de verre : réseau par transmission
- des réseaux gravés sur une surface métallique = réseau par réflexion.

D'après le principe de Huygens-Fresnel, chaque fente du réseau peut être considérée comme source secondaire.

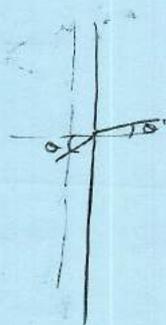
Si le réseau est éclairé de façon cohérente :

ces sources interfèrent entre elles ! On a donc un phénomène d'interférences à N axes multiples.

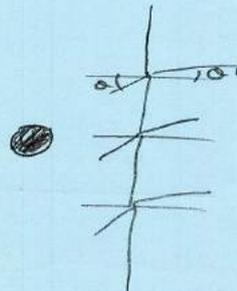


Caractéristique pas le pas du réseau.

=



lame de diffraction

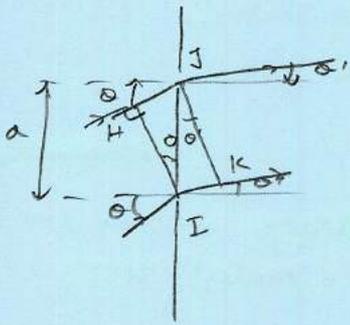


avec lame d'interférences

2) Formules des réseaux

→

Calculons pour cela, la différence de marche entre 2 rayons consécutifs. Soit considérons un réseau de transmission de 2 fentes consécutives et distantes de a . Ce réseau est éclairé par un faisceau // mono de λ sous incidence θ



$$\begin{aligned} \delta &= (S'I) - (S'J) \\ &= \cancel{S'I} - \cancel{S'J} \\ &= (S'I) + (I'K) + (KJ) - (S'J) \\ &= (HJ) - (J'I) \\ \text{ici} &= IK - HJ = a (\sin \theta' - \sin \theta) \end{aligned}$$

\Rightarrow déphasage entre 2 axes : $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta' - \sin \theta)$.

Or toutes les axes doivent interférer en phase.

$\Rightarrow \Delta \varphi$ multiple de 2π

et où $\Delta \varphi = 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta' - \sin \theta)$

$\Rightarrow \underline{R \lambda = a (\sin \theta' - \sin \theta)}$

Formule des réseaux.

3) Etude de l'éclairant par un réseau.

Ici nous avons des sources cohérentes, donc pour cette étude on doit sommer les amplitudes $k_{p,t}$

Pour cela, on va désigner $a_1 = A e^{-i\omega t}$ la vibration émise par la 1^{ère} fente; $a_p = A e^{-i\omega t}$ la vibration émise par la p -ième fente.

La vibration totale est :

$$a_1(n) \Rightarrow a_2(n) = e^{i\Delta\varphi} a_1(n), a_3(n) = e^{i2\Delta\varphi} a_2(n) = e^{i2\Delta\varphi} a_1(n)$$

$$a(n) = \sum_{p=1}^N a_p$$

on reconnaît une suite géométrique de raison $e^{i\Delta\varphi}$

$$a_1(n) = A e^{-i\omega t} (1 + e^{i\Delta\varphi} + e^{2i\Delta\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\varphi})$$

$$a_1(n) = A e^{-i\omega t} \left(\frac{1 - e^{iN\Delta\varphi}}{1 - e^{i\Delta\varphi}} \right)$$

$$\begin{aligned} a_1(n) &= e^{i\Delta\varphi} a_{2(n)} \\ &= e^{i(N-1)\Delta\varphi} a_{1(n)} \end{aligned}$$

$$a = \frac{A e^{i(N\Delta\varphi/2)}}{a_1(n)} \left(\frac{e^{-iN\Delta\varphi/2} - e^{iN\Delta\varphi/2}}{e^{-i\Delta\varphi/2} - e^{i\Delta\varphi/2}} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{A e^{-i\varphi n t}}{a_1(n)} e^{i(N-1)\Delta\varphi/2} \frac{\sinh(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)}$$

\Rightarrow I ou E

$$E = a a^* = E_{\text{petit}}^2 \left(\frac{\sinh \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin \Delta\varphi/2} \right)^2$$

$$\text{avec } \Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta' - \sin \theta)$$

• Cas des fentes unimodales Pinc

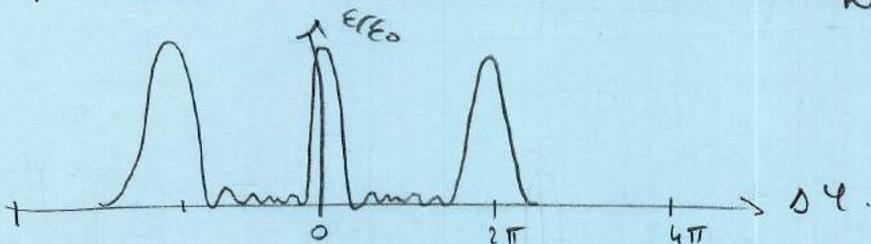
A est une constante, noter la A_0 .

d'où ~~l'expression est~~

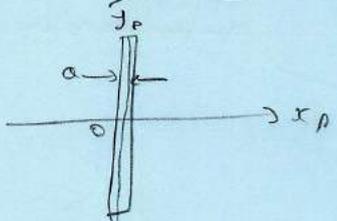
$$E_{\text{petit}} = A_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{N}{2} \Delta\varphi \right)}{\sin \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)} \right)^2$$

E prend une valeur maximale égale à E_0 pour $\Delta\varphi = 2k\pi$

La 1^{re} annulat^o de part et d'autre d'un maximum principal intervient pour $\Delta\varphi = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{N}$.



• Influence de la largeur de la fente (fente fine pas rectangulaire)



$$a(n) = c A_0 e^{i\phi_0(n)} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\bar{c}\bar{r}'} \bar{O}P \, d\bar{S}_p$$

(ϕ de diffraction de la direction \vec{u}_y)

$$a(n) = c A_0 e^{i\phi_0(n)} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \bar{O}x} \, d\bar{x}$$

$$= c A_0 a e^{i\phi_0} \frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a}$$

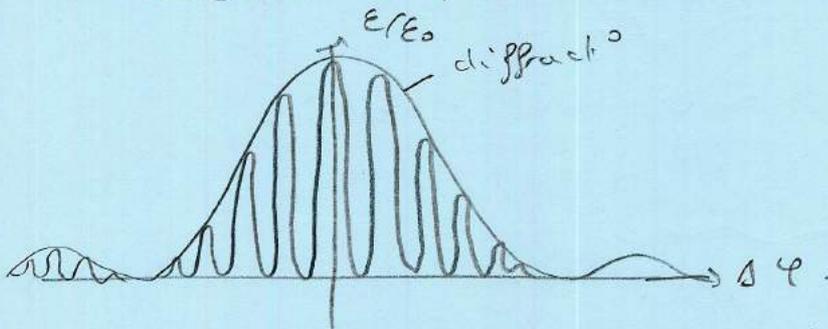
$$A(\theta) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{i k x \sin \theta} dx = a \operatorname{sinc}(\pi a \sin \theta / \lambda)$$

Do le cas d'une petite fente on a :

$$E_{\text{fact.}} = E_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta') \right)^2$$

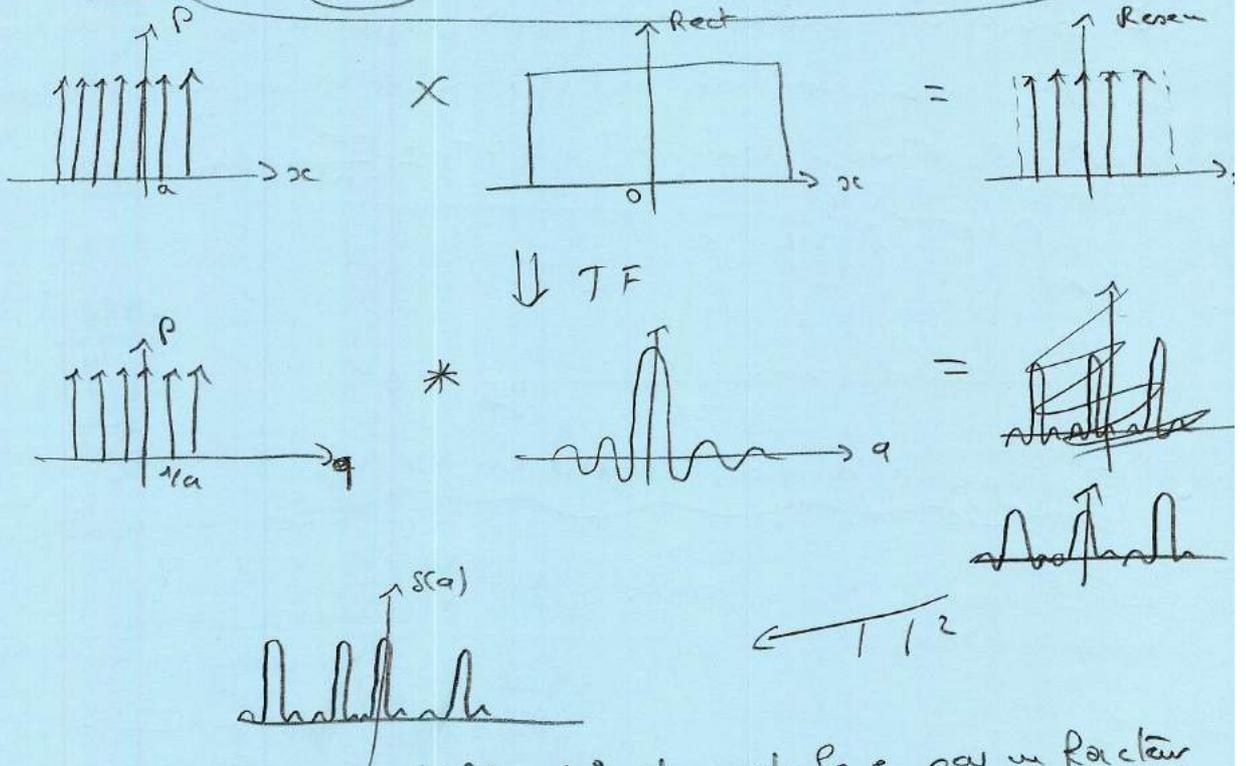
$$= E_0 \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{b}{2a} \Delta \varphi \right) \right)^2$$

Ce terme de diffraction varie \oplus petit que l'effet d'interférence puisque $\frac{b}{a} \ll N \Rightarrow$ il a pour effet de moduler l'amplitude des pics principaux.

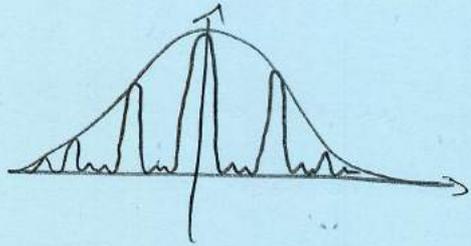


De \oplus , on peut également voir ce résultat à partir de la transparence de Fourier $t(q)$:

Reseau = peigne \times Parti rectangulaire

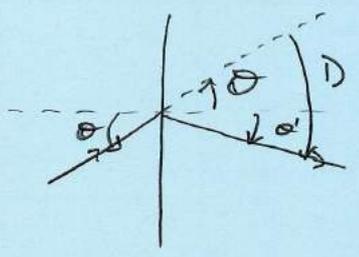


Et la figure de diffraction est modulée par un facteur de forme correspondant au motif élémentaire.



a) Etude de la min^{imum} de deviation.

Pour un réseau éclairé sous une incidence θ et diffracté en la direction θ' , l'angle de deviation est def par.



$$D = \theta' - \theta.$$

Or la formule des réseaux est:
 $a(\sin \theta' - \sin \theta) = k\lambda$.
soit a différentiale:

$$\cos \theta d\theta = \cos \theta' d\theta'$$

$$\text{Or } \frac{dD}{d\theta} = \frac{d\theta'}{d\theta} - 1 = 1 \left\{ \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} - 1 \right.$$

$$= \frac{\cos \theta - \cos \theta'}{\cos \theta'}$$

$$\text{soit: } \frac{dD}{d\theta} = -2 \frac{\sin \left(\frac{\theta' + \theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta' - \theta}{2} \right)}{\cos \theta'}$$

Donc pour la deviation extreme

$$\frac{dD}{d\theta} = 0 \quad \text{pour } \theta = -i \text{ et } \theta' = \theta$$

pour un minimum de deviation $\theta = -i$

$$\text{Or } a(\sin \theta' - \sin \theta) = k\lambda$$

$$\Leftrightarrow 2a \sin \left(\frac{\theta' - \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta' + \theta}{2} \right) = k\lambda$$

$$\text{Or } D = \theta' - \theta, \quad \theta' = -\theta, \quad D = D_m.$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{D_m}{2} \right) = \frac{k\lambda}{2a}$$

\Rightarrow ne depend pas de l'angle d'incidence

Exil nous

Transition: Ici nous avons étudié un réseau à 1D
maintenant on va regarder un réseau à 3D.
d'ac on va étudier now la diffraction par
une structure périodique.

II DIFFRACTION PAR UNE STRUCTURE PÉRIODIQUE

II DIFFRACTION PAR UNE STRUCTURE PÉRIODIQUE (4)

1) Présentation

Les solides cristallins forment des réseaux tridimensionnels naturels que l'on peut reconstituer en reproduisant le motif élémentaire, qu'on appelle maille, selon ses 3 directions. L'ordre de grandeur des **3 D de la maille est de l'ordre du nanomètre.**

Cette dernière est définie par 3 vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\text{et à a } \vec{r} = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c}$$

avec $(m_i) \in \mathbb{R}$

En raison de la périodicité de la structure, tout droit passant par 2 atomes définit une rangée, et tout plan contenant 3 atomes sera alignés sur un plan réticulaire.

esc. du CSCE

2) Diffraction des rayons X par les cristallins.

a) Expérience de Von Laue

C'est le physicien allemand P. von Laue qui eut l'idée d'utiliser les réseaux cristallins pour tester la nature EON des rayons X.

Un faisceau de R.X est envoyé sur une cible cristalline

de sulfate de zinc (ZnS)

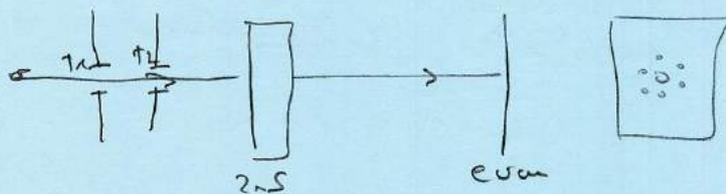
La figure enregistrée sur un

écran photographique,

placé après la cible,

se présente sous forme

d'un diagramme



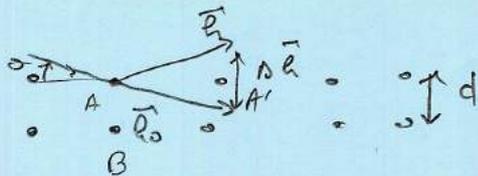
La comparaison de ce diagramme d'espaces à celui obtenu en diffraction par un réseau plus à petit

d'établir que les R.X étaient de 0 à 2π de $\lambda \approx 0,1 \text{ nm}$.
 Par parvenir à ce résultat Van Laue admit des relat^o
 analogues à l'éq vectorielle part des réseaux, selon 3 direct^o des par les mailles.

$$\Delta \vec{h} \cdot \vec{a} = 2\pi q, \quad \Delta \vec{h} \cdot \vec{b} = 2\pi r$$

$$\Delta \vec{h} \cdot \vec{c} = 2\pi s$$

$$\Delta \vec{h} = \vec{h} - \vec{h}_0$$



b) Formule de Bragg.

