

Le portrait de phase des oscillateurs

par H. GIÉ et J.P. SARMANT

Le terme d'espace de phase évoque en général des concepts délicats de physique statistique dont on ne traite qu'au niveau universitaire.

Nous prétendons montrer dans cet article que le concept associé de *portrait de phase* est un outil très riche pour l'analyse de nombreux systèmes et en particulier des oscillateurs. Si l'on se limite (comme ce sera le cas ci-dessous) à la description de systèmes à un seul degré de liberté, il s'agit de plus d'un outil très simple dont l'emploi est susceptible d'améliorer dès la classe terminale l'exposé de certaines questions.

Restant volontairement à un niveau élémentaire*, nous nous contenterons, aussitôt après avoir défini le vocabulaire employé, d'illustrer l'intérêt du portrait de phase à l'aide d'exemples simples, puis nous tirerons quelques conclusions d'ordre plus général.

1. VOCABULAIRE

Pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrit par la fonction à valeurs réelles $x(t)$, on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x} = dx/dt$.

Cette terminologie est en accord avec celle de la physique statistique : le plan (x, \dot{x}) ou *plan de phase* s'identifie (avec $p_x = m \dot{x}$) à l'espace de phase (x, p_x) du problème, de telle sorte que la représentation au cours du temps du point M est bien la trajectoire du système dans son espace de phase.

* En particulier, nous excluons toute étude des critères de stabilité.

Une trajectoire de phase donnée est décrite à partir d'un point $M_0(x_0, \dot{x}_0)$ représentatif des *conditions initiales* de l'évolution considérée. L'ensemble des trajectoires de phase décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales réalisables est le *portrait de phase* de celui-ci.

2. OSCILLATEURS NON AMORTIS

a) L'oscillateur harmonique

Un pendule élastique (masse m à l'extrémité d'un ressort de raideur k) a pour équation d'évolution :

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

d'où, avec $\omega^2 = k/m$, l'équation différentielle du second ordre qui régit tout *oscillateur harmonique* (non amorti) :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

dont la solution générale peut s'écrire :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

ce qui établit que les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique sont des ellipses centrées sur l'origine. Avec un choix convenable des unités adoptées sur les axes des coordonnées (en représentant \dot{x}/ω en fonction de x , ce qui a du reste l'avantage de faire figurer en abscisse et en ordonnée des grandeurs de même dimension), ces trajectoires sont des cercles dont les rayons représentent l'amplitude A des oscillations :

– *le portrait de phase d'un oscillateur harmonique est un ensemble de cercles concentriques centrés sur l'origine des coordonnées.*

Ce résultat très simple met en évidence un premier intérêt du portrait de phase : la représentation de celui-ci permet de *tester avec précision le caractère sinusoïdal de l'évolution d'un oscillateur.*

b) Le pendule pesant

Soit un pendule de masse M , de moment d'inertie J par rapport à son axe de suspension O et dont le centre de masse G est à la distance $a = OG$ de cet axe. Avec $\omega^2 = Mga/J$ et en notant x l'angle d'inclinaison de OG sur la verticale, on établit l'équation :

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad (3)$$

Intégrant (3) avec des conditions initiales quelconques, on a :

$$\dot{x}^2 - 2 \omega^2 \cos x = \text{constant} = C(x_0, \dot{x}_0) \quad (4)$$

relation que l'on aurait également pu écrire directement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique du pendule et qui permet de tracer le portrait de phase de celui-ci comme un réseau de courbes paramétré par C (voir la figure 1, réalisée en fait de façon plus rapide par un logiciel qui intègre numériquement l'équation (3) pour divers jeux de conditions initiales).

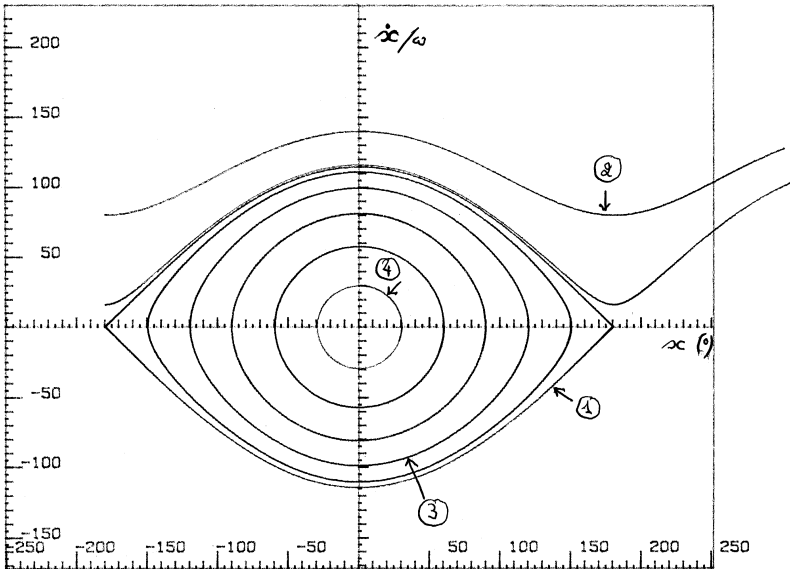


Figure 1 : Portrait de phase d'un pendule pesant (non amorti).

On voit apparaître le rôle critique de la trajectoire de phase (1) qui correspond à la valeur $C_0 = 2 \omega^2$ de C . Cette trajectoire est appelée séparatrice car elle délimite deux domaines du portrait de phase :

- pour $C > C_0$, \dot{x} ne s'annule jamais et x peut prendre des valeurs quelconques. Une trajectoire telle que (2) de ce type caractérise un *mouvement révolutif*,
- pour $C < C_0$, on peut poser $C = -2 \omega^2 \cos A$ ($A > 0$), x évolue entre $-A$ et A , valeurs pour lesquelles \dot{x} s'annule. Une trajectoire, telle que (3) ou (4), de ce type caractérise un *mouvement oscillatoire* d'amplitude A .

Ce portrait illustre tout d'abord très simplement un fait bien connu : les trajectoires quasi-circulaires telles que (4) correspondent à des oscillations de faible amplitude ; le caractère non sinusoïdal des oscillations de forte amplitude apparaît tout de suite en examinant une trajectoire telle que (3).

On peut également vérifier un fait capital, le caractère périodique du mouvement oscillatoire :

Il est évident que si l'évolution de $x(t)$ est périodique et de période T , la trajectoire de phase correspondante décrit indéfiniment une même courbe appelée *cycle*. Réciproquement, l'observation d'un cycle ne permet pas *en général* de conclure au caractère périodique de l'évolution (les cycles successifs pouvant être a priori décrits dans des temps différents). En revanche, dans le cas d'un système décrit par une *équation différentielle du second ordre*, le fait que le point représentatif M du système soit revenu au bout d'une durée finie T à sa position initiale M_0 assure le caractère périodique de l'évolution : le premier cycle est suivi d'une infinité de cycles identiques puisque les conditions initiales (x_0, \dot{x}_0) suffisent à déterminer l'évolution ultérieure. Ce fait bien connu (*déterminisme mécanique*) correspond à une propriété mathématique générale des équations différentielles du second ordre, valable sous réserve de conditions dites de *Cauchy-Lipshitz* qui portent sur la continuité et la dérivabilité des fonctions qui figurent dans ces équations.

Nous venons de mettre en évidence une propriété qui suffirait à elle seule à justifier l'intérêt pratique du portrait de phase :

en vérifiant sur un document graphique le caractère cyclique d'une trajectoire de phase, on dispose d'un test du caractère périodique de l'évolution beaucoup plus précis que l'observation de l'allure de la représentation $x(t)$.

3. OSCILLATEURS AMORTIS

a) *Oscillateur harmonique amorti (par frottement fluide)*

Ajoutant un terme de frottement fluide dans l'équation (1) du mouvement du pendule élastique, il vient :

$$m \ddot{x} = -k x - h \dot{x} \quad (5)$$

d'où, en posant $\omega^2 = k/m$ et en introduisant la *facteur de qualité* $Q = m \omega/h$, l'équation normalisée de tout *oscillateur harmonique amorti* :

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q} \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (6)$$

Les propriétés de ce système sont bien connues, bornons nous à observer l'allure (figure 2) d'une trajectoire de phase dans le cas d'oscillations pseudo-périodiques ($Q > 1/2$).

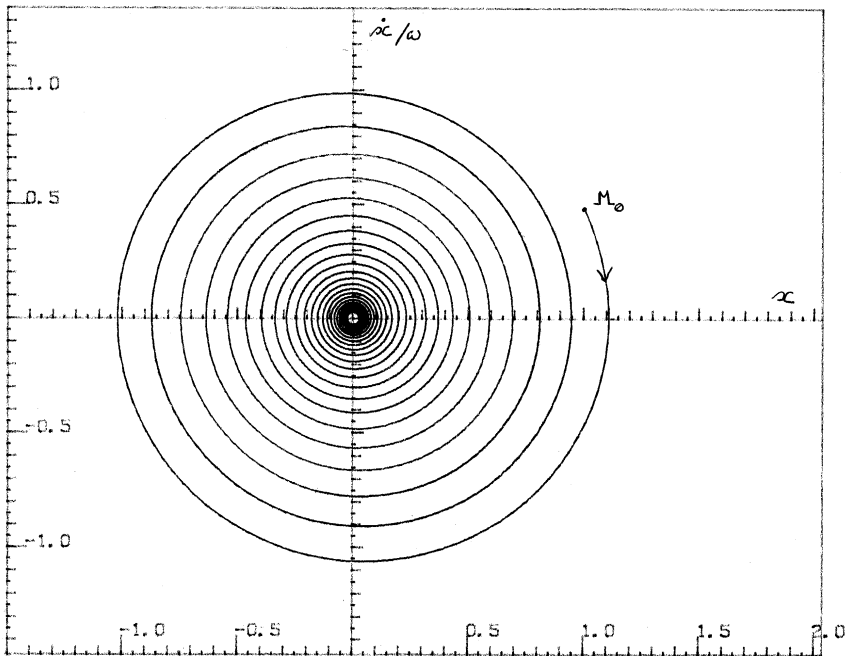


Figure 2 : Oscillateur harmonique de facteur de qualité $Q = 20$.

