

LOIS DE CONSERVATION

§ 6. Energie

Lorsqu'un système mécanique est en mouvement, les $2s$ grandeurs q_i et \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, s$) qui déterminent son état varient avec le temps. Il existe cependant des fonctions de ces grandeurs qui conservent pendant le mouvement une valeur constante, dépendant seulement des conditions initiales. Ces fonctions sont appelées *intégrales premières* (ou *intégrales du mouvement*).

Pour un système mécanique fermé à s degrés de liberté, le nombre d'intégrales du mouvement indépendantes est égal à $2s - 1$. Des considérations simples le montrent avec évidence. La solution générale des équations du mouvement contient $2s$ constantes arbitraires (voir p. 10). Puisque les équations du mouvement d'un système fermé ne contiennent pas le temps explicitement, le choix de l'origine des temps est arbitraire, et l'une des constantes arbitraires dans la solution des équations peut toujours être choisie sous forme d'une constante additive t_0 du temps. Éliminant $t + t_0$ des $2s$ fonctions

$$\begin{aligned} &= q_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \end{aligned}$$

nous exprimerons les $2s - 1$ constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$ sous la forme de fonctions de q et \dot{q} , qui seront des intégrales premières.

Cependant toutes les intégrales premières sont loin de jouer un rôle d'égale importance en Mécanique. Il en est parmi elles dont la constance a une origine très profonde, liée aux propriétés fondamentales de l'espace et du temps, c'est-à-dire à leur uniformité et à leur isotropie. Toutes ces grandeurs qui, comme on dit, sont conservatives, ont une propriété générale importante: elles sont additives, c'est-à-dire que leur valeur pour un système formé de par-

ticules dont on peut négliger l'interaction est égale à la somme de leurs valeurs pour chacune des particules.

Cette additivité confère aux grandeurs correspondantes un rôle spécialement important au point de vue mécanique. Supposons par exemple que deux corps interagissent pendant un certain intervalle de temps. Or, avant comme après l'interaction, chacune des intégrales (additives) de tout le système est égale à la somme de ses valeurs pour les deux corps pris séparément. Par suite, les lois de conservation de ces grandeurs permettent directement de tirer une série de conclusions quant à l'état des corps après l'interaction, si leur état avant l'interaction est connu.

Commençons par la loi de conservation qui découle de *l'uniformité du temps*.

Du fait de cette uniformité, la fonction de Lagrange d'un système fermé ne dépend pas explicitement du temps. Par suite, la dérivée totale par rapport au temps de la fonction de Lagrange peut s'écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

(si L était fonction explicite du temps, il faudrait ajouter le terme $\frac{\partial L}{\partial t}$ au second membre). En remplaçant les dérivées $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ par leurs valeurs $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ obtenues à partir des équations de Lagrange, on obtient :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

ou :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

De là, on voit que la grandeur

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{Cte} \quad (6,1)$$

reste constante au cours du mouvement du système fermé. Elle constitue donc une de ses intégrales premières. Cette grandeur est appelée *énergie* du système. L'additivité de l'énergie résulte immédiatement de l'additivité de la fonction de Lagrange dont, d'après (6,1), elle est fonction linéaire.

La loi de conservation de l'énergie est valable non seulement pour les systèmes fermés, mais aussi pour les systèmes placés dans

un champ extérieur constant (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps); en effet, la seule propriété de la fonction de Lagrange que nous avons utilisée dans nos raisonnements, à savoir le fait qu'elle ne dépend pas explicitement du temps, reste valable dans ce cas. Les systèmes mécaniques dont l'énergie se conserve sont parfois appelés *conservatifs*.

Comme on l'a vu au § 5, la fonction de Lagrange d'un système fermé (ou placé dans un champ constant) est de la forme :

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

où T est fonction du carré des vitesses. Appliquant ici le théorème connu d'Euler sur les fonctions homogènes, nous obtenons :

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Portant cette valeur dans (6,1), on trouve :

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q), \quad (6,2)$$

et en coordonnées cartésiennes :

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots). \quad (6,3)$$

Ainsi, l'énergie d'un système peut être représentée sous la forme d'une somme, dont les deux termes sont essentiellement différents : l'énergie cinétique, dépendant des vitesses, et l'énergie potentielle, dépendant seulement des coordonnées des particules.