On peut donner aux relat^o précédents une forme \neq , en associant convenablement les at du réseau cristallin.

C'est ce que proposa le physicien anglais Bragg, en 1913, en considérant la famille de plans réticulaires, tq \vec{h}, \vec{h}_0 de \vec{h} sont symétriq / à ces plans.

Les axes diffusés par les at d'un \vec{h} plan réticulaire sont alors tous en φ presque pour 2 at q et q' A et A'

de ce plan, à a :

$$\Delta \vec{h} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = 0 \Rightarrow \text{phase constructive.}$$

En outre, les axes diffusés par les at A et S, appartenant à 2 plans réticulaires //, sont, elles aussi en φ , si une condit^o analogue est satisfaite, ~~de laquelle et~~

$$\Delta \vec{h} \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_S) = \Delta \vec{h} \cdot \vec{d} = 2\pi m.$$

$$\Leftrightarrow 2 d \sin \theta = 2\pi m$$

$$\Rightarrow \underline{2d \sin \theta = m \lambda}$$

La formule de Bragg permet de mesurer les distances d entre plans réticulaires, lorsque λ de la source des rayons X est connue. (5)

RQ : • $\sin \theta \leq 1 \Leftrightarrow \frac{m \lambda}{2d} \leq 1$.

car pour $m=1$ $\lambda \leq 2d$.

en général d ne dépasse pas 0,3 nm,

d'où $\lambda \leq 0,6 \text{ nm}$.

• Soit un faisceau de rayons X presque monochromatique de $\lambda = 0,15 \text{ nm}$ tombe sur un cristal.

La distance entre 2 plans est d , si le max de diffraction du 1^{er} ordre a lieu pour $\theta_1 = 16^\circ$ alors.

$$d = \frac{m \lambda}{2 \sin \theta_m} = 0,27 \text{ nm}.$$

Ainsi pour conclure, nous avons étudié ici, la diffraction par une structure périodique à 1D, le réseau plan, et à 3D, les réseaux cristallins. à travers la diffraction des rayons X.

De plus, la diffraction des rayons X est devenue une technique courante pour étudier les distances.

Elle est également devenue aussi un outil puissant d'étude des mol, surtout de le cas de grandes configurations répétitives et problèmes et R-ADN.

LP 37 : Absorption et émission de la lumière. (LP37)

Niveau : L3

Biblio : • Les Lasers, Dangoisse
• Optique, Houard.
• Cagnac

Pré-requis : Relat° de Planck
n.d.

Plan : I Interactions ray-matière

- 1) Description du milieu matériel (D)
2) Absorption (c, D)
3) Emission spontanée (D)
4) Emission induite (c)
5) Relat° d'Einstein (c).
- Les petits schémas et des (H)
- type Broadline*

II Lasers

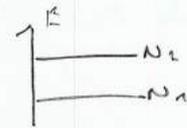
- 1) Principe
2) Invention de pop.
3) Laser à 3 niveaux

Intro : Nous avons vu que le CN, en eq à une °C T, absorbe toute les radiations EN qu'il reçoit et emit un ray dependant uniquement de sa °C. Avec sa loi, Planck introduit un phenome de quantification des energies echangees aux niveaux du CN. Sa loi colle avec ce que l'on sait mais aux grandes λ , on s'ecarte de la statistique de Boltzmann. En 1917, Einstein introduit le processus d'emission stimulee.

I

1) • 1 atome a seulement 2 niveaux d'energie permet de regarder le processus de base d'un laser. Les caracteristiques sont :

- son energie E_i
- sa degenerance g_i
- densite de population
- la durée de vie τ_i du niveau E_i : $N_i(t) = N_i(0) e^{-t/\tau_i}$



A l'eq thermod, loi de Boltzmann : $\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{(E_1 - E_2)}{k_B T}}$ (1)

ex: si $E_2 > E_1$, $g_1 = g_2 \Rightarrow$ niveau part \oplus peuple.

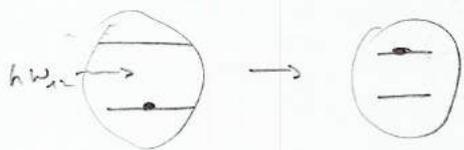
• Interaction entre 2 atomes à 2 niveaux d'énergie et un ray E_{ω}

\Rightarrow émission spontanée, absorption, émission induite.

Ds chaque cas l'atome subit une modification de sa énergie d'une quantité $E_2 - E_1$, alors que le champ gagne ou perd 1 photon de ω :

$$W = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

2) CC) D) (C): Ds le processus d'absorption, un at de niveau 1 attire le niveau 2 en absorbant un photon d'énergie $h\omega$: le niveau 2 se peuple aussi depuis le niveau 1. L'absorption est un processus induit par le champ E_{ω} : la probabilité de transition par atome et par unité de τ_{sp} est de proportionnalité avec (flux de photons).



$$(C): \frac{dn_1}{n_1 dt} = -\sigma_{21} D dt = -w_{12} dt.$$

avec w_{12} : probabilité de transition par unité de τ_{sp} .

σ : section efficace.

D : débit de photons.

$$\text{Or } D = \frac{\lambda}{h} U$$

$$\Rightarrow w_{12}(\omega) = -\frac{1}{n_1} \left(\frac{dn_1}{dt} \right) = \sigma_{21}(\omega) \frac{\lambda}{h} U = \frac{\lambda}{h} \int \sigma_{21}(\omega) P(\omega) d\omega$$

Si hyp: densité d'énergie différentielle P_{ω} const. sur toute la plage de fréquence $\Rightarrow w_{12} = B_{12} P_{\omega}$ avec $B_{12} = \frac{\lambda}{h} \int \sigma_{21}(\omega) d\omega$

$$\Rightarrow \left(\frac{dn_2}{dt} \right)_{\text{abs}} = - \left(\frac{dn_1}{dt} \right)_{\text{abs}} = B_{12} P_{\omega} n_1$$

3) (D):



Un atome va du niveau 2 vers le niveau 1 en émettant un photon d'énergie $h\nu$.

Le niveau 2 se dépeuple au profit du niveau 1.

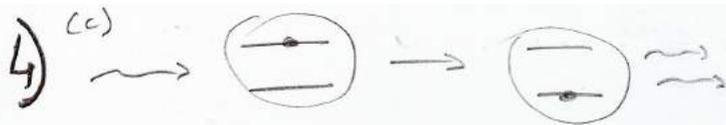
La probabilité ou taux d'émission spontanée par atome et par unité de τ_{sp} est noté A_{21} (s^{-1}) tq: $\left(\frac{dn_2}{dt} \right)_{\text{sp}} = -A_{21} n_2 = - \left(\frac{dn_1}{dt} \right)_{\text{sp}}$

La loi de décroissance de la pop du niveau 2 liée à l'émission spontanée est solp: $n_2(t) = n_2(0) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{1}{A_{21}}$

ex: laser CO₂ à $\lambda_{12} = 10,6 \mu m$ $\& A_{21} = 0,3 s^{-1}$

He-Ne à $\lambda_{12} = 633 nm$

$A_{21} = 800 s^{-1}$



Echange d'énergie entre l'atome et l'onde réversible. (2) (3) (2)

Il y a des ψ où l'atome accroit l'énergie aux dépens de l'onde et d'autres ψ où inversement l'atome perd de l'énergie qui est rattachée à l'onde incidente.

$$\Rightarrow \frac{dn_2}{dt} = -n_2 \bar{\omega}_{21} = -n_2 B_{21} \rho \quad |$$

5) (c) Transitions des 3 types se produisent simultanément.

Bilan: $\left(\frac{dn_2}{dt}\right)_T = \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{e.st} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_{sp} + \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_a$

$$\Rightarrow \left(\frac{dn_2}{dt}\right)_T = (B_{22} n_1 - B_{21} n_2) \rho - A_{21} n_2.$$

En régime stationnaire: $\left(B_{22} \frac{n_1}{n_2} - B_{21} \right) \rho = A_{21} \quad | \quad (2)$

Or avec la loi de Boltzmann on aura:

$$\left(B_{12} \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} - B_{21} \right) \rho = A_{21}.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \\ (2) \frac{N_1}{N_2} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{\rho} + \frac{B_{21}}{B_{12}} \end{array} \right\} T \rightarrow \infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \\ \frac{N_1}{N_2} = \frac{B_{21}}{B_{12}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{B_{21} g_2 = B_{12} g_1.}$$

II 1) (H) Oscillateur optique qui comporte 3 éléments:

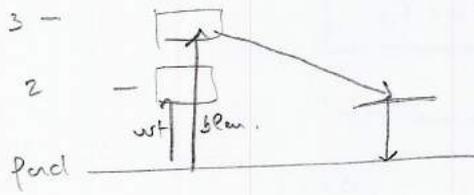
- milieu actif amplificateur;
- cavité résonnante. (2 miroirs: 1 totala^t réfléchissant, l'autre partiel^l = Pas de quantité de matière)
- syst de pompage pour avoir une inversion de pop. + schéma du laser

2) Emission stimulée prépondérante. habituellement, les niveaux excités ont une durée de vie de l'ordre de 10^{-8} s; de ce laser, on peut attendre une durée de vie de l'ordre de la milliseconde. émission spontanée négligeable.

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} < 1 \Rightarrow N_2 < N_1$$

mais Laser $N_2 > N_1$

3] Laser à rubis : milieu actif : cristaux d'alumine dopés Cr³⁺.
 excitation : flash lumineux : brefs et puissants.



CP 38: d Appareils corpusculaires du ray.

CP 38
①

Notion de photon.

(4) Pages

Niveau: L3

Bibliog: Taillet, optique Y.

Pré-requis: optique, onde, rayonnem

(1) Cagnac., Yataouque

(2) Besson, onde, optique et Y moderne

Plan: I De la catastrophe UV à l'effet photoélectrique

1) Rappels historiques. (2)

2) Effet photoélectrique

II Caractéristiq du photon

1) corpusculaire.

2) masse et vitesse

III Applications

1) Effet Compton.

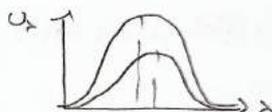
2) Refroidissement des atomes.

Intro: Fin du 19^{ème} siècle, début du 20^{ème}; la mécanique classique ne suffit plus pour expliquer tous les résultats expérimentaux. Les 1^{ères} notions de quantification de l'énergie apparaissent et posent les bases de la Ψ quantique. On verra comment cette quantification est apparue historiquement et comment l'effet photoélectrique a donc donné naissance à la notion de photon. Puis nous établirons les propriétés de ce quantum d'énergie ainsi que qq applicat^o.

I DE LA CATASTROPHE UV A L'EFFET PHOTOELECTRIQUE

1) Rappels historiques

- (B) • obs du ray d'objet chauffé: variat^o de couleur
• modèle du CN: absorbe tout le ray incident
• cause de la distrib^o d'énergie en fct de la λ (obtenue exp)



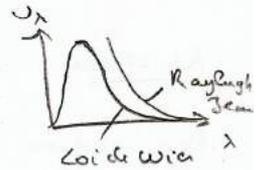
\Rightarrow pb pour expliquer la forme de la courbe.

• 1893 (φ de la lune la date): Loi de déplacement de Wien: $\lambda_{max} \propto T^{-1}$
 en fait de la °C $\lambda_{max} T = 2898 \mu m \cdot K$.

• 1896: Loi du ray de Wien exp de $U_\lambda(\lambda, T)$

=> ok avec l'exp pour certains λ .

• 1900: Loi de Rayleigh - Jeans: loi pour les grandes λ .
 mais pb pour les petites λ = catastrophe U.V.



• 1900: Loi de Planck: entropie d'un syst doit être max lorsque le syst atteint l'eq thermo:

$$U_\lambda = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

=> ok avec l'exp.

2) Effet photoélectrique

DEF: L'effet photoélectrique désigne l'émission d' e^- par un matériau soumis à la lumière de fréquence élevée. Lorsque l'effet photoélectrique se manifeste, toute l'énergie du photon incident se transforme en l'énergie cinétique pour l'électron de sa atome, et le restant sous forme E_c .

(C): Dispositif expérimental:

- photocathode: plaque de zinc chargée éclairée par un ray.
- anode: collecte les e^- émis.
- à un pôle une \pm de pot ΔV , le courant I est due aux e^- arrachés et collectés par l'anode.

(c) Observat°:

- Dès le fractionnement normal, il faut que l'efficacité collective soit portée à un potentiel $V \oplus$ it à la plaque.
- qd $V \oplus$ est suffisamment élevée, $I \uparrow$ jusqu'à I_m (courant de saturation).
- $I_m \propto P$ (permet d'utiliser pour mesurer une intensité lumineuse).
- qd $V \searrow$, ou $V < 0$, le courant $I \searrow$ mais s'annule pour $V_0 < 0$, avec $|V_0|$ cette tension.
- P à W fixe, $|V_0|$ ne change pas.
- $\exists \lambda_0$ à partir du laquelle il n'y a plus d'effet photoélectrique.

Tatolices d'explication.

(B): \rightarrow Le fait d' \uparrow la \neq de potentiel d'accélération n'a pas d'effet sur le courant.

(C): \rightarrow \uparrow progressive de I avec V : product° d' e^- en permanence, si V trop faible, il y a accumulatio° d' e^- (zone de charge d'espace) qui freine les e^- . Si V suffisent, ça collecte tout les e^- arrachés à la photocathode par la lumière.

Autre interprétation: hyp: échanges d'énergie quantifiés. entre ray et la matière.

\rightarrow seuil à fréquence $h\nu \geq W_0 = h\nu_0$

\rightarrow autre seuil. $h\nu = W_0 + \frac{1}{2}mv^2$.

II CARACTERISTIQUES DU PHOTON.

1) Aspect corpusculaire

(N) un photon

à noter: La lumière est na \vec{E} et agit par quantas d'énergie (= photons) qui possèdent une énergie et une quantité de mouvement.

$$E = h\nu \quad \vec{p} = h\vec{k}$$
$$E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

(T) La \vec{p} permet de réinterpréter l'E de la pression de radiat°. En effet, si l'on considère une surface S sur laquelle se réfléchissent des photons de \vec{p} faisant un angle nul avec la normale à la surface, alors chaque photon cède une \vec{p} .

$$d\vec{p}_{\text{ou}} = 2\vec{p} = 2\hbar\vec{k} = \frac{4\pi\hbar\nu}{c}\vec{u}_n = \frac{2h\nu}{c}\vec{u}_n$$

Si on note \mathcal{F} le ϕ de photons (nb de photons qui traversent une surface par unité de temps) alors $\mathcal{F}S$ de photons atteignent la surface S petit dt, si bien que la \vec{p} cédée à la surface s'écrit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{2h\nu\mathcal{F}S}{c}\vec{u}_n \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{S} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \frac{2h\nu\mathcal{F}}{c}$$

\Rightarrow cette loi prouve que la lumière transporte E et \vec{p} .

2) Passer à l'usage.

(P) : $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$
 $E = mc^2 = m_0 c^2 + T$
 $T = mc^2 - m_0 c^2$
 $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

(N) Pour $v=c$, ça a une énergie infinie.
 ou
 (C) Le seul moyen d'avoir une énergie finie est de poser $m_{\text{photon}} = 0$

$$\Rightarrow \underline{p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}}$$

III APPLICATIONS

1) Effet Compton.

(C) : $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$

(Howard)

2) Reprovisionnement des atomes.