Notons au passage qu'il est aisé d'*observer expérimentalement* une telle trajectoire en travaillant sur un dipôle RLC série, la déviation horizontale de l'oscilloscope étant engendrée par la tension aux bornes du condensateur et la déviation verticale par la tension aux bornes de la résistance, on observe sur l'écran la courbe $\dot{x}(x)$, x étant ici la charge q du condensateur.

L'allure spiralee des trajectoires de phase peut être mise en relation avec une propriété énergétique. L'énergie mécanique de l'oscillateur est :

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{k}{2} (x^2 + (\dot{x}/\omega)^2) = k \frac{r^2}{2} \quad (7)$$

en notant r la distance à l'origine du point représentatif M de coordonnées $(x, \dot{x}/\omega)$. On déduit par ailleurs de (5) la relation :

$$\frac{dE}{dt} = -h \dot{x}^2 \quad (8)$$

qui exprime seulement la conservation de l'énergie (le taux de diminution de l'énergie mécanique de l'oscillateur est égal à la puissance de la force de frottement $-h \dot{x}$). En termes de trajectoire de phase, (8) montre que la perte d'énergie mécanique de l'oscillateur amorti se traduit par le fait que le point représentatif M de celui-ci se rapproche de l'origine O qui apparaît ainsi comme un «attracteur». Notons au passage une propriété qualitative intéressante (valable pour Q nettement supérieur à 1, comme c'est le cas pour la figure 2 qui correspond à $Q = 20$) : *le facteur de qualité Q donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations pratiquement observables avant la relaxation vers l'état d'équilibre.*

b) Oscillateur harmonique amplifié

Imaginons que, dans (6), on envisage la possibilité d'une valeur négative de Q , ce qui revient dans (8) à remplacer une dissipation par une alimentation en énergie, on obtient des «oscillations amplifiées» dont le portait de phase est analogue (pour plus de précisions, V. le § 6), à ceci près que O n'est plus un attracteur, mais une «répulsor», position d'équilibre instable. Cette propriété était du reste prévisible : l'équation (6) n'est pas modifiée si on change simultanément les signes de Q et de \dot{x} .

On voit apparaître ici un lien entre la présence dans l'équation d'évolution du système d'un terme du premier ordre (dans lequel le temps t intervient par une dérivée d'ordre impair) et la possibilité d'échanger les rôle de t et de $-t$, c'est à dire d'un *lien fondamental entre dissipation et irréversibilité.*

c) *Pendule pesant amorti par frottement fluide*

L'équation d'évolution se déduit immédiatement de (6) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q} \dot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

Un logiciel de résolution d'équations différentielles permet de tracer le portrait de phase (figure 3).

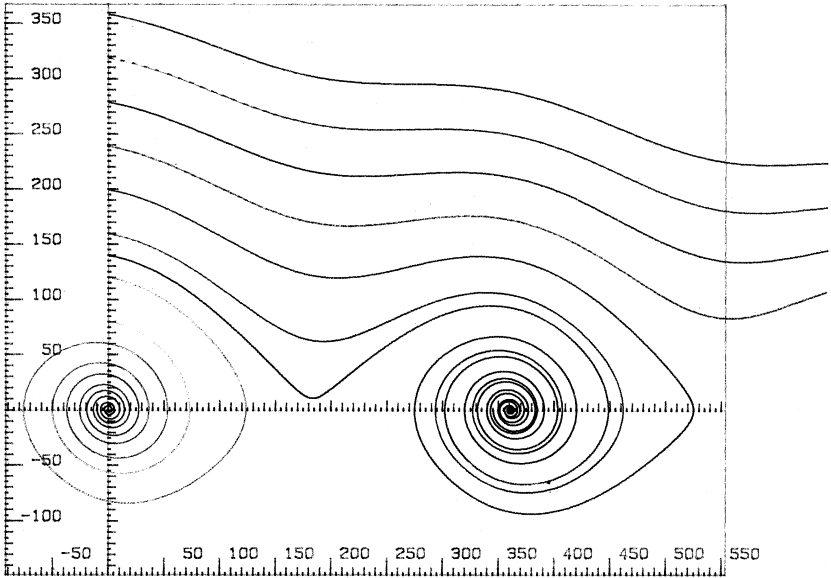


Figure 3 : Portrait de phase d'un pendule pesant amorti ($Q = 5$).

On constate l'existence d'une infinité d'attracteurs ponctuels de positions $(2n\pi, 0)$. Ces attracteurs correspondent à la position d'équilibre stable du pendule : $x = 0$ à $2n\pi$ près. A partir de tout point M_0 situé dans le bassin d'attraction d'un attracteur de rang n , la trajectoire de phase spirale vers le point $(2n\pi, 0)$. Qualitativement, ceci correspond à la possibilité d'observer un mouvement oscillatoire amorti précédé d'une phase révolutive pendant n tours.

Notons au passage une propriété générale : *les trajectoires de phase ne se recoupent pas*. Cette propriété est une conséquence du *déterminisme mécanique* : deux trajectoires issues d'un point d'intersection M_0

correspondraient à deux évolutions différentes possibles à partir d'un même jeu (x_0, \dot{x}_0) de conditions initiales, ce qui est exclu.

d) Oscillateur amorti par frottement solide

Si la masse m du pendule élastique décrit par l'équation (1) repose avec un coefficient de frottement f sur le plan horizontal, on établit sans difficulté l'équation d'évolution :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon fg \quad , \quad \varepsilon \text{ étant l'opposé du signe de } \dot{x} \quad (10)$$

d'où l'on déduit que le mouvement est une suite d'oscillations sinusoïdales de pulsation ω (figure 4) centrées alternativement sur les positions $x = fg/\omega^2 = p$ et $x = -p$, l'arrêt définitif se produisant quand \dot{x} s'annule à l'intérieur de la *plage d'équilibre* $(-p, p)$.

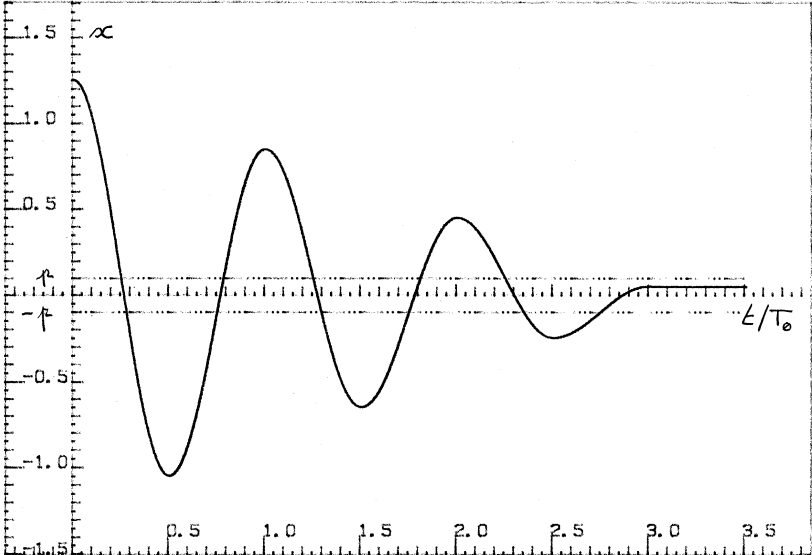


Figure 4 : Amortissement par frottement solide ($p = 0,1$; $x_0 = 1,25$).

La figure 5 représente le portrait de phase de cet oscillateur, constitué de demi-cercles centrés alternativement en $x = p$ et $x = -p$. Le rôle d'attracteur est cette fois joué par le segment $(-p, p)$ de l'axe des abscisses.

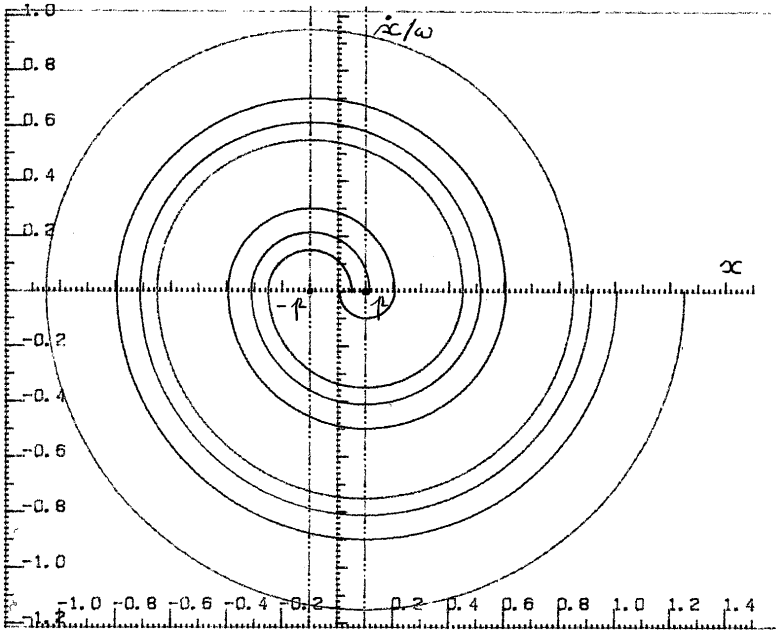


Figure 5 : Amortissement solide ($p = 0,1$).