§ 7. Impulsion

L'*homogénéité de l'espace* donne lieu à une autre loi de conservation.

Du fait de cette homogénéité, les propriétés mécaniques d'un système fermé ne changent pas lors d'un déplacement parallèle du système entier dans l'espace. Considérons donc un déplacement infiniment petit ε , en imposant la condition que la fonction de Lagrange reste inchangée.

On désigne sous le nom de déplacement parallèle une transformation dans laquelle tous les points du système se déplacent d'un même segment; autrement dit, leurs rayons vecteurs $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \varepsilon$. La variation de la fonction L pour une variation infiniment petite des coordonnées (les vitesses des particules étant constantes) est donnée par

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \varepsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a},$$

la sommation étant effectuée pour tous les points matériels du système. ε étant arbitraire, la condition $\delta L = 0$ est équivalente à la condition

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (7,1)$$

On a donc, en vertu des équations de Lagrange (5,2):

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que dans un système mécanique fermé la grandeur vectorielle

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (7,2)$$

reste inchangée lors du mouvement. Le vecteur \mathbf{P} est appelé *impulsion*¹ du système. La dérivation de la fonction de Lagrange (5,1) montre que l'impulsion s'exprime en fonction des vitesses de point par

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a. \quad (7,3)$$

L'additivité de l'impulsion est évidente. De plus, contrairement à l'énergie, l'impulsion d'un système est égale à la somme des impulsions

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$$

des différentes particules, que leurs interactions soient ou non négligeables.

La loi de conservation n'est valable pour les trois composantes du vecteur impulsion qu'en l'absence de champ extérieur. Cependant, certaines composantes de l'impulsion peuvent se conserver individuellement dans un champ, si l'énergie potentielle n'y dépend pas de l'une des coordonnées cartésiennes. Lors d'une translation le long de l'axe de coordonnées correspondant, les propriétés mécaniques du système ne changent évidemment pas, et de la même façon, nous voyons que la projection de l'impulsion sur cet axe se conserve. Ainsi, dans un champ uniforme dirigé suivant l'axe des z , il y a conservation des composantes de l'impulsion le long des axes x et y .

L'égalité (7,1) a par elle-même un sens physique simple. La dérivée $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$ représente la force \mathbf{F}_a agissant sur la $a^{\text{ième}}$

¹ Appelée anciennement quantité de mouvement.

particule. L'égalité (7,1) signifie donc que la somme des forces agissant sur toutes les particules d'un système fermé est égale à 0 :

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0. \quad (7,4)$$

En particulier, dans le cas d'un système composé seulement de deux points matériels, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$: la force exercée sur la première particule par la deuxième est égale, mais opposée à la force exercée sur la deuxième particule par la première. Cette affirmation est connue sous le nom de loi de l'égalité de l'action et de la réaction.

Si le mouvement est décrit à l'aide des coordonnées généralisées q_i , les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7,5)$$

sont appelées alors *impulsions généralisées* et les dérivées par rapport aux coordonnées généralisées

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7,6)$$

forces généralisées. Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (7,7)$$

En coordonnées cartésiennes, les impulsions généralisées coïncident avec les composantes des vecteurs \mathbf{p}_a . Mais dans le cas général, les grandeurs p_i sont des fonctions linéaires homogènes des vitesses généralisées \dot{q}_i , ne se ramenant nullement à des produits d'une masse par une vitesse.

P r o b l è m e

Une particule de masse m , animée d'une vitesse \mathbf{v}_1 , passe d'un demi-espace dans lequel son énergie potentielle est constante et égale à U_1 , à un demi-espace où cette énergie est aussi constante, mais égale à U_2 . Déterminer le changement de direction du mouvement de la particule.