- à l'échelle atomique, l'échange \vec{p} entre photons et atomes est à la base des techniques de refroidissement des atomes par laser.
- $0 \text{ } ^\circ \text{C}$ notion métrologique = contribution des particules, pour refroidir = ralentir avec une vitesse opposée.
- Envisia laser accéléré ou métrologie atomique, l'atome absorbe un photon $h\nu$ $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}$ et passe de son état excité à son état au repos, sa \vec{p} devient : $\vec{p}' = m\vec{v} + \frac{h\nu}{c}$ et $v' = v + \frac{h\nu}{m}$
- l'atome se déplace et subit un nouveau recul, donc direction aléatoire.
- il subit un grand nb de cycles au cours desquels les effets se compensent et de la rétroaction s'annule \Rightarrow l'atome ralentit et se refroidit.
- si l'on est sûr de l'état et de $0 \text{ } ^\circ \text{K}$ ou que le faisceau, l'atome accélère, a utilisé 2 faisceaux de sens opposés.

43

CP 39: Aspects ondulatoires de la lumière.

CP39
②

Notion de p_{ct} d'onde

Niveau: L3 ou NP

(c)
Biblio: Cohen
(B) • Introduction à la mécanique
quantique, Belorizky
(T) • Tout à la fois new prog
NP
(Bab) Basilevart

Pré-requis: Optique ondulatoire,
- Aspect corpusculaire de la lumière

Plan: I Nature ondulatoire de la lumière

- 1) Dualité onde corpuscule (c)
- 2) Exp de Fraunhofer et Heuy (B)
- 3) Ondes de De Broglie.

II Descript^o quantique

- 1) Exp de Young: Interférences des e⁻ (c)
- 2) Notion de p_{ct} d'onde (T)

III Dynamique de la p_{ct} d'onde

- 1) Equations de Schrodinger (T)
- 2) Paquet d'onde (T), (Ba)
- 3) Inégalité de Heisenberg (T), (Ba)

Intro: A la fin du 19^{ème} siècle, on a 2 théories bien distinctes pour décrire 2 objets de la physique: Maxwell pour EOM, mais newtonienne pour les corps matériels. Nous avons déjà vu que certains phénomènes, non expliqués dans le cadre de ces théories, avaient amené les scientifiques de l'époque à postuler une descript^o corpusculaire de la lumière.

I 1) 1900: Planck: étude du ray du cas, hypothèse de la quantification de l'énergie.
1905: Einstein: lumière = jet de photons.

Paramètres corpusculaires et ondulatoires sont liés par :

$$E = h \nu = \hbar \omega$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

↑ corpusculaire
↑ ondulatoire

2) Explication de l'exp des (B).

on obtient expérimentalement



Explicat° pour I qui \propto de manière partielle. Les e^- peuvent échauffer de l'énergie avec les atomes de manière par collisions, mais que l'E transmise ne peut être égale qu'à $h\nu$. Les pics

l'écart entre les 2 \oplus bas niveaux d'énergie de l'état de H α . Les pics successifs étant dus au fait que un $\tilde{m} e^-$, s'il a initialement une énergie initiale suffisante, peut subir plusieurs collisions avec plusieurs atomes avant d'atteindre la grille.

\Rightarrow quantification des niveaux d'énergie.

3) Relation de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

ex d'ordre de grandeur :

- grain de poussière : $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}$
- e^- : $\lambda = \frac{12,3}{\sqrt{V}} \text{ \AA}$

\Rightarrow avec des \neq de potentiel de qq cathodes de volts, on obtient cette pos. encore des λ comparables à celles de ray X et on peut mettre en évidence des phénomènes de diffraction par des cristaux ou des poudres cristallines.

(10) RQ: C'est d'ailleurs une exp de diffraction des e^- , réalisée par Daunce et Germer en 1927 qui vérifie l'J de l'aspect ondulatoire de la (M) matière.

(conf avec le cancer à e^- )
 explicat° de (A) des (B).

II

1) Devine l'exp des Pentes d'Young :

CP 39
②

- 1 seule source de lumière mono : diffraction
- 2 fentes en \vec{n} lps : interférence
- Un faisceau de particules cloné sur une seule des 2 fentes
 ⇒ repartit° de la probabilité d'impact en un pt.

RQ : Bien mesurer la notion de probabilité.

2) Nécessité de pouvoir calculer précisément les densités de probabilité de présence d'un syst en un pt et à un instant donné.

- Def. → Pct d'onde
- amplitude de probabilité de présence
 - densité de "
 - normaliser

III

1)

$$\cdot \quad i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_p \psi$$

écriture de l'exp ⇒ \hbar et symétrie

$$\cdot \quad \text{Escente de la particule libre pour arriver à } \underline{E = \frac{p^2}{2m}}$$

2) Paquet d'onde : $a \ll D$ (Basdevant pour la vitesse de groupe).

$$\text{pour arriver à } \underline{v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}}$$

3)

$$\underline{\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

CP 41 : EFFET TUNNEL ✓

(1)

Niveau : L3

Pré-requis :
• Fonction d'onde
• Équation de Schrödinger

Biblio - Cours de mécanique quantique
- Bardou
- BUP 734 1991
- Introduction à la MQ, Haldane
- Cohen Tannoudji
- BUP 699.

Plan : I Effet tunnel

- 1) Préliminaire : la marche de potentiel en mécanique
- 2) Barrière rectangulaire en MQ
- 3) Détermination des coeff de réflexion et de transmission
- 4) Interprétation du coeff de transmission

II Applications

- 1) Microscope à effet tunnel
- 2) Application à la radioactivité alpha
 - a) Intro
 - b) Calcul de T pour une barrière rectangulaire
 - c) λ et $t_{1/2}$ pour la particule α
- 3) Molécule d'ammoniac
 - a) Positif du problème
 - b) Fonction d'onde des états stationnaires

Intro :

En 1923, Louis de Broglie suppose que la matière se comporte à faible échelle \hat{c} une onde de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

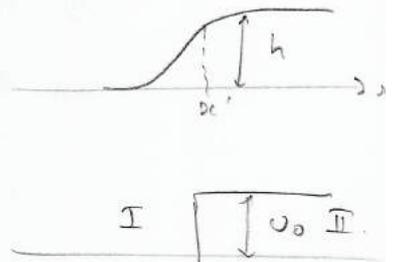
Plus tard, on comprend que cette onde est l'amplitude de probabilité de présence de la particule.

Ce fut l'avènement de la NQ. qui a des eq stupéfiantes.
 Notamment l'effet tunnel et les applications et dicusses et variées.
 Nous allons voir ...

I EFFET TUNNEL

1) Preliminaire: La marche de potentiel: en méca classiq
 H Avant d'étudier l'effet tunnel et la barrière de potentiel est de type
 rectangulaire, on va regarder une marche de potentiel classique.
 et donc rappeler qq caractéristiques de mot d'une particule, décrit
 par la mécanique classique, lorsque celle-ci arrive sur un tel obstacle

Imaginons que nous passons rouler une bille
 de gauche à droite en lui imprimant une énergie
 cinétique T . Avant sa arrivée sur la marche
 la bille a une $E_{tot} = T$ ($E_p = 0$ sur le plan
 horizontal et ϕ de potentiel)



* Si $E > U_0$, la bille va mater la marche de potentiel et
 au cours de sa montée, elle ralentit et une partie de
 sa énergie cinétique est transformée en énergie potentielle.

d'où $T = E - U_0$

Donc les billes passeront sans qu'aucune ne revienne en arrière.
 \Rightarrow transmission totale.

* Si $E < U_0$, la simple va être arrêtée par la marche de potentiel en un point x' tel que :

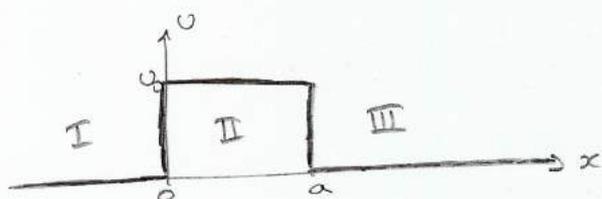
$$T(x') = 0 \quad \text{et} \quad E = U(x')$$

Il y a donc réflexion totale sur la marche de potentiel. Aucune bille d'énergie $E < U_0$ ne passera au-delà de x' .

Donc le but de cette partie est d'étudier la barrière rectangulaire dans le cas où $E < U_0$ mais voira quelque.

2) Barrière rectangulaire en mécanique quantique

La barrière de potentiel est représentée par :



Régions I et III : $U(x) = 0$

Région II : $U(x) = U_0$

H : On considère des particules provenant d'une source située loin des x négatifs, et qui arrivent sur la barrière de potentiel avec une énergie E inférieure à U_0 .

L'énergie potentielle ne dépend pas du temps, donc il \exists des états stationnaires d'énergie E_n tel que la ψ est d'onde, à l'état stationnaire, s'écrit :

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}}$$

Régions I et III : $U(x) = 0$, l'équation de Schrödinger des états

stationnaires s'écrit alors : $\hat{H}\Psi = E\Psi$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = E \Psi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{E 2m}{\hbar^2} \Psi = 0$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{\text{I}}(x) = A e^{i k x} + A' e^{-i k x} \\ \Psi_{\text{III}}(x) = C e^{i k x} + C' e^{-i k x} \end{array} \right.$$

avec $k = \sqrt{\frac{2 E_n}{\hbar^2}}$

• Le coefficient de réflexion R est traduit par:

(3)

$$R = \frac{\text{ce qui revient en I}}{\text{ce qui est envoyé en I}} = \frac{|J_{x, \text{refléchi}}|}{|J_{x, \text{incident}}|}$$

• Le coefficient de transmission T est traduit par:

$$T = \frac{\text{ce qui est passé en III}}{\text{ce qui est envoyé en I}} = \frac{|J_{x, \text{transmis}}|}{|J_{x, \text{incident}}|}$$

Soit $\Psi = A e^{i k x}$, la densité de courants de particules est définie par:

$$J_{oc} = -\frac{i \hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = -\frac{i \hbar}{2m} A^2 (2i k) = A^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$\text{d'où } R = \frac{|A'|^2}{|A|^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{|A|^2}$$

* On détermine les coefficients pour les conditions de continuité en $x=0$ et $x=a$. Comme $V(x)$ est discontinue en $x=0$ et $x=a$ mais est d'amplitude finie $V(x) = V_0$ alors $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ est δ^0 , de même que $\Psi(x)$.

$$x=0 : \begin{cases} \Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \\ \frac{\partial \Psi_I}{\partial x}(0) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(0) \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} A + A' = B + B' & (1) \\ i k (A - A') = k (B - B') & (2) \end{cases}$$

$$x=a : \begin{cases} \Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a) \\ \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(a) = \frac{\partial \Psi_{III}}{\partial x}(a) \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} B e^{i k a} + B' e^{-i k a} = 1 & (3) \\ k (B e^{i k a} - B' e^{-i k a}) = i k & (4) \end{cases}$$

$$A \quad (1) + \frac{(2)}{i k} \Rightarrow 2A = B \left(1 + \frac{k}{i k} \right) + B' \left(1 - \frac{k}{i k} \right) \quad (7)$$

$$(3) + \frac{(4)}{k} \Rightarrow 2B e^{i k a} = 1 + \frac{i k}{k} \Rightarrow 2B = \left(1 + \frac{i k}{k} \right) e^{-i k a} \quad (8)$$

$$(3) - \frac{(4)}{k} \Rightarrow 2B' = \left(1 - \frac{i k}{k} \right) e^{i k a} \quad (9)$$

d'où (8) et (9) dans (7):

$$4A = e^{-i k a} \left(1 + \frac{k}{i k} \right) \left(1 + \frac{i k}{k} \right) + e^{i k a} \left(1 - \frac{k}{i k} \right) \left(1 - \frac{i k}{k} \right)$$

$$\Rightarrow 4A = e^{-i k a} \left(2 + \frac{k}{i k} + \frac{i k}{k} \right) + e^{i k a} \left(2 - \frac{k}{i k} - \frac{i k}{k} \right)$$

$$\Rightarrow \psi_A = 2(e^{-\delta a} + e^{\delta a}) + \frac{\delta}{i\hbar}(e^{-\delta a} - e^{\delta a}) + \frac{i\hbar}{\delta}(e^{-\delta a} - e^{\delta a})$$

$$\Rightarrow \psi_A = 4 \operatorname{ch}(\delta a) - \frac{2\delta}{i\hbar} \operatorname{sh}(\delta a) - \frac{2i\hbar}{\delta} \operatorname{sh}(\delta a)$$

$$\Rightarrow A = \operatorname{ch}(\delta a) + \frac{i}{2} \operatorname{sh}(\delta a) \left(\frac{\delta}{\hbar} - \frac{\hbar}{\delta} \right)$$

$$\text{d'où } |A|^2 = \operatorname{ch}^2(\delta a) + \frac{\operatorname{sh}^2(\delta a)}{4} \left(\frac{\delta}{\hbar} - \frac{\hbar}{\delta} \right)^2$$

$$= 1 + \operatorname{sh}^2(\delta a) \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{\hbar} - \frac{\hbar}{\delta} \right)^2 + 1 \right)$$

$$= 1 + \operatorname{sh}^2(\delta a) \left(\frac{\delta^4 + 2\delta^2 \hbar^2 + \hbar^4}{4\delta^2 \hbar^2} \right)$$

$$= 1 + \operatorname{sh}^2(\delta a) \frac{1}{4} \left(\frac{\hbar}{\delta} + \frac{\delta}{\hbar} \right)^2$$

$$\text{Or } \delta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}} \text{ et } \hbar = \sqrt{\frac{2Em}{\hbar^2}}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{T} = |A|^2 = 1 + \frac{U_0^2}{4E(U_0 - E)} \operatorname{sh}^2(\delta a)$$

$$\text{d'où } T = \frac{4E(U_0 - E)}{4E(U_0 - E) + U_0^2 \operatorname{sh}^2(\delta a)}$$

RQ: pour déterminer R on fait $R + T = 1$, d'où $R = 1 - T$

4) Interprétation du coefficient de

(a) suffisamment grand devant λ de de Broglie: $a \gg \frac{\hbar}{k} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}} \Rightarrow \delta a \gg 1$

$$C \text{ Si } \delta a \gg 1 \text{ alors } T \approx \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\delta a} \neq 0$$

on voit que la probabilité \searrow de manière exp lorsque $a \uparrow$ ou que $U_0 \uparrow$.

Donnons qq ordres de grandeurs:

- Soit un e^- d'énergie $E = 1 \text{ eV}$, une barrière d'énergie de $U_0 = 2 \text{ eV}$ et de largeur $a = 1 \text{ \AA}$. La largeur de pénétration vaut alors $1,96 \text{ \AA}$ (l'ordre de grandeur de a). Donc l' e^- doit alors avoir une probabilité importante de franchir la barrière.

Effectivement $T \approx 0,78 \Rightarrow$ l' e^- a 8 chances sur 10 de traverser la barrière.

- Supposons maintenant un proton dont la masse est 1840 fois \oplus 4
 grade que e^+ , d'où $T = 4 \cdot 10^{-19}$

\Rightarrow la probabilité pour que le proton franchisse la barrière de potentiel est négligeable.

Transition : Nous avons donc étudié un modèle simple de barrière de potentiel qui nous a permis de mettre en évidence un phénomène spécifiquement quantique appelé effet tunnel.

De nb phénomènes physiques et tributaires de l'effet tunnel. C'est ce que nous allons voir maintenant avec les applications.

II LES APPLICATIONS

1) Microscope à effet tunnel

R01699

Le microscope à effet tunnel (Scanning Tunneling Microscope : STM) mesure le courant tunnel passant entre une pointe et une surface.

Il est constitué de 2 électrodes (1 électrode : pointe en tungstène, 2 électrode : échantillon).