4. OSCILLATEURS ENTRETENUS

Un système qui, tel une horloge, évolue indéfiniment de façon périodique doit recevoir de l'énergie pour compenser les phénomènes dissipatifs inévitables qui accompagnent son fonctionnement. Un tel système est appelé *oscillateur entretenu*.

a) *Le modèle de Van der Pol*

Tentons de proposer un modèle mathématique, le plus simplement possible, décrivant un oscillateur entretenu. Il est tout d'abord évident que ce modèle ne saurait être linéaire : la trajectoire de phase souhaitée doit être un cycle C bien défini ; si le système était décrit par une équation différentielle linéaire, tout cycle homothétique λC serait également solution. Au cours de l'étude de l'oscillateur harmonique amorti, nous avons vu que, dans l'équation différentielle (6), c'est le signe du coefficient de \dot{x} qui régit le sens des échanges énergétiques de l'oscillateur. Le modèle le plus simple (*équation de Van der Pol*)

consiste à remplacer ce coefficient constant par une expression parabolique :

$$\ddot{x} + (x^2 - p) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (p > 0) \quad (11)$$

Bien qu'il ne soit pas possible d'intégrer cette équation autrement que par des méthodes numériques, on peut prévoir qualitativement le comportement des solutions : si la valeur initiale x_0 de x est faible, le coefficient de \dot{x} est négatif ce qui correspond à une tendance à l'amplification des oscillations ; inversement, quand x prend des valeurs importantes, ce coefficient devient positif ce qui doit tendre à réduire l'amplitude des oscillations. La figure 6 (pour l'obtention de laquelle on a choisi $\omega = 2\pi$ de façon à prendre pour unité de t la période propre de l'oscillateur) confirme ces prévisions.

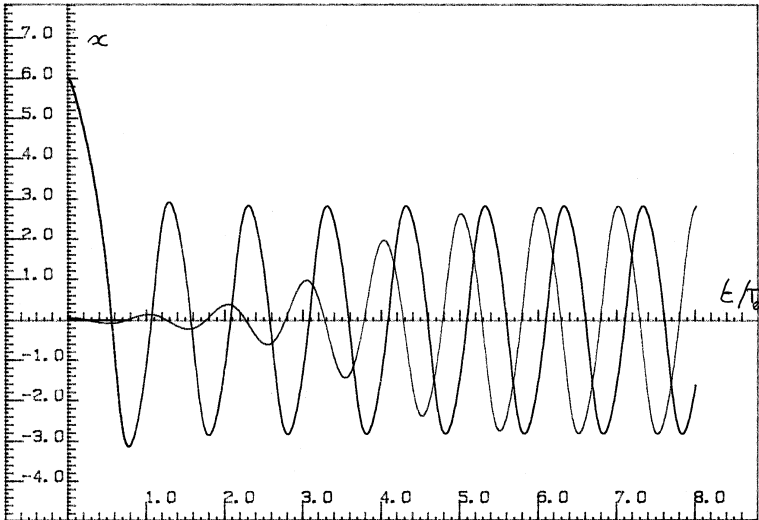


Figure 6 : Oscillateur de Van der Pol ($p = 2$).

L'effet de régularisation des oscillations qui était souhaité est bien obtenu : quelles que soient les conditions initiales, on tend vers un régime permanent d'amplitude bien définie. Un tel diagramme $x(t)$ ne permet pas toutefois de constater avec précision si ce régime est ou non périodique (et encore moins s'il est sinusoïdal : il est très difficile de distinguer «à vue» une sinusoïde d'une autre courbe oscillante). Pour conclure, il faut tracer le portrait de phase (figure 7).

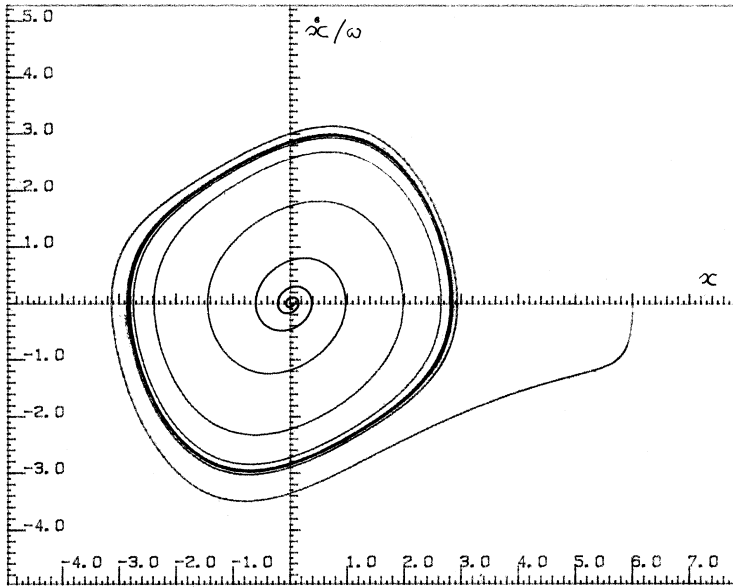


Figure 7 : Portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol ($p = 2$).

On vérifie cette fois avec une excellente précision l'existence d'un *cycle limite* (nouveau cas particulier d'attracteur) ce qui atteste le caractère périodique du régime permanent. Ce cycle n'étant visiblement pas circulaire (sauf pour p très petit), on peut affirmer que le régime permanent de l'oscillateur de Van der Pol est non-sinusoidal (les figures 6 et 7 correspondent à $p = 2$; en choisissant d'autres valeurs, on constate que le caractère non-sinusoidal s'accuse quand on augmente p).

Insistons sur le fait que ce cycle est le même pour toutes les trajectoires de phase, il est indépendant des conditions initiales. *L'attracteur est entièrement déterminé par la nature de l'oscillateur* (c'est-à-dire ici par le choix de p).

b) L'oscillateur à «résistance négative»

Ce système est décrit en détail dans la référence [4], nous en justifions rapidement ci-dessous les propriétés essentielles.

La figure 8 représente l'un des montages qui permettent de simuler une «résistance négative». En exprimant que, le courant d'entrée sur la

borne + étant nul, une même intensité traverse les deux résistances X, on a :

$$s = 2 v_+ = 2 (e + \varepsilon) \quad (12)$$

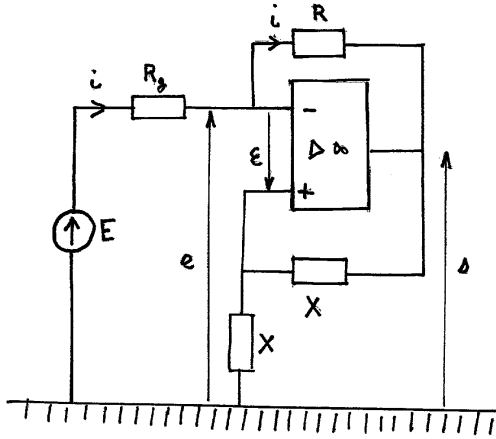


Figure 8 : Montage simulant une «résistance négative».

En exprimant pareillement que la même intensité i traverse R_g et R , on a :

$$e = E - R_g i = s + R i \quad (13)$$

Dans le domaine de fonctionnement linéaire de l'A.O. ($|s| < U$, U et $-U$ désignant les tensions de saturation haute et basse), on a $\varepsilon = 0$ dans la limite de l'idéalité, d'où $s = 2e$ et, en reportant dans (13) :

$$e = -R |i| \quad (\text{régime linéaire, } |i| < i_g = U/2R) \quad (14)$$

Le montage simule bien dans ce domaine une «résistance négative» et l'on conçoit déjà qu'il soit possible de réaliser un régime d'oscillations amplifiées à l'aide de ce dispositif, l'énergie fournie provenant de l'alimentation de l'A.O.

Quand l'A.O. fonctionne en régime saturé, on a :

$$e = -U + R i \quad (\text{saturation basse, } i > i_g) \quad (14')$$

$$e = U + R i \quad (\text{saturation haute, } i < -i_g) \quad (14'')$$

Si l'on substitue un dipôle LC à la source de tension E placée à l'entrée du montage, il faut remplacer dans (13) E par $-L \frac{di}{dt} + q/C$, d'où après dérivation et avec $i = -dq/dt$:

$$-L \frac{d^2i}{dt^2} - \frac{i}{C} - R_g \frac{di}{dt} = \frac{de}{dt} \quad (15)$$

La dérivée de/dt ne peut prendre que les deux valeurs $-R \frac{di}{dt}$ (régime linéaire (14)), et $R \frac{di}{dt}$ (régimes saturés (14') ou (14'')), on en déduit que le système est régi par la double équation d'évolution :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + (R_g - R) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (\text{régime linéaire}) \quad (16)$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + (R_g + R) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (\text{régime saturé}) \quad (16')$$

Posons $\omega^2 = 1/LC$, $(R_g - R)/L = \omega/Q$, $(R_g + R)/L = 1/\tau$. Introduisant la variable réduite $x = i/i_s$ on obtient les formes normalisées des équations précédentes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 ; |x| < 1 \quad (16)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 ; |x| > 1 \quad (16')$$

Dans la pratique on choisit pour R_g une valeur proche de R et très légèrement inférieure. Dans ces conditions, on a $Q < 0$ et de module important : (16) est l'équation d'un oscillateur harmonique (lentement) amplifié. Dans ces mêmes conditions, on a $\tau \cong L/2R$ et les valeurs expérimentales correspondent à $\tau \ll T_0 = 2\pi/\omega$ et (16') décrit un régime amorti à relaxation rapide.

Il est facile de prévoir le comportement du système : $x = 0$ est une position d'équilibre instable ; partant d'une valeur x_0 même très faible, il effectue des oscillations amplifiées (16) jusqu'à ce que x dépasse la valeur 1. Pour $x > 1$, le système a un comportement d'oscillateur amorti (16') qui fait redescendre rapidement au-dessous de la valeur de saturation... Le système passant ainsi, tel l'oscillateur de Van der Pol, alternativement par des phases d'amplification et d'amortissement, on conçoit que son comportement soit analogue (voir ci-après c.).

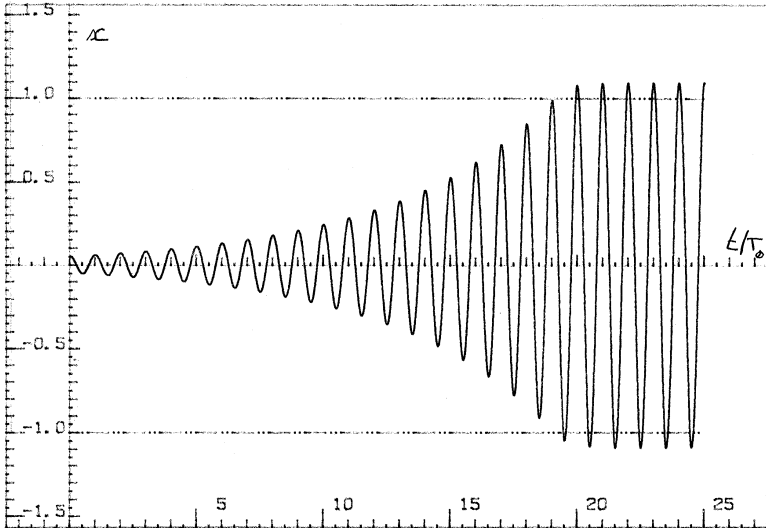


Figure 9 : Oscillateur à résistance négative ($Q = -20$; $\tau = 0,2$).