Solution. L'énergie potentielle ne dépend pas des coordonnées le long des axes parallèles à la surface de séparation des deux demi-espaces. Par suite, la projection de l'impulsion de la particule sur cette surface se conserve. Soit \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 les vitesses de la particule avant et après qu'elle ait franchi la surface de séparation, et θ_1 et θ_2 les angles formés par ces vitesses avec la normale à la surface ; nous obtenons : $v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2$. Mais la relation entre v_1 et v_2 est donnée par la loi de conservation de l'énergie, d'où finalement :

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2} (U_1 - U_2)}.$$

§ 8. Centre d'inertie

L'impulsion d'un système mécanique fermé a des valeurs différentes dans différents systèmes de référence (galiléens). Si un système de référence K' se meut par rapport à un autre système K avec une vitesse \mathbf{V} , les vitesses \mathbf{v}'_a et \mathbf{v}_a des particules par rapport à ces systèmes sont liées par la relation $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Par suite, la relation entre les valeurs \mathbf{P} et \mathbf{P}' de l'impulsion dans ces systèmes est donnée par la formule

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a,$$

ou :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_a m_a. \quad (8,1)$$

En particulier, il existe toujours un système de référence K' dans lequel l'impulsion totale s'annule. Posant dans (8,1) $\mathbf{P}' = 0$, nous trouvons que la vitesse de ce système de référence est égale à

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \quad (8,2)$$

Si l'impulsion totale d'un système mécanique est nulle, on dit qu'il est au repos par rapport au système de référence correspondant. C'est là une généralisation tout à fait naturelle de la notion de repos pour un point matériel isolé. La vitesse correspondante \mathbf{V} , donnée par la formule (8,2), définit alors la vitesse de « mouvement dans son ensemble » d'un système mécanique à impulsion non nulle. Nous voyons ainsi que la loi de conservation de l'impulsion permet de formuler de façon naturelle la notion de repos et de vitesse d'un système mécanique dans son ensemble.

La formule (8,2) montre que la relation entre l'impulsion \mathbf{P} et la vitesse \mathbf{V} d'un système dans son ensemble est la même que la relation entre l'impulsion et la vitesse d'un point matériel de masse $\mu = \sum m_a$ égale à la somme des masses de toutes les particules du système. On peut exprimer ce fait en disant que la *masse est additive*.

Le second membre de la formule (8,2) peut être représenté comme la dérivée totale par rapport au temps de l'expression

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}. \quad (8,3)$$

On peut dire que la vitesse d'un système dans son ensemble est la vitesse de déplacement dans l'espace d'un point dont le rayon vecteur est donné par la formule (8,3). Ce point est appelé *centre d'inertie* du système.

On peut formuler la loi de conservation de l'impulsion d'un système fermé en disant que son centre d'inertie est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Sous cette forme, c'est une généralisation de la loi de l'inertie, établie au § 3 pour un point matériel libre, dont le « centre d'inertie » coïncide avec le point lui-même.

Lorsque l'on étudie les propriétés mécaniques d'un système fermé, il est naturel d'utiliser pour système de référence celui dans lequel son centre d'inertie est au repos. On se débarrasse par là même du mouvement rectiligne et uniforme du système dans son ensemble, qui, en l'espèce, ne présente pas d'intérêt.

L'énergie d'un système mécanique au repos dans son ensemble est habituellement appelée son énergie interne E_{int} . Elle renferme l'énergie cinétique du mouvement relatif des particules dans le système et l'énergie potentielle de leur interaction. Quant à l'énergie totale d'un système animé dans son ensemble d'une vitesse V , elle peut s'écrire

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{int}}. \quad (8,4)$$

Bien que cette formule soit évidente par elle-même, donnons-en une démonstration directe.