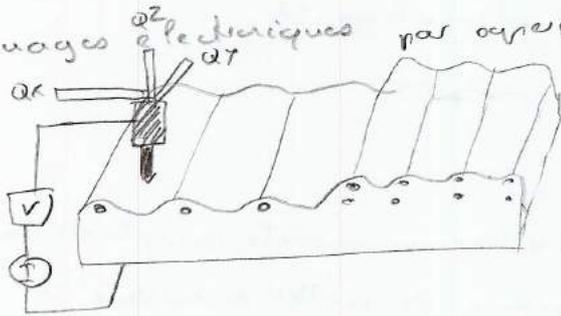
La pointe est approchée de la surface à une distance d et elle se déplace dans les directions X, Y, Z grâce aux 3 quartz piézoélectriques Q_X, Q_Y, Q_Z , le pont de l'espace correspondant à la pointe est donc mesuré par des potentiels de commande des quartz.

On impose une \pm de potentiel V et on mesure le courant I . Ce courant est ensuite amplifié.

On dispose donc de 5 variables X, Y, Z, V, I .

- V fixé, I est en jouant sur $Q_3 \Rightarrow$ topographie de la surface

X et Y fixés, on fait varier V pour avoir $\frac{dI}{dV} = f(V)$.
 Il permet de remonter à la densité d'états électroniques des atomes présents. Il permet des images tridimensionnelles des nuages électroniques par superposition d'images à fort de V .



2) Radioactivité α

a) Introduction.

Cours de 1929

L'effet tunnel a joué un rôle historique important en interprétant un phénomène aussi considérable que la radioactivité α , ce qui a constitué une des premières confirmations de la MQ.

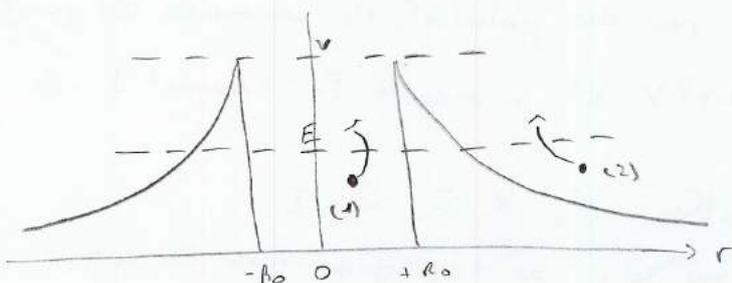
Le phénomène de radioactivité α est l'émission de particules α par un noyau avec des énergies inf à la barrière de potentiel qui les retient en principe de ce noyau.

BCP: En effet, la barrière de potentiel d'un noyau radioactif est de l'ordre de 25 MeV tandis que l'énergie des particules α émises n'est que de 4 à 9 MeV, d'où l'effet tunnel.

On modélise le potentiel à franchir par la particule:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{2(Z-2)e^2}{r} & \text{pour } r > R_0 \\ 0 & \text{pour } r < R_0 \end{cases}$$

pour $r > R_0$: répulsion électrostatique
 pour $r < R_0$: forces d'attraction nucléaire



- (1) Particule α ne pouvant pas s'échapper
- (2) Particule α ne pouvant pas pénétrer

Donc le but now est de calculer λ (la rate de désintégration) ⑤
 et $t_{1/2}$ (l'ps de demi-vie).

Pour λ : $\lambda = T \cdot N$

avec T : Pa. transparence

N : le nb de collisions avec la barrière par seconde

avec $N = \frac{\hbar}{m R_0^2}$

Calculons T pour une barrière qcq.

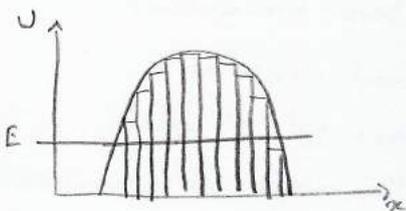
Intro

b) Calcul de T pour une barrière qcq

Pour l'effet tunnel on a tjs : $\delta a \gg \lambda$ et $T = \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\delta a}$

soit $P_n T = P_n \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\delta a}$.

Si $|k a| \gg 1 \Rightarrow P_n T = e^{-2\delta a}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$



Une barrière épaisse de forme qcq peut être remplacée par une succession de barrières rect pr lesquelles $P_n T = e^{-2\delta a}$ soit valable.

Notas $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ la largeur de la barrière et $U(x_i)$ sa hauteur.

on a $\Delta x_i \gg \frac{1}{\delta_i} \Rightarrow \Delta x_i \gg \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U(x_i) - E)}}$

et $\delta(x) = \frac{\sqrt{2m(U(x) - E)}}{\hbar}$

d'où $P_n T = e^{-\sum_i \frac{2}{\hbar} \Delta x_i \sqrt{2m(U(x_i) - E)}}$

soit en remplaçant les élém finis Δx_i par des éléments différentiels dx ,

on a : $T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right)$

ou

c) λ et $t_{1/2}$ pour la particule α

$\lambda = \frac{\hbar}{m R_0^2} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^R \sqrt{V - E} dr\right)$

d'où $P_n \lambda = P_n \frac{\hbar}{m R_0^2} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^R \sqrt{V - E} dr}$

En posant $E = \frac{Z(Z-2)e^2}{R}$ ($E_{T_\alpha} = E_{\text{répulsion coulombienne}}$) soit $V = \frac{E_n}{r}$

et en effectuant plusieurs chgt de variables on obtient:

$$R_n \lambda = R_n \frac{\hbar}{m A^2} - \frac{2\pi(Z-2)e^2 \sqrt{2\pi}}{\hbar \sqrt{E}} + \frac{8e}{\hbar} \sqrt{R_n(Z-2)}$$

$$t_{1/2} = \frac{R_n z}{\lambda}$$

$$\text{d'où } R_n t_{1/2} = R_n R_n z - R_n \lambda = \frac{A}{\sqrt{E}} + B$$

$$\text{avec } A = \frac{2\pi(Z-2)e^2 \sqrt{2\pi}}{\hbar}$$

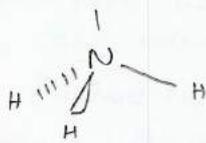
$$B = R_n R_n z - R_n \frac{\hbar}{m R_0^2} - \frac{8e}{\hbar} \sqrt{R_0 m (Z-2)}$$

conectia entre $t_{1/2}$ et E : version moderne de la loi empirique de Geiger-Nuttall qui était connue avant l'avant de la RQ.

3) Molécule d'ammoniac

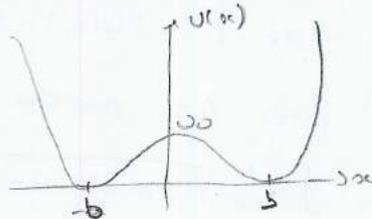
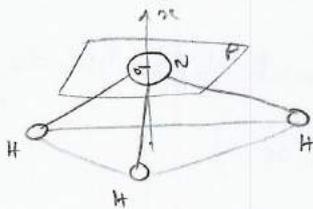
a) Position du pb

D'après la Théorie de VSEPR on a : pour NH_3 :



AX_3E_1 : forme pyramide à base triangulaire. Ainsi il doit avoir un moment dipolaire, mais exp sa moment dipolaire est nul. Cela s'explique par le fait que la molécule d'ammoniac a un pouvoir d'inversion. C'est ce que nous allons voir maintenant.

b) Fonction d'onde des états stationnaires



Soit P le plan passant par O (centre de N) et H au triangle de base de la molécule. Sur la z au plan P , notons x la distance à partir de

Supposons que l'azote soit fixe (car $m_N \gg m_H$).

La variation de l'énergie potentielle $U(x)$ en fait de x est la suivante.

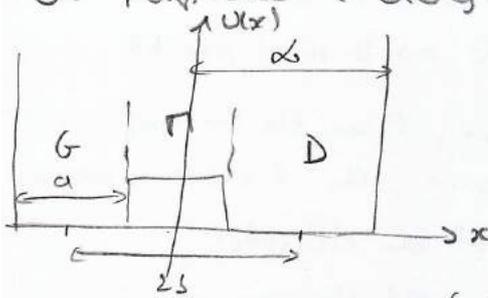
- Pour la position d'éq $x = a$ $U(x)$ passe par un min.
- Si nous obligeons x à \rightarrow , l'énergie \uparrow , passe par un max à $x=0$ (état instable par lequel les 4 atomes sont dans le même plan).
- Si $x < 0$, nous avons retrouvé la molécule \hat{c} un parapluie. et manifestement il y a un autre min pour $x = -a$ et l'énergie est symétrique tq $U(x) = U(-x)$.

On remplace l'énergie potentielle réelle par un puits de potentiel ⑥

qui reproduit les caractéristiques de $U(x)$ (les murs et ∞). Etude du mot quantique d'une particule représentée par les 3 atomes d'hydrogène

Equation de Schrödinger des états stationnaires:

μ : masse réduite.



Régions G et D: $\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) \psi(x) = 0$ avec $k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$

Région N: $\left(\frac{d^2}{dx^2} - h^2\right) \psi(x) = 0$ avec $h = \frac{\sqrt{2\mu(U_0 - E)}}{\hbar}$

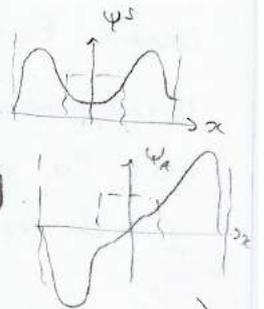
Les pts d'angle doivent s'annuler en $x = \pm b + \frac{a}{2}$, les états propres de l'hamiltonien s'écrivent:

$$\begin{cases} G: \psi(x) = \pm A \sin k(b+x) \\ N: \psi_N^S = B \cosh hx, \quad \psi_N^A = B \sinh hx \\ D: \psi_D(x) = A \sin k(b-x) \end{cases}$$

De ④, la continuité de ψ et de sa dérivée aux pts $x = \pm(b - a/2)$

donc: $\psi^S: \tan ka = -\frac{h}{k} \coth h(b - \frac{a}{2})$

$\psi^A: \tan ka = -\frac{h}{k} \tanh h(b - \frac{a}{2})$



(Pour simplifier: si $E \ll U_0$ ($\Leftrightarrow h \gg k$) et surtout

que $h(2b-a) \gg 1$ on obtient:

$\tan ka = -E_a ka; \quad \tan ka = -E_s ka.$

avec $E_s = \frac{1}{ka} \coth h(b-a)$

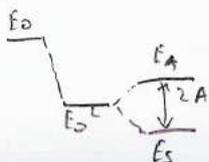
$E_a = \frac{1}{ka} \tanh h(b-a)$

On obtient par suite:

- les niveaux d'énergie:
$$\begin{cases} E_s = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\pi}{a(1+E_s)}\right)^2 \\ E_a = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\pi}{a(1+E_a)}\right)^2 \end{cases}$$

- l'énergie moyenne $E_0' = \frac{E_a + E_s}{2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu a^2} \left(1 - \frac{2}{ka}\right)$

- clivage des 2 niveaux: $E_a - E_s = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu a^2} \left(\frac{1}{(1+E_a)^2} - \frac{1}{(1+E_s)^2}\right) = 2A$



Les 2 1^{er} niveaux d'énergie sont absorbés / l'énergie fondamentale d'un puits simple G ou D et qu'il y a clivage tunnel entre ces 2 niveaux.

Dans la situation classique $E < V_0$, la ψ présente sur plan d'hydrogène soit à D, soit à G. Aucun passage $G \leftrightarrow D$ n'est possible.

Il y a 2 états fondamentaux de \tilde{n} énergie, l'un de la configuration G, l'autre D. Pour la molécule quantique, les 2 états propres en \tilde{z} ici ne sont pas dégénérés. Ils forment un doublet, avec ψ_A et ψ_S . Dans ces 2 états, la probabilité de présence de la particule est la même à D et à G.

Cette probabilité n'est pas nulle de la région Π en mécanique quantique.

Cette pénétration dans une région classiquement interdite entraîne une variation de l'énergie ΔE à celle qui aurait la "particule", si elle était fixée à D ou à G c'est-à-dire à V_0 et 0 . Il en résulte une ΔE de l'énergie moyenne ΔE à celle d'une particule qui serait localisée de l'un des puits V . $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$. Parce que V_0 est fini, ΔE d'une probabilité de présence non nulle de la région médiane fait que la molécule "voit" un puits effectif de largeur \oplus grande que a d'où l'abaissement $E_0 \rightarrow E_0'$.

La ψ globale est suivie d'un clivage

\Rightarrow d'où l'existence de configurations de la \tilde{z} car la particule peut passer d'un puits à un autre

DETERMINATION DU COEFFICIENT DE TRANSMISSION

$$\begin{aligned}
 \cdot x=0 \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \\ \frac{\partial \Psi_I}{\partial x}(0) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(0) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + A' = B + B' \quad (1) \\ iR(A - A') = \alpha(B - B') \quad (2) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x=a \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a) \\ \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(a) = \frac{\partial \Psi_{III}}{\partial x}(a) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta e^{\alpha a} + \beta' e^{-\alpha a} = 1 \quad (3) \\ \alpha(\beta e^{\alpha a} - \beta' e^{-\alpha a}) = iR \quad (4) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$(1) + \frac{(2)}{iR} \Rightarrow 2A = B \left(1 + \frac{\alpha}{iR}\right) + B' \left(1 - \frac{\alpha}{iR}\right) \quad (7)$$

$$(3) + \frac{(4)}{\alpha} \Rightarrow 2\beta e^{\alpha a} = 1 + \frac{iR}{\alpha} \Rightarrow 2\beta = \left(1 + \frac{iR}{\alpha}\right) e^{-\alpha a} \quad (6)$$

$$(3) - \frac{(4)}{\alpha} \Rightarrow 2\beta' = \left(1 - \frac{iR}{\alpha}\right) e^{\alpha a} \quad (5)$$

d'où (5) et (6) dans 2x(7):

$$4A = e^{-\alpha a} \left(1 + \frac{\alpha}{iR}\right) \left(1 + \frac{iR}{\alpha}\right) + e^{\alpha a} \left(1 - \frac{\alpha}{iR}\right) \left(1 - \frac{iR}{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow 4A = e^{-\alpha a} \left(2 + \frac{\alpha}{iR} + \frac{iR}{\alpha}\right) + e^{\alpha a} \left(2 - \frac{\alpha}{iR} - \frac{iR}{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow 4A = 2(e^{-\alpha a} + e^{\alpha a}) + \frac{\alpha}{iR}(e^{-\alpha a} - e^{\alpha a}) + \frac{iR}{\alpha}(e^{-\alpha a} - e^{\alpha a})$$

$$\Rightarrow 4A = 4 \operatorname{ch} \alpha a - \frac{2\alpha}{iR} \operatorname{sh}(\alpha a) - \frac{2Ri}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha a)$$

$$\Rightarrow A = \operatorname{ch} \alpha a + \frac{i}{2} \operatorname{sh}(\alpha a) \left(\frac{\alpha}{R} - \frac{R}{\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } |A|^2 &= \operatorname{ch}^2(\alpha a) + \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha a)}{4} \left(\frac{\alpha}{R} - \frac{R}{\alpha}\right)^2 \\
 &= 1 + \operatorname{sh}^2(\alpha a) \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{R} - \frac{R}{\alpha}\right)^2 + 1 \right] \\
 &= 1 + \operatorname{sh}^2(\alpha a) \left[\frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 R^2 + R^4}{4\alpha^2 R^2} \right] \\
 &= 1 + \operatorname{sh}^2(\alpha a) \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\alpha} + \frac{\alpha}{R}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{\frac{2Em}{\hbar^2}}$$

$$\text{d'où } T = \frac{1}{|A|^2} = \frac{4E(U_0 - E)}{4E(U_0 - E) + U_0^2 \operatorname{sh}^2(\alpha a)}$$

PROBLEM 10: The concentration of a solution is given by the function $C(x) = 0.001x^2 + 0.002x + 0.003$, where x is the distance in meters from the source. Find the average concentration over the interval $[0, 100]$.