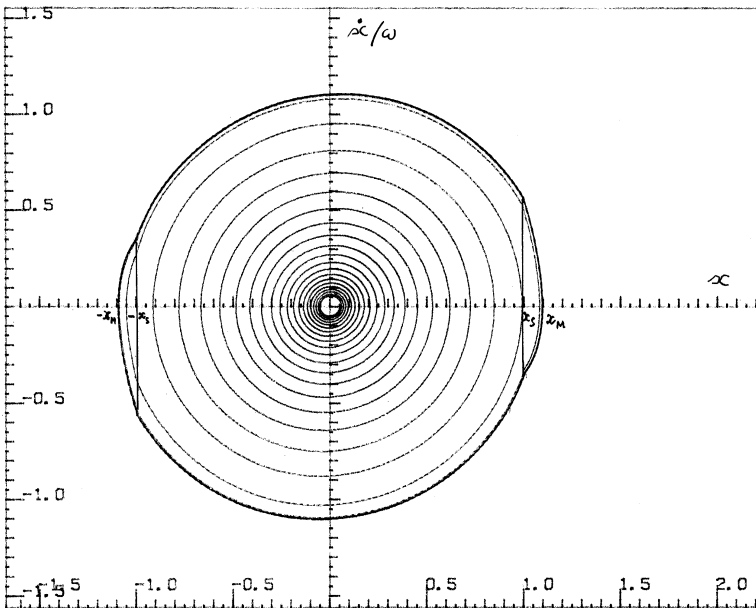


Figure 10 : Oscillateur à «résistance négative» ($Q = -20$; $\tau = 0,2$).

Cette analyse est confirmée par les figures 9 et 10, obtenues par simulation numérique (avec $Q = -20$, $\tau = 0,2$, $x_0 = 0,05$). A la seule vue de la représentation $x(t)$ de la figure 9, on serait tenté d'affirmer le caractère sinusoïdal des oscillations entretenues (régime permanent). Le portrait de phase correspondant (10) montre que l'on obtient bien des oscillations périodiques (existence d'un cycle limite) mais que celles-ci ne sont pas exactement sinusoïdales (caractère légèrement non-circulaire du cycle).

On vérifie toutefois que, s'il est légitime, dans les conditions expérimentales usuelles (Q de module grand devant 1), de qualifier les oscillations entretenues de quasi-sinusoïdales, les figures 11 et 12 (réalisées avec $Q = -4$) montrent que le caractère non-sinusoïdal peut devenir très net pour des valeurs de Q de module plus faible (cette propriété, qualifiée de *distorsion*, avait été observée expérimentalement par les auteurs de l'article du B.U.P. cité sous la référence [4]).

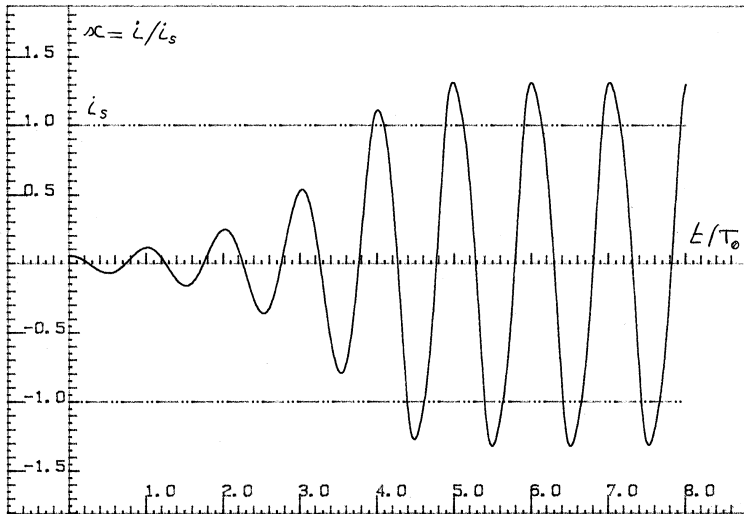


Figure 11 : Oscillateur à résistance négative ($Q = -4$; $\tau = 0,2$).

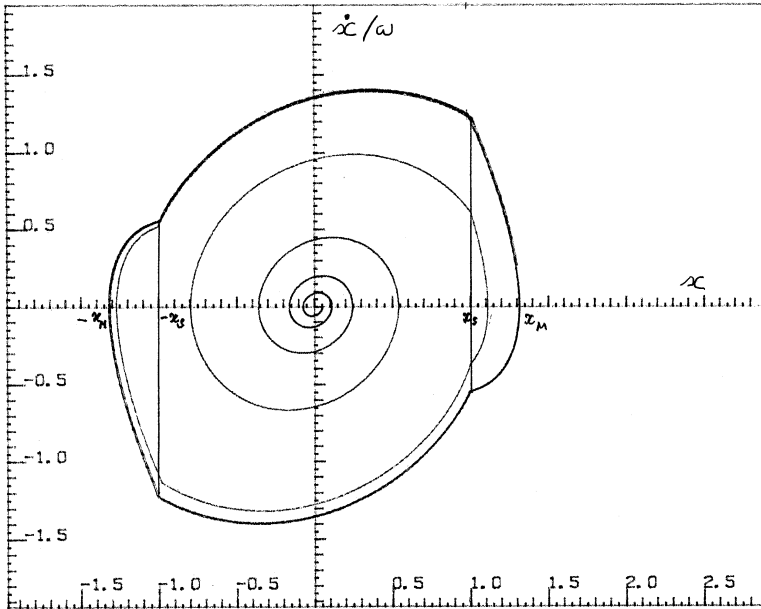


Figure 12 : Oscillateur à résistance négative ($Q = -4$; $\tau = 0,2$).

c) Propriétés communes des oscillateurs entretenus

Il est possible de donner aux équations (11), oscillateur de Van der Pol, d'une part et (16)-(16'), oscillateur à résistance négative d'autre part, la forme commune :

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (17)$$

- Pour l'oscillateur de Van der Pol : $A(x) = x^2 - p$, expression qui change de signe pour $x = \pm x_S = \pm \sqrt{p}$.
- Pour l'oscillateur à résistance négative : $A(x) = \omega/Q < 0$ pour $|x| < x_S = 1$ et $A(x) = 1/\tau > 0$ pour $|x| > 1$.

Les figures 12 bis a et 12 bis b donnent l'allure de la fonction $A(x)$. En fait, dans le cas de l'oscillateur à résistance négative, nous avons utilisé une caractéristique idéalisée pour l'amplificateur opérationnel ; dans la pratique, la fonction $A(x)$ ne présente pas de discontinuités de pente (figure 12 bis c).

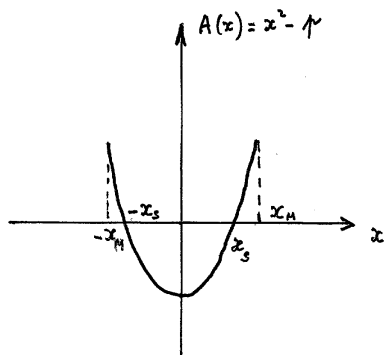


Figure 12 bis a : Oscillateur de Van der Pol.

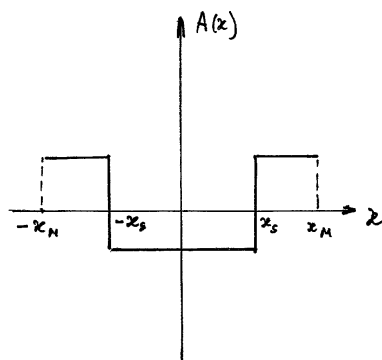


Figure 12 bis b : Oscillateur à résistance négative.

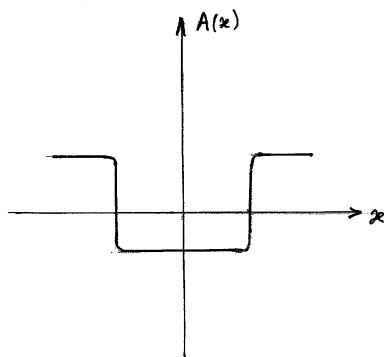


Figure 12 bis c

L'analogie des profils est évidente : sur les cycles limites, on distingue des phases alternées d'amplification dominante ($|x| < x_S$) et d'amortissement dominant ($|x| > x_S$). Sur la figure 12, on peut repérer aisément ces phases successives grâce aux discontinuités de pente (bosses) pour $|x| = x_S$ introduites par les discontinuités du modèle adopté.