Les énergies E et E' d'un système mécanique dans deux systèmes de référence K et K' sont liées par la relation

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + \mathbf{V} \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U \end{aligned}$$

ou :

$$E = E' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{\mu V^2}{2}. \quad (8,5)$$

Cette formule définit la loi de transformation de l'énergie lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre, de la même façon que, pour l'impulsion, cette loi est donnée par la formule (8,1). Si dans le système K' le centre d'inertie est au repos, alors $\mathbf{P}' = 0$ et $E' = E_{\text{int}}$, et nous retrouvons la formule (8,4).

P r o b l è m e

Trouver la loi de transformation de l'action lorsqu'on passe d'un système galiléen à un autre.

Solution. La fonction de Lagrange, égale à la différence des énergies cinétique et potentielle, se transforme évidemment selon la formule analogue à (8,5) :

$$L = L' + \mathbf{V}\mathbf{P}' + \frac{1}{2} \mu V^2.$$

Intégrant cette égalité par rapport au temps, on trouve la loi de transformation de l'action :

$$S = S' + \mu \mathbf{V} \mathbf{R}' + \frac{1}{2} \mu V^2 t,$$

\mathbf{R}' étant le rayon vecteur du centre d'inertie dans le système K' .

§ 9. Moment cinétique

Venons-en maintenant à la loi de conservation qui découle de l'isotropie de l'espace.

Cette isotropie signifie que les propriétés mécaniques d'un système fermé ne changent pas lors d'une rotation dans l'espace de ce système dans son ensemble. Considérons en effet une rotation infiniment petite du système, et imposons que la fonction de Lagrange reste inchangée.

Nous appellerons vecteur de rotation infiniment petit $\delta\varphi$ le vecteur dont la valeur absolue est égale à l'angle de rotation $\delta\varphi$, et dont la direction coïncide avec l'axe de rotation (de telle sorte que par rapport à la direction de $\delta\varphi$, la rotation s'effectue suivant la règle du tire-bouchon).

Cherchons tout d'abord à quoi est égal l'accroissement du rayon vecteur mené de l'origine commune des coordonnées (placée sur l'axe de rotation) à un point quelconque du système. Le déplacement linéaire de l'extrémité du rayon vecteur est lié à l'angle par la relation

$$|\delta\mathbf{r}| = r \sin \theta \cdot \delta\varphi$$

(fig. 5). Mais la direction du vecteur est perpendiculaire au plan défini par \mathbf{r} et $\delta\varphi$. Par suite, il est clair que

$$\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}. \quad (9,1)$$

La rotation du système modifie non seulement la direction des rayons vecteurs, mais aussi les vitesses de toutes les particules, tous les vecteurs se transformant suivant une même loi. L'accroissement de la vitesse par rapport au système de coordonnées immobile est donc

$$\delta\mathbf{v} = \delta\varphi \times \mathbf{v}. \quad (9,2)$$

Portons cette expression dans la condition d'invariance de la fonction de Lagrange lors de la rotation :

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a \right) = 0,$$

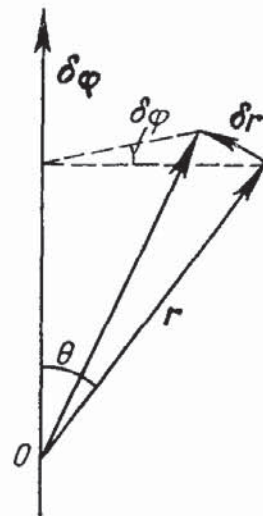


Fig. 5

et remplaçons, par définition, les dérivées $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$ par \mathbf{p}_a et les dérivées $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$, compte tenu des équations de Lagrange, par $\dot{\mathbf{p}}_a$. Nous obtenons alors :

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a \cdot \delta \varphi \times \mathbf{r}_a + \mathbf{p}_a \cdot \delta \varphi \times \mathbf{v}_a) = 0,$$

ou, permutant circulairement les facteurs et sortant $\delta \varphi$ de sous le signe somme :

$$\delta \varphi \sum_a (\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a) = \delta \varphi \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0.$$

Puisque $\delta \varphi$ est arbitraire, il en résulte que

$$\frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0,$$

autrement dit nous concluons que lors du mouvement d'un système fermé, il y a conservation de la grandeur vectorielle

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a, \quad (9,3)$$

appelée *moment cinétique* (ou simplement *moment*) du système. L'additivité de cette grandeur est évidente puisque, de même que celle de l'impulsion, elle ne dépend pas du fait qu'il y ait ou non interaction entre les particules.