Given: $C(x) = 0.001x^2 + 0.002x + 0.003$

Find: Average concentration over $[0, 100]$

Solution: The average value of a function $f(x)$ over the interval $[a, b]$ is given by:

$$\text{Average} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Substituting $f(x) = C(x)$, $a = 0$, and $b = 100$:

$$\text{Average} = \frac{1}{100-0} \int_0^{100} (0.001x^2 + 0.002x + 0.003) dx$$

$$= \frac{1}{100} \left[\frac{0.001}{3} x^3 + \frac{0.002}{2} x^2 + 0.003x \right]_0^{100}$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{0.001}{3} (100)^3 + \frac{0.002}{2} (100)^2 + 0.003(100) \right)$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{0.001}{3} (1,000,000) + 0.001 (10,000) + 0.3 \right)$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{1,000}{3} + 10 + 0.3 \right)$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{1,000}{3} + 10.3 \right)$$

$$= \frac{1,000}{300} + \frac{10.3}{100}$$

$$= \frac{10}{3} + 0.103$$

$$= 3.333 + 0.103$$

$$= 3.436$$

$$\text{Average concentration} = 3.436$$

Therefore, the average concentration over the interval $[0, 100]$ is 3.436 .

Q.E.D.

Answer: 3.436

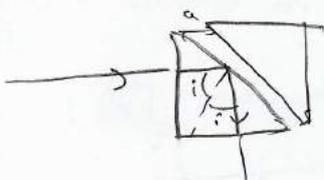
- barrière à 2 niveaux: on considère des états avec barrière ∞
 \Rightarrow a a des états stationnaires.

* barrière médiane non finie $\Rightarrow \phi$ états stationnaires mais états ψ et ψ
 \rightarrow ex: apprenti digital.

- effet tunnel: réflexion totale frustrée, on peut \neq d'un avec interprétation dû à la densité de probabilité de présence.

- au niveau de nD :

Optique \leftrightarrow acide électrolytique
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{niveau } n=1 \\ \text{niveau } n=1,5 \end{array} \right.$



pour

- pour le microscope à effet tunnel, parler de **la résolution**
 \Rightarrow capotent exp de la barrière / à la largeur.
 et donc grande sensibilité entre ∇ \rightarrow surface.

* 2 résolut^o: verticale et horizontale. (à meilleur résolut^o sur verticale grâce aux tunnels exp.)

- Fct d'onde est G^o et de dérivée G^o si l'amplitude est finie. (discontinuité finie).

Pour un pont infini:



discontinuité aux niveaux des dérivées.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (E - V) \psi$$

$$\int_{a-E}^{a+E} d\psi' = \int_E^E (E - V) \psi dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\psi'(a+E) - \psi'(a-E))$$

(1) ψ et ψ' sont 0 si V est finie et $E \rightarrow 0$

\rightarrow pour une barrière qq. de largeur ϵ pour.
 mais qd a fait des découpages, la barrière infinitésimale doit \uparrow grande (limite du tunnel).

\rightarrow • coeff. de R et T: ~~car~~ il faut faire plusieurs fois l'exp pour voir si la fct d'onde passe.

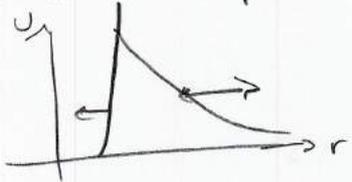
→ interaction forte et électromagnétique

He

forte : interact^o forte avec les nucléons de la noyau.
mais sur une distance courte ($qq \text{ fm}$).

et interact^o coulombienne : répulsion sur une distance longue.

⇒ particule α ne pouvant pas pénétrer : Fusion.



interact^o électromagnétique : photon

m nul \Rightarrow interact^o grande

interact^o avec gluon

m grande \Rightarrow interact^o faible.

→ manifestat^o de l'effet tunnel avec De Broglie. (λ)

CP 43: Evolution temporelle d'un syst quantiq a 2 niveaux

Niveau : L3

B. Spino : Cohen
• Astangul.

Pre-requis : - Schrodinger

Plan : I Prolegomenes (v)

- 1) Recherche des etats stationnaires
- 2) Superposition d'etats stationnaires

II Syst a 2 niveaux (c)

- 1) Posit° du pb
- 2) Effet du couplage

III Applicat° a la molecule d'annee. (A).

CP 43
①

double part

I Role d'anne

II Evolut° temporelle

1) Libre

2) Forcé

Intro:

Syst etudie en meca Q est purement probabiliste et est caracterise par une fonction d'onde et le module au carre caracterise une densite de probabilite.

I] 1)

Evolut° d'une part d'onde est donnee par l'eq de (S)

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle$$

où $|\psi\rangle$: un vecteur et appelle ket et qui depend a priori du tps.

$H(t)$: operateur hamiltonien. et qui depend a priori du tps.

Ici H ne depend pas du tps. H est associe a une grandeur Ψ et

H est hermite tq ses vp caracterisent les energies propres du syst.

$$\Rightarrow H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$

H indpt du tps \Rightarrow les etats correspondant s'appellent etats stationnaires.

2) D'apr l'algebre lineaire, on peut ecrire que ket s'ecrit $\hat{=}$ une CL des etats stationnaires tq:

$$|\psi(t)\rangle = \sum c_n(t)|\varphi_n\rangle, \quad \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = \text{BON}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d \langle \varphi_n | \psi(t) \rangle}{dt} = \langle \varphi_n | H | \psi(t) \rangle$$

$$\langle \varphi_n | H \sum c_n(t) |\varphi_n\rangle = c_n(t) E_n$$

$$\Rightarrow c_n(t) = c_n(t_0) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} (t-t_0)}$$

evolut° temporelle de l'hamiltonien.

II]

1) • Syst \mathcal{P} est l'espace des états est de dim 2
 Nous choisissons pour base le syst de 2 états propres $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$
 de H_0 , de up E_1 et $E_2 \Rightarrow H_0|\psi_1\rangle = E_1|\psi_1\rangle$
 $H_0|\psi_2\rangle = E_2|\psi_2\rangle$
 et $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$

• Perturbat° est tq $H = H_0 + W$. (W up de \mathcal{P})
 Ces états et up de H sont désignés par $|\psi_{\pm}\rangle$ et E_{\pm} . tq

$$H|\psi_+\rangle = E_+|\psi_+\rangle \quad \text{et} \quad H|\psi_-\rangle = E_-|\psi_-\rangle$$

De la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ tq $(W_{11}, W_{22}) \in \mathbb{R}$ ²
 $W_{12} = W_{21}^*$

En l'absence de couplage, E_1 et E_2 sont les énergies possibles du syst et les états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont des états stationnaires. Le pt consiste à évaluer les modificat° qui apparaissent lorsqu'on introduit le couplage W

• Conséq du couplage: $\rightarrow E_1$ et E_2 ne sont plus les énergies possibles du syst
 $\rightarrow |\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ ne sont plus des états stationnaires

2) • $H = \begin{pmatrix} E_1 + W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} E_1 + W_{11} - \lambda & W_{12} \\ W_{21} & E_2 + W_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (E_1 + W_{11} - \lambda)(E_2 + W_{22} - \lambda) - W_{12}W_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) + (E_1 + W_{11})(E_2 + W_{22}) - W_{12}W_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2}$$

UP \rightarrow vecteurs propres associés : $|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\psi_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\psi_2\rangle$
 $|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |\psi_1\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |\psi_2\rangle$

tq $\tan\theta = \frac{2|W_{12}|}{E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22}}$

$$W_{21} = |W_{21}| e^{i\varphi}$$

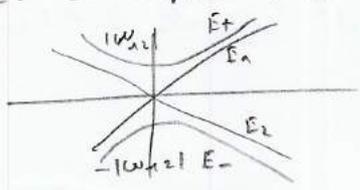
• Supposons now $(W_{22} = W_{11}) = 0$

$$\Rightarrow E_+ = E_m + \sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2}$$

$$E_- = E_m - \sqrt{\Delta^2 + |W_{12}|^2}$$

$$E_m = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$$





Molécule d'ammoniac: $H|\Psi_{\pm}\rangle = E_{\pm}|\Psi_{\pm}\rangle$, $E_{\pm} = E_0 \pm \hbar\omega$.

• Base de $|\Psi_{-}\rangle$, $|\Psi_{+}\rangle$: $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hbar\omega$.

(Pn)
2

• A $t=0$, état de la molécule est:

$$|\Psi(t=0)\rangle = c_{+}|\Psi_{+}\rangle + c_{-}|\Psi_{-}\rangle$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = c_{+} e^{\frac{E_{+}t}{\hbar}} |\Psi_{+}\rangle + c_{-} e^{\frac{E_{-}t}{\hbar}} |\Psi_{-}\rangle$$

$$= e^{\frac{E_0 t}{\hbar}} (c_{+} e^{-i\omega t} |\Psi_{+}\rangle + c_{-} e^{+i\omega t} |\Psi_{-}\rangle).$$

$$|c_{+}|^2 + |c_{-}|^2 = 1$$

• Opérateur associé à la coté 2, sur $|\Psi_{-}\rangle, |\Psi_{+}\rangle$: $Z = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

→ valeurs moy et écarts quadratiques de Z de l'état $|\Psi_{\pm}\rangle$
 $Z|\Psi_{\pm}\rangle = a|\Psi_{\pm}\rangle \Rightarrow$ val moy de Z nulle.
 $\Delta Z^2 = a^2$

→ up β_i de Z: $\beta_1 = -a$, $\beta_2 = a$.

→ up normalisable: $|\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{+}\rangle - |\Psi_{-}\rangle)$
 $|\beta_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_{+}\rangle + |\Psi_{-}\rangle)$

$$\Rightarrow |\Psi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle)$$

$$|\Psi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle)$$

• A $t=0$, mol de $|\beta_2\rangle$, soit $|\Psi(t)\rangle$ à t.

$$\rightarrow |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{E_0 t}{\hbar}} (e^{-i\omega t} |\Psi_{+}\rangle + e^{+i\omega t} |\Psi_{-}\rangle)$$

$$\rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{\frac{E_0 t}{\hbar}} (\cos \omega t |\beta_2\rangle - i \sin \omega t |\beta_1\rangle)$$

$$P_2(t) = \cos^2 \omega t \quad P_1(t) = \sin^2 \omega t$$

→ fréquence d'oscillation 50 GHz .

→ part° moy $\langle Z \rangle(t) = a \cos 2\omega t$.

À savoir du quiz: (avec le régime forcé!)

LP44: Capacités thermiques, description et interprétation

MIDO.

(LP44) 17

Niveau: NP

Bibli: Dio, thermo

Pré-requis: • Facteur de Boltzmann

Physiq toute Université
prog NP - NP
Sang

Plan: I Approche générale

1) Thermodynamique classique

a) def (D)

b) Relat° thermo (D)

2) Thermodynamique statistique

a) Capacité thermique à 2 niveaux d'énergie non dégénérés.

b) Théorème d'équipartition de l'énergie

II Capacité thermique des GP

1) GP mono

2) GP dia

3) Améliorat° du modèle dia

III Capacité thermique d'un solide

1) Loi de Dulong et Petit

2) modèle d'Einstein

Intro:

I] 1) a. À partir de l'entropie qui est def les capacités thermiques.

• Syst caractérisé par sa α^c et l'ens des variables primitives $\{x_j\}$

\Rightarrow capacité calorifique aux $\{x_j\}$ est : $C_{\{x_j\}} = T \frac{\partial S}{\partial T} /_{\{x_j\}}$

$C_{\{x_j\}}$ dT représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir au syst pour \uparrow sa α^c de dT alors que x_j est maintenu const.

ici $x_j = V$ donc C_V .

• Def capacité calorifique d'un syst où est maintenu const le grandeur conjuguée x d'une variable de état primitive α^c .

$$\Rightarrow C_p = T \frac{\partial S}{\partial T} / p, \text{ syst.}$$

b. Relation de Mayer $C_p - C_v = \frac{p \Delta^2}{\kappa_T}$
 syst stable que si $C_v > 0 \Rightarrow C_p > C_v > 0$.

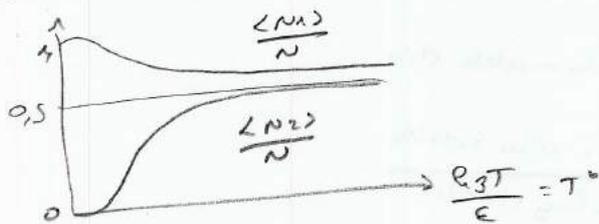
2) a. Energie interne d'un syst: $U = \langle E_{\text{syst}} \rangle \approx E_{\text{syst}}$
 $C = \frac{dU}{dT} = \frac{d \langle E_{\text{syst}} \rangle}{dT}$

Calcul pour un syst a 2 niveaux d'energie non degeneres.

→ état fond $E_1 = -E$
 → état excité $E_2 = E$ } $g = 2E$.

• probabilité: $p(E_1) = \frac{\exp(\frac{E}{k_B T})}{2}$, $p(E_2) = \frac{\exp(-\frac{E}{k_B T})}{2}$
 ou $Z = \exp(\frac{E}{k_B T}) + \exp(-\frac{E}{k_B T}) = 2 \cosh(\frac{E}{k_B T})$

• populat^{on} moy des 2 états: $\langle N_1 \rangle = N \frac{\exp(\frac{E}{k_B T})}{2 \cosh(\frac{E}{k_B T})}$



RQ: $T^* \ll 1$, niveau excité quasiment pas peuplé $\langle N_1 \rangle \approx N$
 $T^* \gg 1$: $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = \frac{N}{2}$.

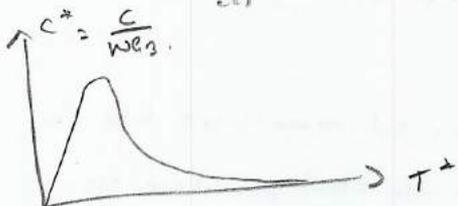
• Energie moyenne:

$$\langle E \text{ particule} \rangle = p(E_1) E_1 + p(E_2) E_2 = \frac{E}{2} \left(-\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \right) = -E \tanh\left(\frac{E}{k_B T}\right)$$

$$\Rightarrow \langle E_{\text{syst}} \rangle = -N E \tanh\left(\frac{E}{k_B T}\right)$$

• Capacité thermique:

$$C = \frac{d \langle E_{\text{syst}} \rangle}{dT} = \frac{N E^2}{k_B T^2} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{E}{k_B T}\right) \right)$$



RQ: $T^* \ll 1 \Rightarrow T \ll \Theta = \frac{E}{k_B}$
 agitat^{on} therm^{ique} pas assez pour aller ds l'état excité.

• $T \gg \Theta$, les 2 niveaux ne dependent \oplus de la $^{\circ}C$.

I] 2) b. • On se réfère à l'éq à la °C T, l'énergie moy par molécule associée à un degré de liberté quadratique est: $\langle \epsilon_j \rangle = \frac{1}{2} k_B T$. (LP 40) (3)
 = théorème d'équipartition de l'énergie.

• Cas du ρ capacité thermique molaire.

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T \Rightarrow U = \frac{1}{2} N k_B T.$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{1}{2} N_A k_B T = \frac{1}{2} RT \Rightarrow C_{v,m} = \frac{1}{2} R.$$

\Rightarrow chaque degré de liberté quadratique T du $\frac{1}{2} R$ la capacité thermique molaire à vol est.