En multipliant (17) par \dot{x} dt et en intégrant sur une période, il vient :

$$\int d(\dot{x}^2/2) + \int A(x) \dot{x}^2 dt + \int d(\omega^2 x^2/2) = 0$$

le premier terme et le troisième sont nuls, de sorte que :

$$\int A(x) \dot{x}^2 dt = 0 \quad (18)$$

relation qui exprime la compensation sur un cycle des phases d'amortissement et des phases d'amplification dominante. La relation (18) va nous servir à estimer la valeur de l'amplitude x_M des oscillations de Van der Pol. Dans ce cas, pour p petit, les oscillations sont quasi-sinusoidales :

$$x \cong x_M \cos \omega t$$

et, en reportant dans (18), on obtient facilement :

$$x_M = 2 \sqrt{p} = 2 x_S \quad (19)$$

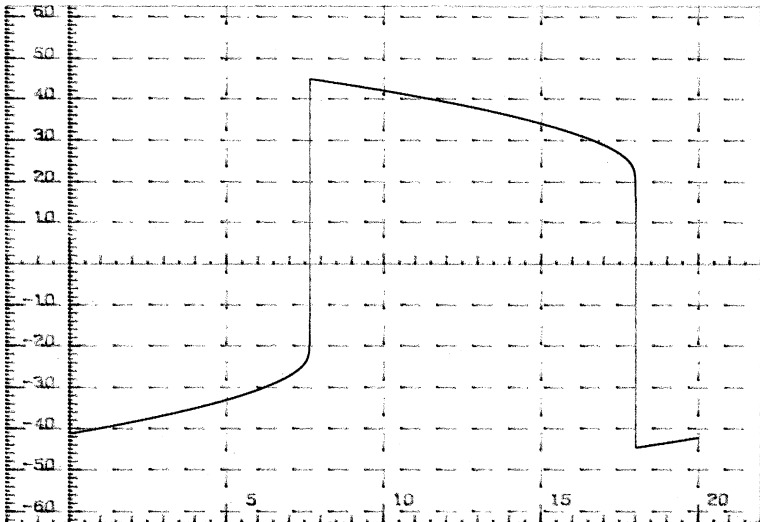


Figure 12 ter a

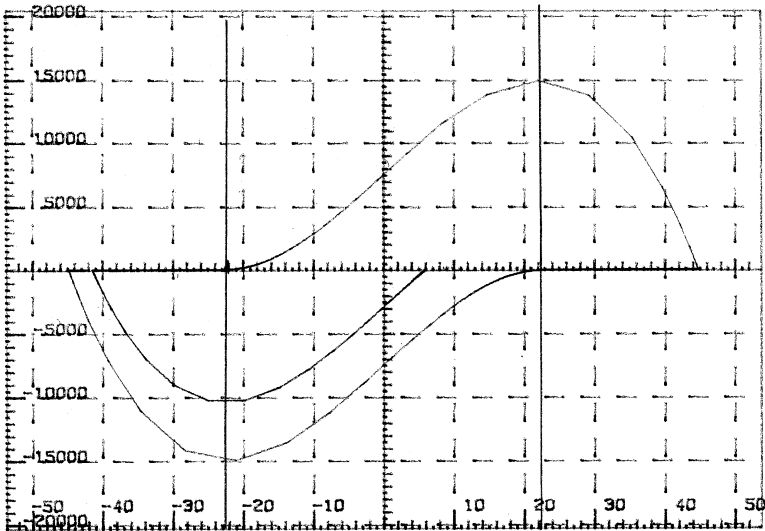


Figure 12 ter b

On constate, en fait, sur les cycles limites obtenus pour différentes valeurs de p que cette propriété demeure très bien vérifiée, même pour p grand, c'est-à-dire pour des oscillateurs fortement non-linéaires engendrant des oscillations nettement non-sinusoidales. On se reportera aux figures 7 ($p = 2$) et 12 ter, a et b ($p = 500$). Pour quelques considérations sur l'oscillateur de Van der Pol très fortement non-linéaire, voir l'appendice en fin d'article.

Enfin, soulignons à nouveau que les cycles limites, ou attracteurs, sont indépendants des conditions initiales. Ce comportement est propre à tout système dissipatif non chaotique ([3], [6], [7]) dont on montre qu'il évolue nécessairement vers un état indépendant des conditions initiales. Si on considère, par exemple, un ensemble de conditions initiales représentées sur le diagramme de phase par des points voisins occupant un domaine continu d'aire dA , on établit qu'à des dates t successives l'aire du domaine occupé par les points représentatifs correspondants va en décroissant jusqu'à s'annuler lorsqu'on atteint précisément le cycle limite (voir [3], [6]).

5. OSCILLATEURS DU PREMIER ORDRE

On envisage maintenant la possibilité de systèmes décrits par une équation différentielle d'ordre 1 pouvant être mise sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) \quad (20)$$

Si f possède des propriétés suffisantes de continuité et de dérivabilité, la solution $x(t)$ de (20) est entièrement déterminée par la seule condition initiale x_0 . Il en résulte que le système n'est pas décrit à proprement parler par un portrait de phase mais par une trajectoire de phase unique. Avant de passer à d'autres considérations générales sur les oscillateurs du premier ordre, nous traiterons deux exemples rédigés sous forme d'exercices.

a) Oscillations de relaxation d'une lampe au néon

On considère le montage de la figure 13 ($E = 200 \text{ V}$, $C = 50 \text{ } \mu\text{F}$, $R = 20\,000 \text{ } \Omega$). La caractéristique de la lampe au néon représentée sur la figure 14 résume les propriétés suivantes :

u croissant à partir de 0, on a $i = 0$ jusqu'à la tension d'allumage $u_a = 130 \text{ V}$ au delà de laquelle la caractéristique est représentée par $i = \alpha + \beta u$ ($\alpha = -0,97 \text{ A}$; $\beta = 0,01 \text{ A/V}$). Cette expression reste valable quand u décroît tant que u reste supérieur à la tension d'extinction $u_e = 98 \text{ V}$ au-dessous de laquelle on a à nouveau $i = 0$.

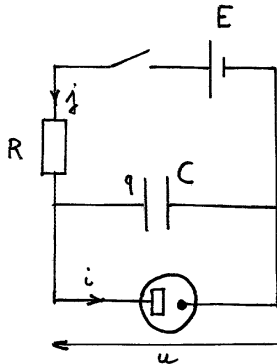


Figure 13

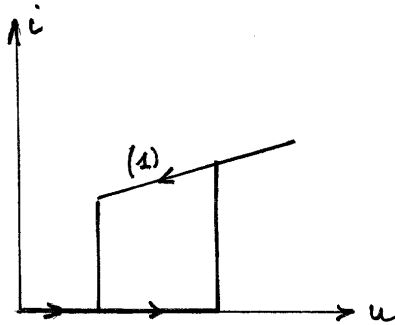


Figure 14 : Caractéristique d'une lampe néon.

I. A $t = 0$, on ferme le circuit, le condensateur étant initialement non chargé. Exprimer en fonction de E , u_a et $\tau = RC$ la durée t_0 de la phase (0) qui précède le premier allumage. Application numérique.

II. Étudier l'évolution ultérieure de $u(t)$ et calculer littéralement et numériquement les durées t_1 de la première phase (1) d'allumage et t_2 de la première phase (2) d'extinction (on pourra poser $U = (E - R \alpha)/(1 + \beta R)$; $\theta = \tau/(1 + \beta R)$),

III. Montrer que l'on obtient un régime permanent périodique dont on calculera la période T . Tracer $u(t)$ ainsi que la trajectoire de phase $\dot{u}(u)$.

SOLUTION

I. On a toujours $u = q/C = E - R j$. En exprimant la loi des nœuds : $j = i + dq/dt = i + C du/dt$. Avec $\tau = RC$, on en tire l'équation d'évolution de u :

$$\tau \dot{u} + u = E - R i \quad (21)$$

Cette équation est indépendante de la phase considérée, il suffit ensuite d'expliciter phase par phase la relation $i(u)$. Dans la phase initiale (0), on a $i = 0$ d'où une relaxation vers E de constante de temps τ :

$$u = E \left(1 - \exp(-t/\tau) \right) \quad (22)$$

En explicitant la condition $u < u_a$, on obtient :

$$t_0 = \tau \ln \frac{u_a}{E - u_a} = 1,050 \text{ s}$$

II. Dans la phase (1), la lampe est allumée et (21) s'écrit :

$$\tau \dot{u} + u(1 + \beta R) = E - R \alpha$$

soit, après division par $(1 + \beta R)$:

$$\theta \dot{u} + u = U \tag{23}$$

En exprimant la continuité de u en $t = t_0$, on obtient l'expression d'une relaxation vers $U = 97,51 \text{ V}$ avec la constante de temps $\theta = 0,005 \text{ s}$:

$$u = U + (u_a - U) \exp\left(-\frac{(t - t_0)}{\theta}\right) \tag{24}$$

Exprimant la condition $u > u_e$, on obtient :

$$t_1 = \theta \ln \frac{u_a - U}{u_e - U} = 0,0209 \text{ s}$$

La phase (2), lampe éteinte, est régie par la même équation différentielle que la phase (0), c'est une nouvelle relaxation de constante de temps τ vers E :

$$u = E + (u_e - E) \exp\left(-\frac{(t - t_1)}{\tau}\right)$$

d'où :

$$t_2 = \tau \ln \frac{E - u_e}{E - u_a} = 0,3765 \text{ s}$$

III. L'évolution ultérieure est une suite de phases de type (1) et (2), d'où un caractère périodique de période :

$$T = t_1 + t_2 = 0,397 \text{ s}$$

La figure 15, obtenue à l'aide d'un programme d'intégration numérique, vérifie bien les résultats des calculs précédents : on obtient l'allure caractéristique d'*oscillations de relaxation*. La relation (21) permet de prévoir que la trajectoire de phase est constituée de segments de droite (figure 16). L'existence d'un régime permanent est attestée par la présence d'un cycle qui est ici un trapèze.

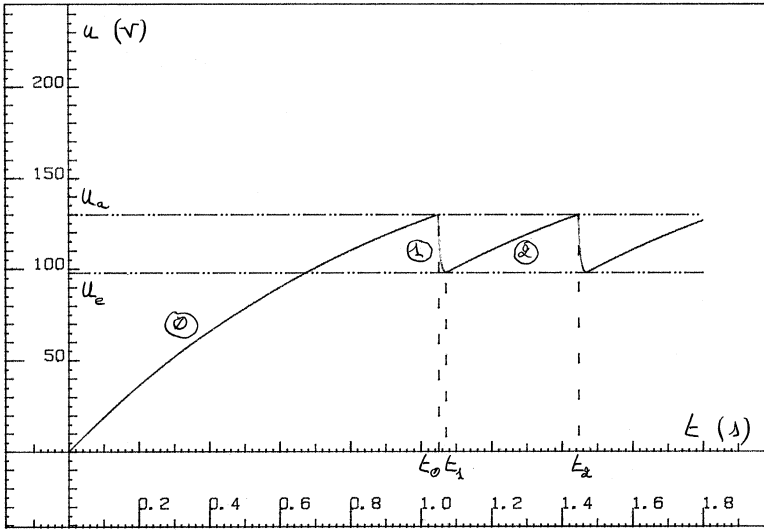


Figure 15 : Oscillations d'une lampe au néon.

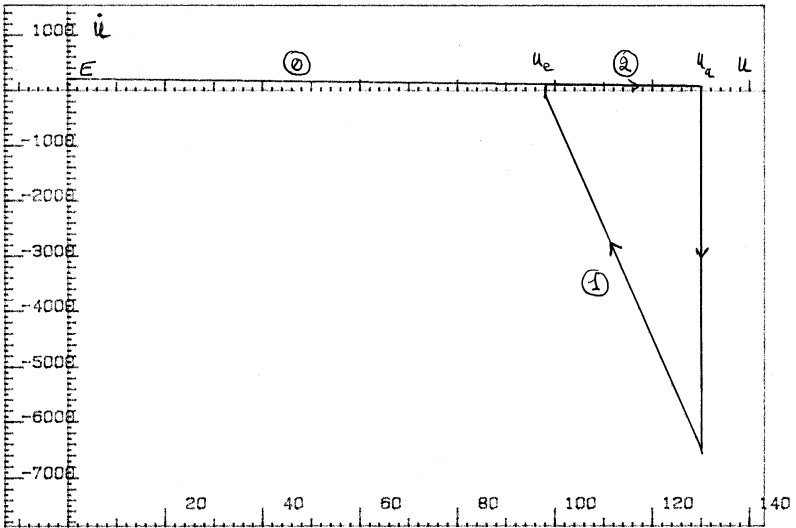


Figure 16 : Trajectoire de phase d'une lampe au néon.

b) Multivibrateur astable

Le dipôle I dont la caractéristique de transfert $s(e)$ idéalisée est représentée sur la figure 17, est appelé *inverseur logique*, son intensité d'entrée est nulle.

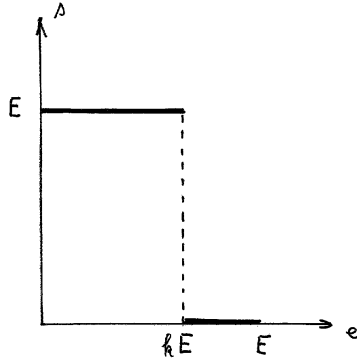


Figure 17 : Caractéristique de transfert d'un inverseur logique.

On considère le montage de la figure 18 dans lequel deux inverseurs logiques I_1 et I_2 sont reliés par l'intermédiaire d'un circuit RC de temps de relaxation $\tau = RC$, la sortie de I_2 étant par ailleurs reliée à l'entrée de I_1 . On donnera des valeurs numériques calculées pour la valeur $k_0 = 0,5$ de k .

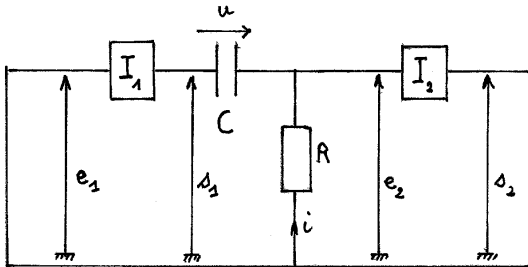


Figure 18 : Montage du multivibrateur astable.

I. Le condensateur étant initialement non chargé, on suppose pour fixer les idées que I_1 est à $t = 0$ dans son état «Bas» (B_1). Étudier la première phase (0) d'évolution de la tension $u(t)$ et calculer sa durée t_0 en fonction de τ et k .

II. Étudier les phases suivantes (1) et (2), se terminant respectivement aux instants t_1 et t_2 et exprimer de la même façon leurs durées $\vartheta_1 = t_1 - t_0$ et $\vartheta_2 = t_2 - t_1$. Montrer que l'évolution de $u(t)$ est périodique et exprimer sa période T en fonction de τ et k . Montrer que T passe par un minimum pour une valeur k_0 de k que l'on calculera.

III. Représenter sur des graphiques alignés verticalement les évolutions des tensions u , s_1 , s_2 , et e_2 . Quelle est la nature de la trajectoire de phase \dot{u} (u) de l'oscillateur ainsi constitué ?

SOLUTION

Les relations générales, indépendantes de la phase de fonctionnement :

Le courant d'entrée de I_2 étant nul, on a $i = dq/dt$. Compte tenu de $q = C u$ et de $s_2 = s_1 + u + R i$, on obtient l'équation d'évolution de u :

$$\tau \dot{u} + u = s_2 - s_1 \quad (25)$$

On a également toujours :

$$e_1 = s_2 \quad (26)$$

$$e_2 = s_1 + u \quad (27)$$

Relations dépendant de la phase de fonctionnement :

Ce sont ici les valeurs E (état H) ou 0 (état B) prises par les tensions de sortie. Compte tenu de (26), on note que ces états sont nécessairement «en opposition», parmi les $2 \times 2 = 4$ états a priori possibles du système, on ne peut en retenir que deux (H_1/B_2 et B_1/H_2). Dans ces conditions, on note que le second membre de (25) ne peut prendre que les valeurs E et $-E$, d'où les deux seuls types d'évolution possibles pour $u(t)$: relaxation vers E avec $\dot{u} > 0$ (état B_1/H_2) ou vers $-E$ avec $\dot{u} < 0$ (état H_1/B_2).

I. Partant de $t = 0$, on démarre dans un état B_1/H_2 ($s_1 = 0$, $s_2 = E$). Dans la phase (0) correspondante, la solution de (25), compte tenu des conditions initiales, est :

$$u = E \left(1 - \exp(-t/\tau) \right)$$

Compte tenu de (27), la condition de contrôle de l'état H_2 s'écrit :

$$e_2 = s_1 + u = u < k E$$

d'où l'on tire $t < t_0$ avec $t_0 = -\tau \ln(1 - k) = 0,693 \tau$

II. Pour $t < t_0$, le système bascule dans l'état H_1/B_2 . Dans la phase (1) correspondante ($s_1 = E, s_2 = 0$), l'équation (25) traduit une relaxation de u vers $-E$. Ayant exprimé la continuité de u en $t = t_0$, on a :

$$u = E \left[(1+k) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) - 1 \right]$$

En exprimant à nouveau la condition de contrôle de B_2 :

$$e_2 = s_1 + u = E + u > k E$$

d'où $t < t_1$ avec :

$$\vartheta_1 = t_1 - t_0 = \tau \ln \frac{1+k}{k} = 1,099 \tau$$

Pour $t > t_1$, le système rebasculé dans l'état B_1/H_2 , d'où dans la phase (2) une nouvelle relaxation de u vers E . En exprimant la continuité de u en $t = t_1 = 1,792 \tau$, on a :

$$u = E ((k-2) \exp(-(t-t_1)/\tau) + 1)$$

D'où, en exprimant $e_2 = s_1 + u < k E$:

$$\vartheta_2 = t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{2-k}{1-k} = 1,099 \tau$$

A l'instant $t = t_2 = 2,891 \tau$, le système est revenu entièrement dans les conditions de l'instant t_0 , on observe donc ultérieurement une évolution périodique de période :

$$T = \tau \ln \frac{(1+k)(2-k)}{k(1-k)} = 2,197 \tau \quad (\text{voir aussi § 6 a})$$

Par dérivation, on établit que T passe par le minimum $T_0 = 2 \tau \ln(3) = 2,197 \tau$ pour $k_0 = 0,5$.

III. L'équation (25) montre que la trajectoire de phase est constituée de segments de droite. Le second membre de (25) ne pouvant prendre que les valeurs E et $-E$, le point représentatif décrit deux droites parallèles : dans le régime périodique atteint, la trajectoire de phase est un cycle qui a la forme d'un parallélogramme (figure 20).

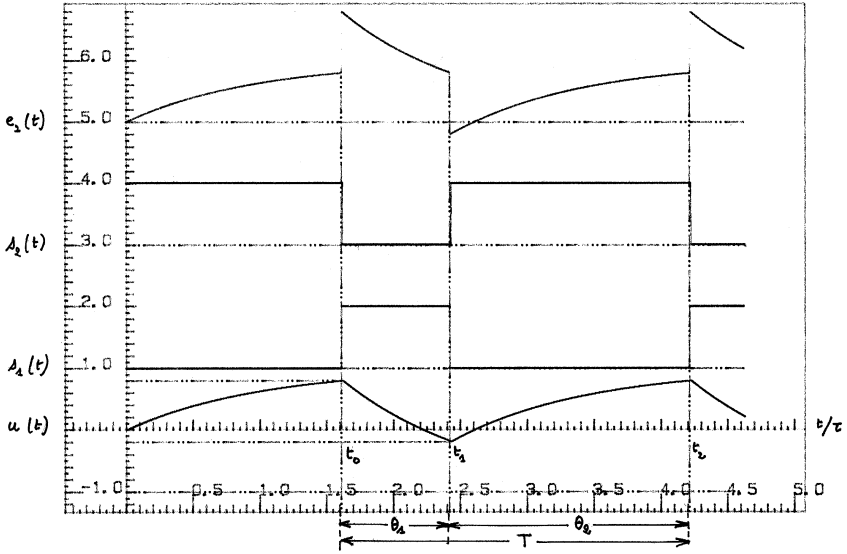


Figure 19 : Multivibrateur astable ($k = 0,8$).

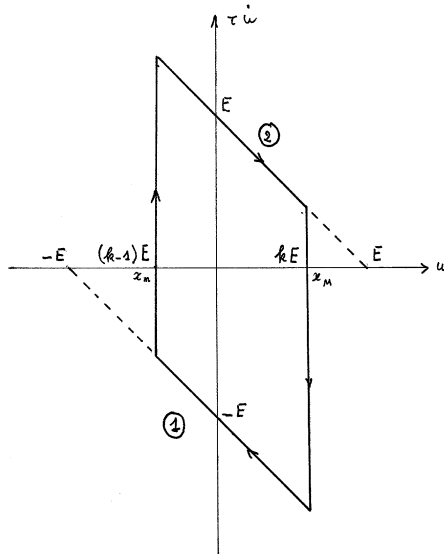


Figure 20 : Trajectoire de phase du multivibrateur astable.

c) *Vase de Tantale*

Le récipient représenté sur la figure 21 est muni d'un siphon de section s (très faible devant la surface libre S) dont l'ouverture est pratiquement confondue avec son fond et qui débouche à une cote h au-dessous de celui-ci après avoir monté jusqu'à la cote ζh .