II] 1) 6 degrés de liberté: $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

$$E_{c, \text{molécul}} = E_{m, \text{molécul}} = \frac{1}{2} m^* (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(ϕ énergie potentielle car mol n'a ni moment ni spin intrinsèques).

$\frac{7h}{2} \Rightarrow$
 équipartition

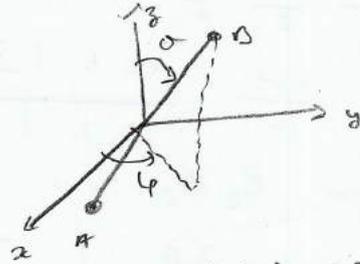
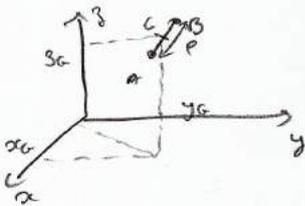
$$C_{v,m} = \frac{3}{2} R$$

ex: $T = 20^\circ C$

$$\text{He: } C_{v,m} = 12,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{Ar: } C_{v,m} = 12,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2) Modélisation: 2 pts matériels A et B, et rattachés par leur centre de masse.



$$E_{\text{méca}} = E_{c, \text{mol}} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (r \sin \theta)^2 \dot{\varphi}^2$$

\Rightarrow 5 degrés de liberté quadratiques:

- 3 de translat°
- 2 de rotat°

$$\} \Rightarrow C_{v,m} = \frac{5}{2} R$$

ex pour Ar_2 et N_2 ...

- 3) • mots de vibration: \Rightarrow induct^o de 2 tons a $\Theta \Rightarrow C_{v,m} = \frac{7}{2} R$.
- effet de la quantification de l'énergie:
- $T \gg \Theta$: ignorer la quantification de l'énergie car niveaux courts.
- $T \ll \Theta$: agitat^o thermique non suffisante pour peupler les niveaux excités
- \Rightarrow état de transl^o, rotat^o, vibrat^o !

III]

1) atome de une structure cristalline

$$\Rightarrow E_{\text{atome}} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + ax^2 + by^2 + cz^2.$$

$$\Rightarrow 6 \text{ degrés de liberté} \Rightarrow C_{v,m} = 3R \approx 25 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

\Rightarrow loi de Dulong et Petit mais elle ne rend pas compte de la variat^o avec la $^{\circ}C$, effet a constater que $C_{v,m} \propto T^{\alpha}$ \Rightarrow quantification de l'énergie des atomes.

modèle Einstein

2) = atomes = oscillateurs harmoniques. 3 direct^o possibles \Rightarrow 3 oscillateurs en 1 dim.

oscillateur harmonique $E_n = (n + \frac{1}{2}) h\nu$.

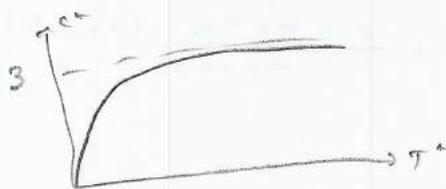
$$P(E_n) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_n) \text{ avec } \beta = \frac{1}{k_B T} \text{ et } Z = \sum_0^{\infty} \exp(-\beta E_n).$$

$$\Rightarrow \langle E_{\text{oscillateur}} \rangle = - \frac{1}{Z} \sum_0^{\infty} E_n \exp(-\beta E_n) = - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$$

$$= \frac{h\nu}{2} \frac{\cosh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)}$$

on déf $^{\circ}C$ d'Einstein par $\beta_0 \Theta_E = h\nu$.

$$U_m = \dots \Rightarrow C_{v,m} = 3R \left(\frac{\frac{\Theta_E}{2T}}{\sinh\left(\frac{\Theta_E}{2T}\right)} \right)^2.$$



Fin.

CP 45: ⁺ Para, Ferro : approximati° du champ moyen!

(PLS)
②

Niveau : L3

Pré-requis : magnétisme mou
• Statistique de Boltzmann.

(H1)
Biblio: H-para : Thoma
(H2) H-para : EON.
(H3) Para : EON.

Plan: I Nature et magnétisme

- 1) Différents matériaux (H2)
- 2) Aimantati° et susceptibilité magnétiq (H1,2).
- 3) Aspect micro : magnétisme de spin

II Para (H1)

- 1) Origine
- 2) Expression stat
- 3) Loi de Curie.

III Ferro (H1 et 2)

- 1) Origine
- 2) Approximati° du champ moyen.
- 3) Transiti° ferro-para

Intro (H1): Les prop mag de certains matériaux st connus depuis 2500 ans.
Le mot magnétisme vient de l'ancienne ville Magnésie : on avait découvert que certaines pierres attirait le fer.

(H2) Les matériaux acquièrent sous l'effet d'un champ mag certains prop.
Suivant le matériau, ils répondent pas de la même façon au champ mag.

I] 1) Exp: électroaimant + Bi, Al, Fe de l'acier. => obs de F (constitut)

(H1) • Corps constitués de particules ne possédant pas de moments magnétiques clis
• possédant un moment magnétique permanent:
-> moments orientés aléatoirement : para
-> orientati° des moments : ferro.

2) • Soumis à B, matériau acquiert d $\vec{n} = \vec{n} dB$, \vec{n} : valeur et orientati°.
-> à milieu orienté: (ferro : orientati° permanent),
et a a $\vec{D} n \vec{n} = \vec{J}$ aimantati°.

- $\vec{J} = \vec{J}_{\text{courant}} + \vec{J}_{\text{spin}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{n} + \vec{J}_{\text{courant}}$
- $\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{B} + \vec{J}_a) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $\Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{n}) = \mu_0 \vec{J}_a + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{n}$: vecteur circulateur magnétique.

- Similitude Curie : $\vec{n} = \left(\frac{\chi_m}{\mu_0} \right) \vec{B}$ $\Rightarrow \vec{n} = \chi_m \vec{H}$.
- O.D.B de χ_m pour fer, para, dia.

3) Regarder l'aspect quantique des prop magnétiques !

- moment cinétique \vec{L} caractérisé par J .
- $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \hbar \vec{n}$, $\vec{n} = -e \frac{\vec{J}}{T}$
- $n_z = -g \mu_B$ avec g : facteur de Landé.

II] 1) En présence de champ mag, les spins :

- \rightarrow vont s'aligner ds le sens de \vec{B} .
- \rightarrow les agitations thermiq s'opposent à l'alignement ~~sur~~ autour de l'axe de \vec{B} .

2) • Statistique de Boltzmann.

$$w_i = A \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k_B T}\right) \quad \text{avec } A = \frac{1}{\sum \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k_B T}\right)}$$

• Cas du spin $1/2$:

n_j prend 2 valeurs : $\pm \mu_B$, $\epsilon = -\vec{n}_j \cdot \vec{B} = \pm \mu_B B$

\Rightarrow quantification du syst donnée par :

$$n = N \mu_B \text{th}\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right)$$

3) • Approximat° Curie :

Si $\mu_B B \ll k_B T \Rightarrow \text{th}\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) \approx \frac{\mu_B B}{k_B T}$, et $n = \frac{\chi_m}{\mu_B}$

$\Rightarrow \chi_m$ dépend de la $^{\circ}C$: loi de Curie : $\chi_m = \frac{C}{T}$

• Généralitat° : Un moléculaire para est Curie $\gg k_B T \gg \mu_B B$.

$\vec{n} = \frac{\chi_m}{\mu_B} \vec{B}$ et χ_m dépend de la $^{\circ}C$ et de Curie. $\chi_m = \frac{C}{T}$

III

1) Prop suivantes:

- Parté anatale
- na lue'au
- amantat opertane e l'absence de charge
- \exists d' un σ de la CWie où σ prop charge

CP 45
②

2) Approximation + obtenir \vec{n}
+ parler des densités de Weiss

3) Transitions Foro-para: Par la nup ...

CP 46: Prop macro des corps fero

CP 46
①

Niveau: L3

Pre-requis: - aspect micro des fero
- equat° de Maxwell

Bibli: (P)
- P. Feynman, electromag
- H. P. P. : electromag.
- La P des objets
(R) quotidiens, Ray et
Poizat
- peut être BFR
electromag.

Plan: I Présentation

- 1) Approche corp (P)
- 2) Equat° de Maxwell dans milieu magnétique (H)

II Amatation d'un matériau fero

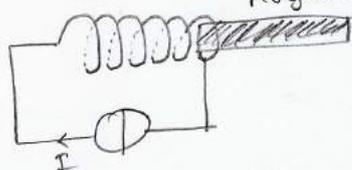
- 1) Dispositif expérimental et caractéristique (H)
- 2) Caractéristique du cycle d'hysteresis (H)
- 3) Classement des matériaux fero (H)
- 4) Pertes dues à l'hysteresis (H)

III Applicat°

- 1) Electromant (?)
- 2) Disque dur (R)

Intro: (P): Certains corps solides présentent une amatation en l'absence de champ magnétique appliqué. Cette amatation s'explique et s'appelle ferromagnetisme. et les corps qui la possèdent les ferromagnétiques (Ici aspect macro). En raison de l'importance des applicat° des fero dans le domaine de l'électricité industrielle, nous étudierons qq ex de circuits mag en soulignant au passage les méthodes d'analyse de ce type de circuits

I] 1) (P)



noyau de fer, non amaté. de ce champ magnétique.

obs: « noyau attiré par le solénoïde et s'immobilise de la section où le champ magnétique est le plus fort »

« si on coupe le courant
⇒ matériaux fero amaté »

Ici résultats analogues au para: mais \neq de l'ordre de grandeur (para 10^{-3} , fero 10^4).

mais autres prop pour le ferro :

- n'J qui a l'état excité.
- ferro disparaît si $T > T_c$.
- ns alliage ferro :

2) (H) : Plage de un champ magnétique, un milieu diamagnétique tq $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$

• $\vec{J} = \vec{J}_{\text{amatiat}} + \vec{J}_{\text{autre}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{J}_{\text{autre}}$
 $\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0 \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}_{\text{autre}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
 $\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{A}}{\mu_0} = \text{vecteur d'excitation mag du milieu}$

- 2 hyp :
 * $\vec{J}_{\text{autre}} = \vec{J}_{\text{ext}}$
 * A.A.Q.S $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ négligeable devant $\mu_0 \vec{J}_{\text{autre}}$.

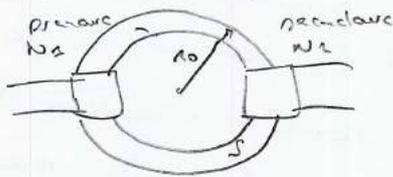
• Th d'Ampère : $\oint \vec{H} \cdot d\vec{P} = I_{\text{exte placé}}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{exte}}$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
 $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

On va réaliser cette étude autour d'une application : le transformateur

II

1) Étude d'un ferro de forme torique de rayon R_0 et de section S



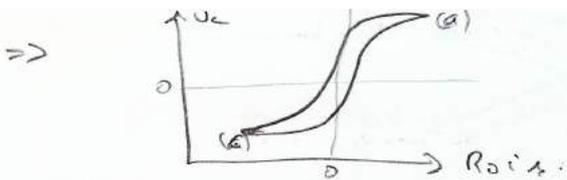
But : trouver \vec{H} et \vec{B} .

- Montage : → au niveau du secondaire, le pont diviseur RC joue le rôle d'ohmmètre tq $U_c = \frac{1}{RC} \int U_2 dt$.
 → la résistance $R = 100 \text{ k}\Omega$ est grande devant toutes les autres impédances → courant du circuit secondaire pourra être négligé devant celui du 1^{er}.

• Lia entre H et i_1 : $\vec{H} = \frac{N_1 i_1}{2\pi R_0} \vec{e}_\theta$

• Lia entre \vec{B} et U_c : $U_c = \frac{N_2 B(t) S}{RC}$

\Rightarrow tracer $U_c = f(R_i)$ revient à tracer $B = f(H)$.



⇒ hysteresis

(2)

2) * Caractère pur: - $\vec{B} \gg \mu_0 \vec{H}$ de $\vec{n} \gg \vec{H}$ et $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{n}$.
 - $\frac{|\vec{n}|_{max}}{|\vec{H}|_{max}} \approx \frac{|\vec{B}|_{max}}{\mu_0 |\vec{H}|_{max}}$
 ⇒ relat° entre \vec{n} et \vec{H} : un luciare

* Amantat° à saturation:
 • $H_{max} \uparrow$ bcp ⊕ cite que B_{max} .
 • (a), (c): \vec{B} varie linéairement en pct de H .
 • obs d'une annulation à saturat°.

* Champ permanent: pour $H=0$, $B \neq 0 \Rightarrow$ champ permanent
 Le champ magnétique des aimants permanents est un champ permanent.

* Champ coercitif: B s'annule pour une certaine valeur de H : champ coercitif H_c .

3) (Classés en pct de la forme de leur cycle d'hysteresis. $\vec{n} = \mu_r \vec{H}$
 $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
 → cycle étroit: milieu doux $H_c < 100 \text{ A m}^{-1}$
 → cycle large: " dur: $H_c > 1000 \text{ A m}^{-1}$

4) * Pertes de Foucault: pertes proportionnelles à:
 • la conductivité du milieu
 • au carré de la fréquence
 • au carré de la sect° des tôles
 • au carré de la val max du champ magnétique
 ⇒ pour minimiser ces pertes: construire les tôles peu épaisses au champ magnétique

* Pertes dues à l'hysteresis:
 puissance vol moyenne correspondante est donnée par:
 $\langle P_{H, vol} \rangle = \oint H dB$

III

1) Son rôle est de stocker des données et de les capter, une fois l'alimentat° coupée.

Principe de structure:

matériau ne
éproue à \vec{B} et
 Φ d'orientation
commune

quelques
 $\frac{u}{\vec{B}}$

dans un vent
s'orienter de la
direction du champ
magnétique

si courant \oplus
 $+I$
si courant \ominus

code binaire 1

code binaire 0

Principe de lecture

basée sur la variation de la résistance de certains matériaux
avec l'intensité du \vec{B} de lequel ils sont placés. On peut \rightarrow la
taille des zones d'écriture et \uparrow la densité d'info.

2) ...

CP 67 Mécanisme de la conduction électrique des solides

Niveau : L3

Pré-requis : EON.

Bibli : (A) Ashcroft : Phys des solides
 (V) - Feyn, EON.
 (H) - H. propa EON

(B) Bup SSU, décembre 1972
 Prop + Pectonig des solides.

(C) Cap propa PC-PC+
(B et C éventuellement)

Plan : I Modèles et Planig de la conduction électrique

- (A, C, B) 1) Modèle de Drude - hyp
- (P) 2) Calcul de la conductivité
- 3) Loi d'ohm intégrée

II Applicat° et Limites

- 1) Effet Hall (H)
- 2) Sonde à effet Hall (+)
- 3) Limites des modèles (P) & (B)

III Introduct° à la théorie des bandes

- 1) Formal° des bandes (A)
- 2) S.C. (P)

Intu : On connaît la loi d'ohm et on veut la comprendre microscopiquement.

I] 1) Métal : gaz d'e-
 Diéle : charges \oplus : particules grosses et fixes

Hyp :
 • e- de conduction indépendants
 • e- libres
 ⇒ approximat° des e- indépendants et approximat° des e- libres
 • collisions instantanées
 • caractéristique : temps de relaxation ($\tau = 1/\nu$ de collision).

2) (P) * A l'éq thermique : $\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i = \vec{0}$.