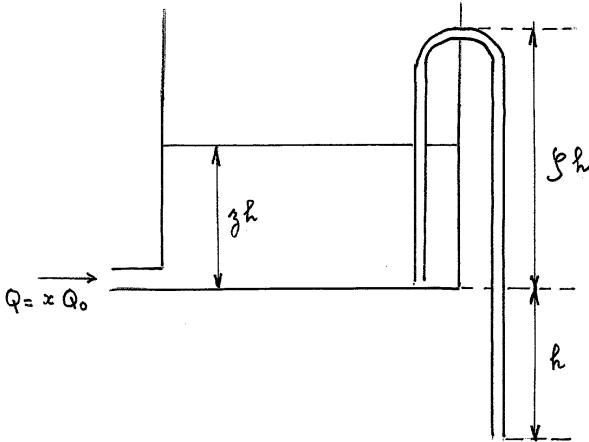


Figure 21 : Vase de Tantale.

I. A l'aide des données précédentes, on peut former les quantités $v_0^2 = 2 g h$, $Q_0 = s v_0$, $\tau = s h/Q_0$. Quelles peuvent être a priori les significations de ces grandeurs ?

II. On considère une situation où, le siphon étant amorcé, la surface libre du récipient a la cote zh . Compte tenu de $s \ll S$, on peut assimiler le régime établi à un régime permanent d'un fluide parfait. En déduire l'expression de la vitesse v de l'eau qui s'écoule dans le siphon.

III. On note $Q = x Q_0$ le débit volumique (indépendant du temps) de la source qui alimente le système. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ dans un régime où le siphon est amorcé. On note z_0 la valeur de z correspondant à un éventuel état du système dans lequel la surface libre garde une cote constante. Exprimer z_0 en fonction de x et en déduire qu'un tel état ne peut exister que si x dépasse une valeur x_0 que l'on précisera. Calculer la valeur x_1 de x qui correspondrait à une surface libre restant en permanence au niveau du sommet du siphon.

IV. Pour $x < x_0$, montrer que s'établit un régime d'oscillations de relaxation dont on calculera la période $T = t_1 + t_2$ (t_1 durée de remplissage, siphon amorcé ; t_2 durée de vidange par le siphon) en fonction de x , x_1 et τ . Pour $x = 0,8$ et $\zeta = 0,5$, représenter graphiquement $z(t)$ ainsi que la trajectoire de phase $\dot{z}(z)$.

SOLUTION

I. v_0 , Q_0 et τ représentent a priori respectivement une vitesse, un débit de volume et une durée caractéristiques du système.

II. Dans les conditions précisées, on peut appliquer le théorème de Bernoulli :

$$v^2/2 + P/\mu + g z = \text{constante}$$

le long d'une ligne de courant qui part de la surface libre (cote zh , pression P_0 et vitesse assimilée à 0) et la sortie du siphon (cote $-h$, pression P_0 dans le jet, vitesse v). On en déduit :

$$v = v_0 \sqrt{1+z}$$

III. En exprimant la conservation du volume d'eau, on a :

$$\frac{d}{dt}(S z h) = Q - s v \quad (28)$$

d'où, après introduction des paramètres recommandés :

$$\dot{z} = (x - \sqrt{1+z})/\tau \quad (29)$$

On en déduit aussitôt :

$$z_0 = x^2 - 1 \quad ; \quad x_0 = 1 \quad ; \quad x_1 = \sqrt{1+\zeta}$$

IV. Pour calculer la durée de la phase (1), il suffit de faire $v = 0$ dans (28), d'où $\dot{z} = x/\tau$ et la durée pour que le niveau atteigne la cote ζh : $t_1 = \tau (\zeta/x)$.

Pour la phase (2), l'équation (29) s'écrit :

$$\frac{dz}{x - \sqrt{1+z}} = \frac{dt}{\tau}$$

En posant $u = x - \sqrt{1+z}$, d'où $1+z = (x-u)^2$, $dz = -2(x-u) du$... on obtient la primitive :

$$u - x \ln u = t/2\tau + \text{constante}$$

qui permet d'obtenir si c'est nécessaire une expression explicite $t(z)$.
 Contentons nous de calculer t_2 , durée de l'évolution de $z =$

$$\zeta(u = x - \sqrt{1 + \zeta} = x - x_1) \text{ à } z = 0 (u = x - 1) :$$

$$t_2/2\tau = x_1 - 1 + x \ln \frac{x_1 - x}{1 - x}$$

Les figures 22 et 23 représentent respectivement $z(t)$ et le portrait de phase. Ce dernier est constitué de segments de droite et, comme le montre (29), d'arcs de parabole.

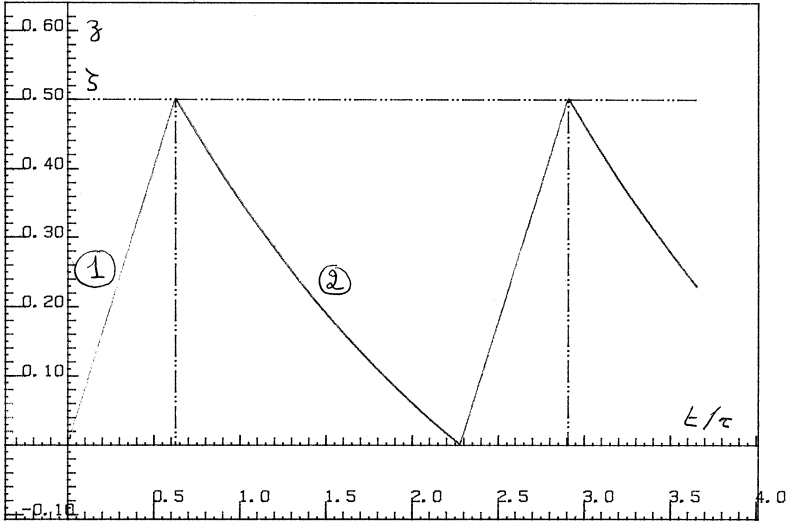


Figure 22 : Oscillations de relaxation du niveau du vase de Tantale.

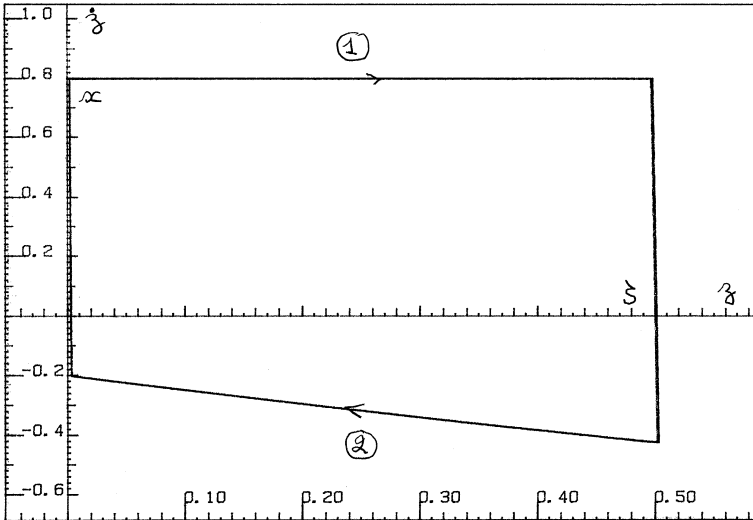


Figure 23 : Trajectoire de phase de l'oscillateur de Tantale.

6. QUELQUES OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Tirons à partir de cette galerie de portraits quelques remarques d'ordre général.

a) Périodicité

Cette question a été largement évoquée. Résumons l'essentiel. Il est évident que si un signal $x(t)$ est périodique (période T) sa trajectoire de phase est une courbe fermée, le point représentatif effectuant un tour complet sur cette courbe en un temps égal à T . Inversement, si la trajectoire de phase est une courbe fermée, on peut conclure à la périodicité de $x(t)$.

- Considérons d'abord le cas où le système est régi par une équation différentielle du second ordre, par exemple de la forme :

$$\ddot{x} + A(x) \dot{x} + \omega^2 B(x) = 0$$

Relèvent d'une telle description tous les oscillateurs décrits dans les § 2, 3 et 4. Moyennant des conditions de régularité (dites de Cauchy-Lipshitz), si on fixe les conditions initiales (x_0, \dot{x}_0) correspondant à un point M_0 du diagramme de phase, la trajectoire de phase est

alors déterminée univoquement. Remarquons également que le sens de parcours sur la trajectoire de phase fermée considérée est, par construction même, celui des aiguilles d'une montre. En effet, pour $\dot{x} > 0$, x croît et pour $\dot{x} < 0$, x décroît, les valeurs extrémales de x correspondent aux points situés sur l'axe des abscisses. Des changements de sens de parcours sur la trajectoire sont impossibles. On note de manière équivalente que l'aire du cycle, soit :

$$\int \dot{x} dx = \int \dot{x}^2 dt$$

est nécessairement positive.

Le point représentatif ayant ainsi effectué un tour complet et se trouvant en M_0 , le mouvement se reproduit identiquement avec une période T . Cette période est fixée par la trajectoire de phase. En effet, si l'équation de la trajectoire de phase est :

$$\dot{x} = f(x) \quad (30)$$

on a :

$$T = \int \frac{dx}{f(x)} \quad (31)$$

Selon les cas, T dépend ou non des conditions initiales. Dans le cas des oscillations entretenues, le cycle limite se comporte comme un attracteur et est indépendant des conditions initiales, la période est donc alors également indépendante des conditions initiales. En revanche, dans le cas, par exemple, du pendule pesant, il est bien connu que la période dépend de l'amplitude des oscillations. On peut remarquer que dans chacun des domaines $\dot{x} > 0$, la fonction $f(x)$ est nécessairement à détermination unique ce qui n'est évidemment pas le cas si l'on considère le cycle dans son entier.