• TRC $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m}$ (interprétat° collisionnelle.)

deux dx de l'une e- : $\Delta x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \Rightarrow \bar{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \tau^2$

• hyp ergodique : Soit $n(t)$ le nb de particules n'ayant subi aucune collision
 $dn = -n(t) \frac{dt}{\tau} \Rightarrow n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$

• Probabilité que la particule subisse une collision:

$$dP = + p(t) dt = - \frac{dn}{n_0} \text{ avec } p(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-t/\tau} \text{ et } \int dP = 1$$

$$\Rightarrow \text{durée de collision: } \bar{t} = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \tau$$

$$\Rightarrow \bar{t}^2 = \int_0^{\infty} t^2 p(t) dt = 2\tau^2 = 2\sigma^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{qE}{m} \sigma^2$$

$$\Rightarrow v_{\text{moy}} = \frac{\Delta x}{\sigma} = \mu E \quad ; \quad \mu = \frac{q\sigma}{m} = \text{mobilité.}$$

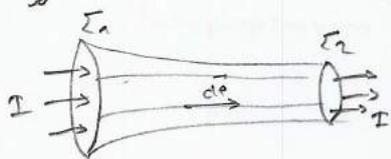
$$\text{Or } \vec{j} = n_0 q v = n_0 q \mu \vec{E} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{n_0 q^2 \tau}{m}$$

(P) * métaux : $\sigma \geq 10^4 \text{ S.m}^{-1}$
isolant $\sigma \leq 10^{-6} \text{ S.m}^{-1}$.
s.c de reste.

* pour un s.c $\vec{j} = e(-n_e \mu_e + n_p \mu_p) \vec{E}$

• Influence de T : si T ↑ $\Rightarrow \sigma \uparrow$ pour un métal
si T ↑ $\Rightarrow \sigma \downarrow$ pour un s.c.

3) (H):



$$I = \iint_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{\Sigma}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{\Sigma}_2$$

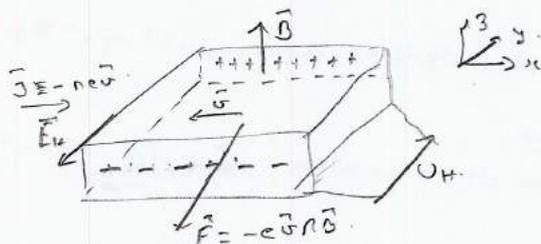
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow U = V_1 - V_2 = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}} = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\sigma \iint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}} = \frac{EL}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma S} = \frac{\rho L}{S}$$

ρ : résistivité au milieu en s.c.

II) 1)



Régime permanent:

$$q \vec{E}_H + q \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = R_H \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

avec $R_H = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon}$
cte en H.P.P.

$$2) U_H = \int_{\Sigma} -\vec{E}_H \cdot d\vec{l} = -b E_H = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} I b$$

car $I = j a b$.

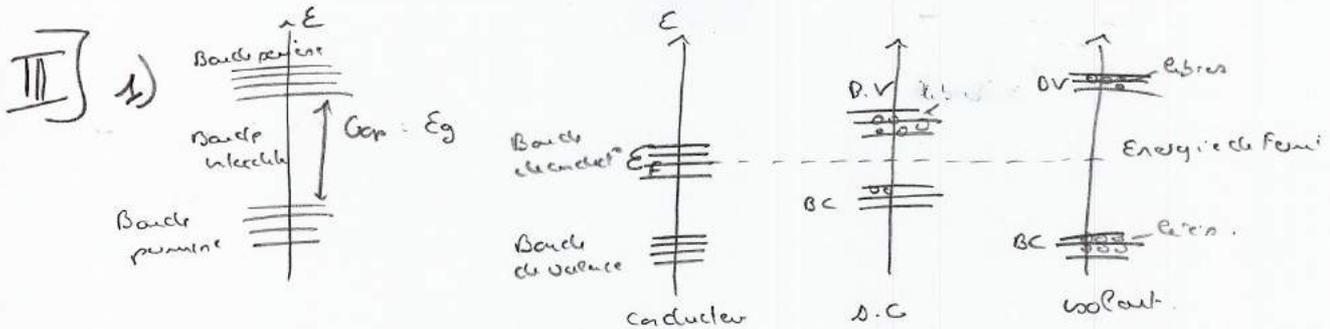
3) (P) ou (B): regarder la valeur de v_{ray} d'un GA d' e^- à 0°C ambiante.

$$U = \frac{m_e v_{\text{ray}}^2}{2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} m_e v_{\text{ray}}^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_{\text{ray}} = 0,12 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \lambda = v_{\text{ray}} \tau \approx 2,8 \text{ nm.}$$

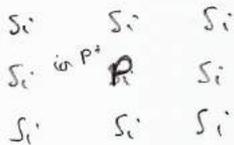
Or distance interatomique $\approx 0,2 \text{ nm}$. \Rightarrow ce ne sont pas les collisions sur les ions du réseau qui est responsable de la loi d'ohm.

(1947)
②

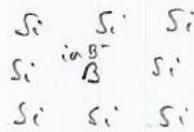
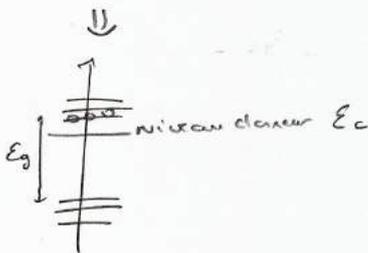


$E_F > E_g$ pour qu'un e^- du B.V accède à B.C.

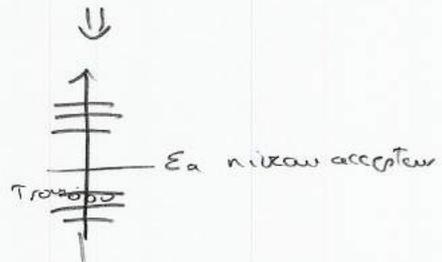
2) Rôle des impuretés dans SC.



(cations P^+ donneurs d' e^-)
 \Rightarrow dopage n



cations B^- accepteur d' e^-
 \Rightarrow dopage p



CP 48: Phénomènes de résonance de 4 domaines de la page

CP 48
③

Niveau:

Pré-requis: • Diagramme de Bode

Plan: I Oscillateur à 1 degré de liberté (C1).

- 1) Mise en équation en UC
- 2) Réponse en tension
- 3) Réponse en courant
- 4) Résonance en puissance

II Oscillateurs à plusieurs degrés de liberté (F).

- 1) Oscillateur mécanique à 2 degrés de liberté
- 2) Carte de Nyquist (C2).

III Résonateur de Post-Fabry (D)

Biblio: C1) Cap propa NPSI
PSSI

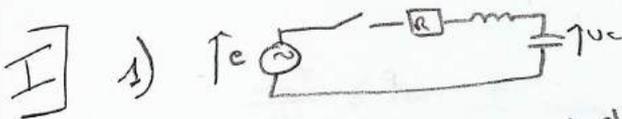
(F) Fasoli, Renault
Nica de pendule
et des méca

(C2) Cap propa PSSI
ou PC

(D) Leslaur,
Daugaine

Info:

Résonance: • Comportement fréquentiel.
• transfert max de puissance de l'oscillateur vers l'oscillateur.
• on regarde ici que des phénomènes linéaires!



$$Z \lambda = \frac{R}{2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

équation: $e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + U_C$

$$i = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 U_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 E \cos(\omega t)$$

$U_C = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ → régime sinusoïdal forcé: $U_C = \underline{U}_m e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow \underline{U}_m = \frac{E \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega} = \frac{E}{1 - \alpha^2 + j \frac{2}{Q}}$$

avec $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$, $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$

2) But: Trouver U_m et φ .

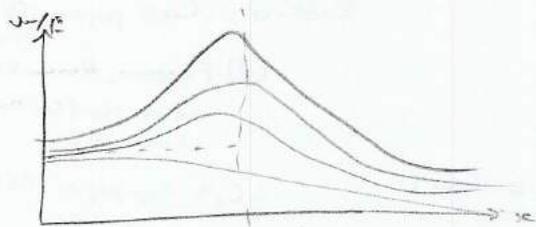
• $|U_m| = U_m = \frac{E}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \frac{4}{Q^2}}}$

Posons $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$, f est minimale $\Leftrightarrow \frac{df}{dx} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} ()^{3/2} (-4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}) = 0 \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{Q^2} - 2(1-x^2) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{cases}$$

- $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} \leq 0 \Rightarrow U_m(x)$ est monotone \Rightarrow et mes a mes 0
- $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, mes a $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. = phanone de resonance.

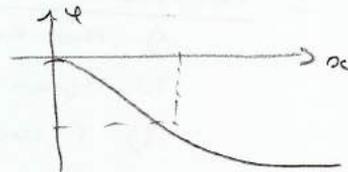


• Etude de la φ

$$\varphi = \arg(\underline{U}_m(x)) = -\arg((1-x^2) + j\frac{x}{Q})$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$$

- \rightarrow Ici $\sin \varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in]-\pi; 0]$
- \rightarrow si $x \rightarrow 0$, $\varphi = 0$
- si $x \rightarrow \infty$, $\varphi = -\pi$.

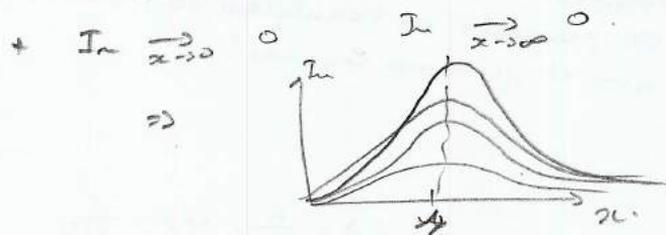


3) $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i}_m = j\omega \underline{U}_m$

$$\Rightarrow \underline{i}_m = \frac{E/R}{1 + jQ(\alpha - \frac{1}{\alpha})}$$

• $I_m(\omega) = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\alpha - \frac{1}{\alpha})^2}}$

- + Note qd denominator min \Rightarrow qd $\omega_r = \omega_0$
- \Rightarrow resonance en vitesse pour $\omega_r = \omega_0$!



- Largeur de la courbe de resonance pour $I_m(\omega) \geq \frac{I_{m,0}}{\sqrt{2}}$

Trouver les bornes, il faut résoudre.

$$\frac{I_{m,0}}{\sqrt{2}} = I_m(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\alpha - \frac{1}{\alpha})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

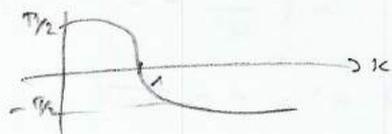
$$\Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \omega_0 \left(\pm \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (\text{Resonance aigue ou floue!})$$

- Etude de la φ : $\varphi = \arg(\underline{i}_m) = \arg(\underline{U}_m) + \frac{\pi}{2}$



4) Résonance en puissance: ici $e(t) = E\sqrt{2} \cos \omega t$ avec E tension efficace. (CPG 2)

$$\Rightarrow e_i = R_i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$$

$$P_G = P_S + P_M + P_E$$

$$\Rightarrow \langle P_G \rangle = \langle P_S \rangle$$

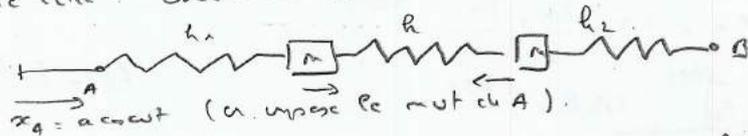
$$\text{Or } \underline{i_m} = \frac{E\sqrt{2}}{R} \frac{1}{1 + \omega^2 \left(L^2 - \frac{1}{\omega^2} \right)} \Rightarrow \langle P_G \rangle = \frac{E^2}{R} \frac{1}{1 + \omega^2 \left(L^2 - \frac{1}{\omega^2} \right)^2}$$

Pour $\omega = \omega_0$: il y a résonance pour $\omega = \omega_0$, tq $\langle P_G \rangle = \frac{E^2}{R}$.



II) 1) (Titre de la leçon: oscillat° forcés - Résonance, antirésonance).

Soit le syst:



PFD à chacune des masses:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -R_1(x_1 - x_2) - R(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -R(x_2 - x_1) - R_2 x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (R_1 + R) x_1 - R x_2 = R_1 a \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (R + R_2) x_2 - R x_1 = 0 \end{cases}$$

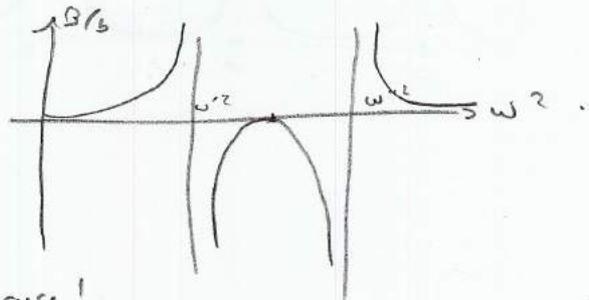
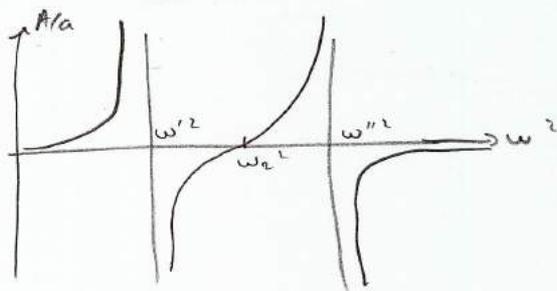
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \frac{R}{m_1} x_2 = \frac{R_1}{m_1} a \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \frac{R}{m_2} x_1 = 0 \end{cases}$$

Posez $x_1 = A \cos \omega t$, $x_2 = B \cos \omega t$ (car pas d'amortissement).

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \omega^2) A - \left(\frac{R}{m_1}\right) B = \left(\frac{R_1}{m_1}\right) a \\ -\left(\frac{R}{m_2}\right) A + (\omega_{02}^2 - \omega^2) B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{R_1 (\omega_{02}^2 - \omega^2) / m_1 a}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \frac{R^2}{m_1 m_2}}$$

$$B = \frac{R_1 / m_1 m_2}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - \frac{R^2}{m_1 m_2}} a$$



Pour $\omega = \omega_0$: phénomène d'antirésonance!

2) Cercle de Nyquist

excitat° d'une extrémité de la corde, l'autre extrémité repose sur une paroi avec une masse m .



cherche une sol sous la forme d'onde stationnaire tq:

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

CI: $y(0, t) = a \cos \omega t = y_0 \cos \psi \cos(\omega t + \psi) \Rightarrow \psi = 0 \text{ et } a = y_0 \cos \psi$

$y(L, t) = 0 = a \cos \omega t \cos(2L + \psi) \Leftrightarrow \cos(2L + \psi) = 0$

$\Leftrightarrow 2L + \psi = (n + \frac{1}{2})\pi$ d'où $\psi = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2L$

Or $a = y_0 \cos \psi = (-1)^n y_0 \sin(2L)$

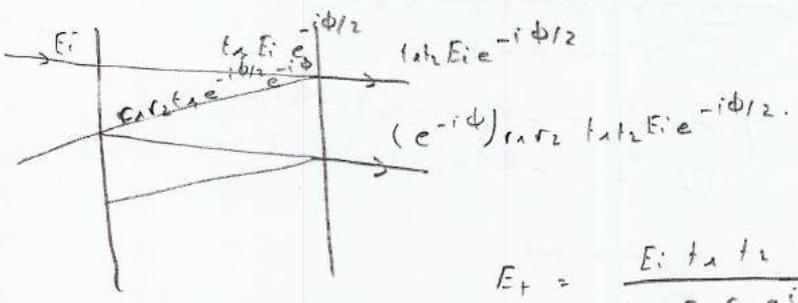
↙ resonance pour les fréquences propres du syst.