• Si le système étudié est régi directement par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$\dot{x} = g(x)$$

les conséquences précédentes découlant de (30) restent valables. Le sens de parcours est celui des aiguilles d'une montre. Dans les systèmes à relaxation étudiés au § 5, on peut d'écrire l'évolution de $x(t)$ en introduisant deux fonctions univoques $g_1(x)$ et $g_2(x)$ de sorte que :

$$\dot{x} = g_1(x) \quad \text{pour } \dot{x} > 0$$

$$\dot{x} = g_2(x) \quad \text{pour } \dot{x} < 0$$

avec basculement (discontinuité de \dot{x}) de l'une à l'autre pour deux valeurs x_m et x_M de x , avec $x_m \leq x \leq x_M$. La période :

$$T = \int \frac{dx}{g(x)}$$

dépend uniquement des paramètres du système, en particulier des niveaux de basculement x_m et x_M . Ainsi, dans le cas du multivibrateur stable, par exemple, on calcule directement T avec $g_1 = -x + E$, $g_2 = -x - E$, $x_m = (k - 1) E$, $x_M = kE$ (figure 20).

Il est aisé de comprendre que pour un système donné régi par une équation du 1^{er} ordre ($g(x)$ donné), le choix des niveaux de basculement fixe univoquement la durée de montée et la durée de descente, donc la période.

b) Réversibilité

Examinons l'effet d'une remontée dans le temps (film déroulé à l'envers) sur une trajectoire de phase. Une telle évolution renversée est obtenue pour chaque valeur de x en changeant \dot{x} en $-\dot{x}$, c'est-à-dire en effectuant sur le diagramme de phase une symétrie par rapport à Ox . Chaque point M est ainsi transformé en M' ; l'ordre de succession des événements est inversé (figure 24). Si on considère, par exemple, l'oscillateur amorti (§ 3 a), il lui correspond l'oscillateur amplifié (§ 3 b) (figures 25 a et 25 b).

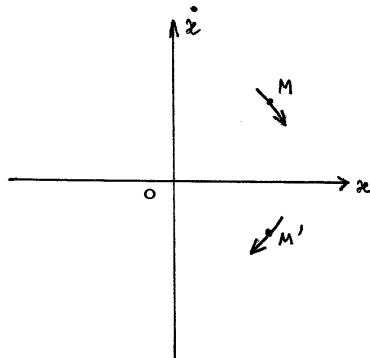


Figure 24 : Transformation $t \rightarrow -t$ sur le diagramme de phase.

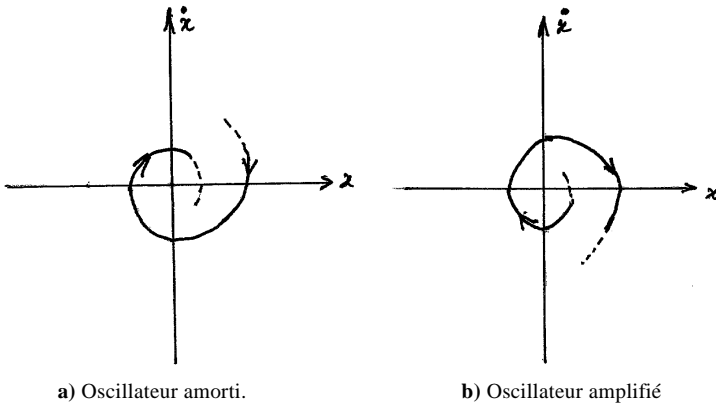


Figure 25 : Transformation $t \rightarrow -t$ sur le diagramme de phase d'un oscillateur amorti.

La réversibilité d'un processus se traduit par l'invariance de la trajectoire de phase dans la transformation précédente. Cette invariance est satisfaite à l'évidence dans le cas de l'oscillateur harmonique ou du pendule pesant (non amortis). Au contraire, pour une évolution irréversible cette invariance n'est plus vérifiée. L'exemple que nous venons de rappeler de l'oscillateur amorti illustre ce comportement. Concernant les oscillateurs entretenus, on vérifie que la trajectoire fermée qui décrit l'oscillateur n'est plus symétrique par rapport à Ox , qu'il s'agisse d'un cycle limite (oscillateurs du second ordre) ou de la trajectoire de phase des oscillateurs de relaxation*. Ceci traduit l'existence d'une irréversibilité fondamentale. Cette irréversibilité est liée à l'existence de phénomènes dissipatifs qui nécessitent précisément un pompage d'énergie compensatoire pour entretenir les oscillations.

Dans le cas du cycle limite d'un oscillateur du second ordre, nous avons indiqué qu'il y a alternance de phases à amortissement dominant et de phases à amplification dominante. Il est bien évident qu'un processus de cette nature n'est pas réversible car les phases ne sont pas interchangeables, un processus apportant de l'énergie ne pouvant être assimilé à un processus dissipatif remontant le temps !

* Dans le cas d'oscillations de relaxation obtenues simplement par charge et décharge d'un condensateur entre deux niveaux de tension, on peut montrer très facilement par un simple calcul qu'il est impossible, compte tenu des conditions de basculement, que la trajectoire de phase soit symétrique par rapport à Ox .

On notera enfin que le degré d'irréversibilité est d'autant plus grand que la trajectoire est plus dissymétrique par rapport à Ox.

c) *Non linéarité*

Nous avons déjà fait remarquer que les oscillateurs à cycle limite sont fondamentalement non linéaires puisque la linéarité impliquerait sur le diagramme de phase une propriété d'homothétie incompatible avec l'existence même d'un cycle limite indépendant des conditions initiales. Cette non-linéarité est dans ce cas incluse dans la fonction $A(x)$ qui figure dans l'équation (17), traduisant, par exemple dans le cas de l'oscillateur à résistance négative, la saturation de l'amplificateur opérationnel. Dans le cas des oscillateurs à relaxation, la non-linéarité fondamentale* est le fait du basculement.

En toute dernière remarque, notons que dans tous les exemples choisis la fonction $A(x)$ est paire. Il en résulte qu'en régime périodique d'oscillations, c'est-à-dire pour le cycle limite, il y a symétrie par rapport à l'origine (changement de x en $-x$ entraînant celui de \dot{x} en $-\dot{x}$). Les cycles limites obtenus vérifient effectivement cette propriété. La présence de termes impairs dans $A(x)$ viendrait détruire la symétrie des oscillations sans contribuer en rien à leur établissement.

Actuellement, en classes préparatoires aux Grandes Écoles, l'étude des oscillateurs se réduit à celle de l'oscillateur harmonique avec ou sans amortissement. Il serait bon, à notre avis, dans une filière à vocation plus appliquée de dépasser ce cadre très limité et d'esquisser une présentation des oscillateurs réels, c'est-à-dire entretenus, sans que cela entraîne une étude approfondie. Ce serait aussi nous semble-t-il un bon exemple de l'utilisation de l'outil informatique tant au point de vue de l'exploitation directe de l'expérience que celui du traitement numérique des modèles utilisés. Enfin, une prise de contact par ce biais avec la non-linéarité nous paraît intéressante.

Appendice : Oscillateur de Van der Pol fortement non-linéaire

Les figures 12 ter a et b donnent le comportement d'un Van der Pol pour p grand ($p = 500$, $\sqrt{p} = 22,4$). Van der Pol avait déjà noté que dans ces cas les oscillations prennent l'allure d'oscillations de relaxation avec

* C'est-à-dire le passage de $g_1(x)$ à $g_2(x)$, les non-linéarités éventuelles de $g_1(x)$ et de $g_2(x)$ (comme dans le cas du vase de Tantale) n'étant pas ici fondamentales.

alternance de phases à variation très rapide et de phases à variation très lente, le cycle limite étant par ailleurs atteint sans oscillation préalable.

Les deux phases lentes par cycles se situent dans leur totalité dans les zones pour lesquelles l'amortissement domine mais va en décroissant (soit x variant de x_M à x_S et x variant de $-x_M$ à $-x_S$). Le calcul de la période T se ramène, dans ces conditions, à celui de la durée de ces deux phases pour lesquelles on peut tenter l'approximation \ddot{x} négligeable, l'équation de Van der Pol se réduisant alors à :

$$(x^2 - p) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{x} = f(x) = \frac{\omega^2 x}{p - x^2}$$

d'où :

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega^2} \int_{x_M}^{x_S} dx \left(\frac{p}{x} - x \right)$$

soit :

$$T = \frac{1}{\omega^2} \left(-2p \ln \frac{x_M}{x_S} + x_M^2 - x_S^2 \right)$$

Si l'on admet (voir § 4 c) que l'on a $x_M \cong 2x_S = 2\sqrt{p}$ et que l'on prend pour unité de temps la période propre des oscillations ($\omega = 2\pi$) :

$$T \cong \frac{p}{4\pi^2} (3 - 2 \ln 2)$$

Cette période augmente avec p et est notablement plus importante que la période des oscillations propres ($T = 1$). Ainsi, pour $p = 500$: $T = 20,7$. On notera, cependant que le cycle limite diffère assez sensiblement, même pour p très grand, de la trajectoire de phase d'un oscillateur de relaxation proprement dit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. ROCARD. Dynamique générale des vibrations. Masson 1949.
- [2] J.-P. MATHIEU. Vibrations et phénomènes de propagation. Tome 1. Oscillateurs. Masson 1974.
- [3] P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL. L'ordre dans le chaos. Hermann 1984.
- [4] J.M. MILLET et Ph. JULIARD. Montage simulant une résistance négative. B.U.P. n° 691, page 209.

- [5] D.W. JORDAN et P. SMITH. Non linear Ordinary Differential Equations. Clarendon Press 1986.
- [6] P. BERGÉ. Le chaos. Encyclopedia Universalis (Supplément 1990).
- [7] J.M. VIGOUREUX. Introduction à l'étude des systèmes non-linéaires. B.U.P. n° 722, page 331.