$\Rightarrow y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(2x + \psi) = \frac{a}{\sin 2L} \sin(2(L-x)) \cos(\omega t)$



Cavité type Perot-Fabry : 2 miroirs m_1 et m_2 à distance L .

Sont r_1, r_2, t_1, t_2 coeff de réf et transmission.



$E_t = E_i t_1 t_2 [1 + r_1 r_2 e^{i\phi} + (r_1 r_2 e^{i\phi})^2 + \dots] e^{i\phi}$

Son incidence normale :

$\phi = 22L = \frac{4\pi L \omega}{c}$

$E_t = \frac{E_i t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} e^{-i\phi/2}$

$\Rightarrow I_t = E_t^* E_t = \frac{I_i}{1 + (\frac{2}{\delta})^2 \sin^2(\frac{\pi \omega}{c/2L})}$

avec $\delta = \frac{1-R}{\sqrt{R}}$

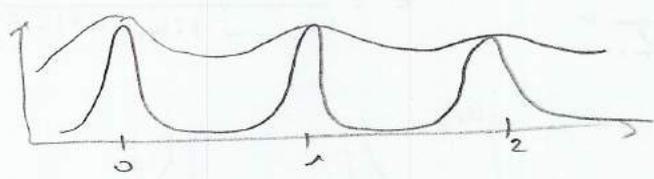
$R = |r_1|^2 = |r_2|^2$

$T = |t_1|^2 = |t_2|^2$

\Rightarrow La courbe de transmission I_t/I_i présente ces

resonances pour $\omega_m = m \Delta \omega_c$, $\Delta \omega_c = \frac{c}{2L}$ où ω varie entre 2 rés.

$Q = \frac{\omega}{\Delta \omega}$ avec $\Delta \omega = \frac{\Delta \omega_c}{\pi} \frac{T}{\sqrt{R}}$



$Q \sim 10^8$ pour ω laser
à ω_c

CP 40: Casuement d'une particule et quantification de l'énergie.

CP 40
①

Niveau: C3

Biblio: Cohen.

Pre-requis: Schrödinger

Plan: I Approche semi-classique: modèle de Bohr

- 1) Spectre de l'hydrogène.
- 2) modèle de Bohr.
- 3) Transition électrique

II Approche quantique:

- 1) Particule dans un puits fini
- 2) " " " infini

Intro: quantification vient du casuement.
propriété quantique: dualité onde/corpuscule.

I 1) Exp avec la lampe à hydrogène
⇒ spectre discret à l'écran, observation de 2 raies.

$$2) (n) \cdot \oint p dq = n h \Leftrightarrow \oint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} dq = n h$$

$$\mathcal{L} = T - U(r) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\text{d'où } m r^2 \dot{\varphi} 2\pi = n h \Leftrightarrow m r^2 \dot{\varphi} = n \hbar$$

$$\text{Or } \vec{G} = \vec{\sigma} \wedge \vec{v} = r m r \dot{\varphi} \vec{e}_z \Rightarrow \underline{G = n \hbar}$$

$$\bullet \text{Ved électrique} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad U = -qV.$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\text{PFD: } -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -m \frac{\dot{\varphi}^2}{r} = -m \frac{v^2}{r} \quad \text{accélération centripète.}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{Ze^2}{m 4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{Or } m r v = n \hbar \Rightarrow v = \frac{n \hbar}{m r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m Ze^2} \quad \text{à tester!}$$

état Paul n=1!

$$\Rightarrow v = \frac{h \hbar}{m r} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar n}$$

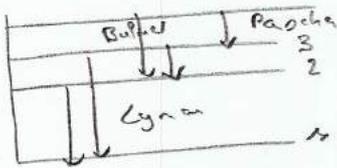
$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = - \frac{1}{(4 \pi \epsilon_0)^2} \frac{m e^4}{2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}$$

$$= -R \frac{Z^2}{n^2}$$

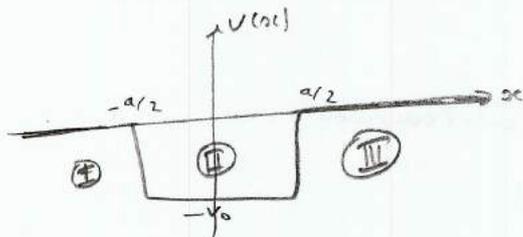
R : cte de Rydberg

$$3) \Delta E = h \nu = R Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$



II) 1)



Plaçons nous de la case $-V_0 < E < 0$

Zone I: $V(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E \psi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{E 2m}{\hbar^2} \psi = 0 \text{ avec } E < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_I(x) = B_2 e^{px} + B_2' e^{-px} \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{ikx} + A_2' e^{-ikx} \\ \psi_{III}(x) = B_3 e^{px} + B_3' e^{-px} \end{cases}$$

$$k = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$p = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

II)

ψ est continue en $x = -a/2$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_2 e^{+p a/2} + B_2' e^{-p a/2} = A_2 e^{+i k a/2} + A_2' e^{-i k a/2} \\ p(B_2 e^{+p a/2} - B_2' e^{-p a/2}) = i k (A_2 e^{+i k a/2} - A_2' e^{-i k a/2}) \end{cases}$$

Or $B_2' = 0$ pour que ψ soit bornée d'où:

$$\begin{cases} B_2 e^{p a/2} = A_2 e^{+i k a/2} + A_2' e^{-i k a/2} \\ p B_2 e^{p a/2} = i k (A_2 e^{+i k a/2} - A_2' e^{-i k a/2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2 = e^{-\frac{(p + i k) a/2}} \frac{p + i k}{2 i k} B_1$$

$$A_2' = -e^{-\frac{(p - i k) a/2}} \frac{p - i k}{2 i k} B_1$$

δ^0 en $x = \frac{a}{2}$

$$\frac{B_3}{B_1} = \frac{e^{-\rho a}}{4i\rho r} \left[(e+i\rho)^2 e^{i\rho a} - (e-i\rho)^2 e^{-i\rho a} \right]$$

(LP40)
②

$$\frac{B_3'}{B_1} = \frac{e^2 + e^4}{2\rho r} \sin \rho a$$

Mais $\psi(x)$ doit être bornée de $\mathbb{R} \Rightarrow B_3 = 0$ soit $\left(\frac{e-i\rho}{e+i\rho}\right)^2 = e^{2i\rho a}$.

$e^{i\rho a}$ et ρ dépendent de E , cette égalité ne peut être satisfaite que pour certaines valeurs de E . Le fait d'imposer $\psi(x)$ bornée partout \Rightarrow quantification de l'énergie.

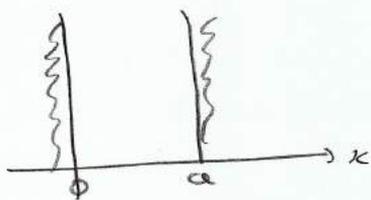
Si $\frac{e-i\rho}{e+i\rho} = -e^{i\rho a} \Rightarrow \frac{\rho}{a} = \tan\left(\frac{\rho a}{2}\right)$

Posez $k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\rho a}{2}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{\rho a}{2}\right) = \left(\frac{k_0}{\rho}\right)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\cos\left(\frac{\rho a}{2}\right)| = \frac{\rho}{k_0} \\ \text{tg}\left(\frac{\rho a}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow niveaux d'énergie déterminés par l'intersection d'une courbe en pointillés $1/k_0$ avec des arcs de sinuséides !

2)



$H\psi = E\psi$ (équation d'états stationnaires)

$$\Leftrightarrow \text{eq} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi$$

$$\psi(x) = A^+ e^{i\rho x} + A^- e^{-i\rho x}$$

avec $\rho = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$

Conditions aux limites:

en 0 et a : $\psi(x) = 0$

$$\psi(0) = 0 \Leftrightarrow A^+ + A^- = 0 \Leftrightarrow A^+ = A^- = -A^-$$

$$\Rightarrow \psi(x) = 2iA \sin(\rho x)$$

$$\psi(a) = 0 \Leftrightarrow 2iA \sin(\rho a) = 0 \Leftrightarrow \rho a = n\pi$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{n\pi}{a}$$

d'où $\rho^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar}$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}}$$

Quantification de l'énergie!

CP 49: Oscillateurs, portrait de φ [✓] non linéaire:

Niveau: L3.

LPLS
①

Biblio: (F)
- F, R méca I
(P) - PUG méca.
(S) - Branclet
méca

Pré-requis:

VDP
Vce par l'ham
pour les oscillat.

Plan: I Du linéaire au non linéaire: pendule pesant

- 1) Rés en équation (F)
- 2) Cas des petites oscillat. (F)
- 3) Perte de synchronisme (F, P)
- 4) Portrait de φ (F)

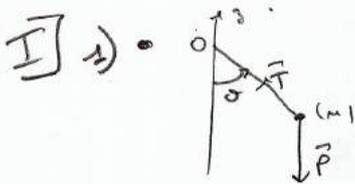
II Oscillateur anisotrope pour poutre solide (F).

- 1) Présentation
- 2) eq ou nut
- 3) Plan de phase

III Oscillateur auto-entretenu. (B)

- 1) Présentation
- 2) ex. Van der Pol.

I to: Linéaire: approximation
non linéaire: quand on pour des oscillations importantes



$$E_p = -mgl + mgl \cos \theta = -mgl(1 - \cos \theta)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \Rightarrow \text{non linéaire à cause du } \sin \theta$$

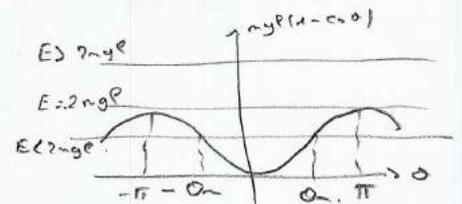
$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{2}{ml^2} \right) (E - mgl(1 - \cos \theta))$$

nut que si $\dot{\theta}^2 \geq 0$ dc si $E \geq mgl(1 - \cos \theta)$

$\rightarrow \theta \in [-\theta_m; \theta_m]$ = nut oscillent

$\rightarrow E = 2mgl \Rightarrow$ passage d'une part notable en $\theta = \pi$ ou $-\pi$.

$\rightarrow E > 2mgl \Rightarrow \theta$ peut prendre n'importe quelle valeurs.



2) Ici $E \ll 2mgl \Rightarrow \theta_m \ll \pi \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$, $\sin \theta \approx \theta$.
 \Rightarrow synchronisme des petites oscillations.

3) Poussons le DL: $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$
 $\Rightarrow \theta^3$: terme non linéaire.

solution approchée : $\Theta = \Theta_m \sin(\omega t)$ que l'on réinjecte dans l'équation :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \Theta_m \sin(\omega t) - \frac{\omega_0^2}{6} \Theta_m^3 \sin^3(\omega t) = 0$$

$$\text{Or } \sin^3(\omega t) = 3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)$$

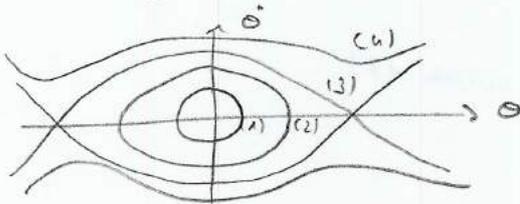
$$\Rightarrow \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2 \Theta_m^2}{8}\right) \Theta_m \sin \omega t - \frac{\omega_0^2}{24} \Theta_m^3 \sin(3\omega t) = 0$$

$$\text{Or } \sin \omega t \neq 0 \Rightarrow -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{8} \Theta_m^2 = 0$$

\Rightarrow on en déduit multiplier le numérateur et le dénominateur :

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\Theta_m^2}{8}\right)^{1/2} \Rightarrow T \approx T_0 \left(1 \pm \frac{\Theta_m^2}{8}\right)^{1/2} \approx T_0 \left(1 \pm \frac{\Theta_m^2}{16}\right)$$

$$4) E = \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\Theta}^2 + mg\rho(1 - \cos\Theta)$$



(1) $E \ll 2mg\rho$: oscillations harmoniques

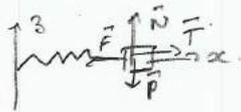
(2) : $E < 2mg\rho$: lame non écartées \Rightarrow trajectoires périodiques.

(3) : $E = 2mg\rho$: cas limite : pts singuliers

(4) $E > 2mg\rho$: trajectoire non écartée.

II

1)



$$\vec{F} = -kx \vec{e}_x$$

$$\text{PFD : } \vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -kx + F \\ 0 = N - mg \Rightarrow N = mg \end{cases}$$

• eq si $|T| < mg < P$

• mot si $|T| = P = mg$

$$m\ddot{x} = -kx + \epsilon P mg \quad \text{avec } \epsilon = \pm 1, \epsilon \dot{x} < 0$$

\Rightarrow eq non écartée.

$$2) \text{ A } t=0, x=x_0, \dot{x}=0$$

$$\rightarrow \text{eq } 0 = -kx_0 + T, N = mg$$

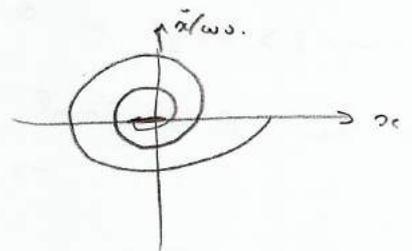
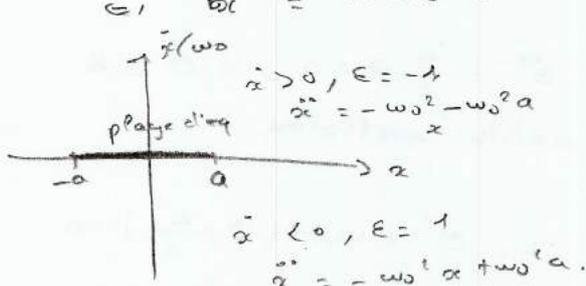
$$|T|/N < P \Leftrightarrow |x_0| < Pmg/k$$

\Rightarrow il y a une plage d'équilibre de largeur $2a$

si $|x_0| > a$: mot du ~~sol~~ pt.

$$3) m\ddot{x} = -kx + \epsilon P mg$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2(x - \epsilon a) \quad \text{avec } a = \frac{Pmg}{k}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$



III

1) Certains syst méca oscillent durablement, sans subir d'oscillat° périodique
⇒ oscillat° harmoniq sans amorti : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

(169)
②

mais cet oscillateur est purement théorique, en pratq le frot et jamais négligeables, l'oscillat° cesse au bout de qq instants
Pour l'obtenir, il est nécessaire de fournir régulièrement de l'énergie au syst pour compenser celle dissipée par frottement.

Finagageas au cas :

→ force de frottement proportionnelle à \dot{x} , $\vec{f} = -\delta \dot{x}$.

→ force supplémentaire pour compenser est de \tilde{m} type. f

$$\vec{F} = \beta \dot{x} \text{ d'où}$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\delta - \beta}$$

→ cas idéal $\delta = \beta$: Q infini ⇒ oscillateur harmonique.

mais réalité : → $\omega > 0$ ⇒ il faudrait de l'énergie qu'il n'a recevant, il y a amortissement jusqu'à l'arrêt.

→ $Q < 0$: il wrant à recevoir sa énergie ↑, il y aura amplifcat° de l'oscillat°, amplitude évoluant en $\exp(-\frac{\omega t}{2Q})$

⇒ stabilisat° de l'oscillat° et alors envisageable
mais cette sci ne peut avoir lieu qu'en présence de
tomes mécaniques.

2) Van du pol : (voir par l'hame pour caractériser les phénomènes naturels)

$$\ddot{x} + (\delta x^2 - \beta) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

→ $\delta x^2 - \beta < 0$ amplifcat°

→ $\delta x^2 - \beta > 0$ atténuat°

⇒ oscille à une amplitude stable tq $x_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}$