Nous avons ainsi épuisé les intégrales premières additives. En résumé, un système fermé possède en tout sept intégrales de ce genre : l'énergie, et les trois composantes de chacun des vecteurs impulsion et moment.

Du fait que les rayons vecteurs des particules entrent dans la définition du moment, la valeur de celui-ci dépend en général du choix de l'origine des coordonnées. Les rayons vecteurs \mathbf{r}_a et \mathbf{r}'_a du même point par rapport à des origines placées à une distance \mathbf{a} sont liés par la relation $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$. On a par conséquent :

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a + \mathbf{a} \times \sum_a \mathbf{p}_a$$

ou :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{a} \times \mathbf{P}. \quad (9,4)$$

Cette formule montre que c'est seulement dans le cas où le système dans son ensemble est au repos (c'est-à-dire $\mathbf{P} = 0$) que son moment ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées. Il est évident que cette indétermination de sa valeur n'influe pas sur la loi de

conservation du moment puisque, pour un système fermé, l'impulsion se conserve aussi.

Etablissons également la formule qui relie les valeurs du moment cinétique dans deux systèmes de référence galiléens K et K' , dont le second est animé par rapport au premier d'une vitesse V . Nous supposerons que les origines des coordonnées dans les systèmes K et K' coïncident à l'instant donné. Les rayons vecteurs des particules dans les deux systèmes sont alors les mêmes, et la relation entre les vitesses est $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Nous avons donc :

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}'_a + \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{V}.$$

La première somme du second membre est le moment \mathbf{M}' dans le système K' ; introduisant dans la seconde somme le rayon vecteur du centre d'inertie donné par (8,3), on obtient

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu \mathbf{R} \times \mathbf{V}. \quad (9,5)$$

Cette formule définit la loi de transformation du moment cinétique lorsqu'on passe d'un système de référence à un autre, de la même façon que, pour l'impulsion et l'énergie, les lois analogues sont données par les formules (8,1) et (8,5).

Si le système de référence K' est celui dans lequel le système mécanique donné est au repos dans son ensemble, V est alors la vitesse du centre d'inertie de ce système, et μV , son impulsion totale \mathbf{P} (par rapport à K). Par suite :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \quad (9,6)$$

En d'autres termes, le moment cinétique \mathbf{M} d'un système mécanique se compose de son « moment propre » par rapport au système de référence dans lequel il est au repos, et du moment $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$ lié au mouvement dont il est animé dans son ensemble.

Bien que la loi de conservation des trois composantes du moment (par rapport à une origine des coordonnées quelconque) ne joue que pour un système fermé, elle peut jouer aussi, sous une forme plus limitée, pour des systèmes placés dans un champ extérieur. Les raisonnements que nous avons faits plus haut montrent avec évidence qu'il y a toujours conservation de la projection du moment sur l'axe par rapport auquel le champ considéré est symétrique; par suite, les propriétés mécaniques du système ne changent pas lors d'une rotation quelconque autour de cet axe; bien sûr, le moment doit ici être défini par rapport à un point (origine des coordonnées) situé sur ce même axe.

Le plus important des cas de ce genre est celui d'un champ à symétrie centrale, c'est-à-dire d'un champ dans lequel l'énergie potentielle dépend seulement de la distance à un point déterminé

de l'espace (centre). Il est évident que le mouvement dans un tel champ conserve la projection du moment sur tout axe passant par le centre. En d'autres termes, il y a conservation du vecteur \mathbf{M} du moment, celui-ci étant défini non par rapport à un point quelconque de l'espace, mais par rapport au centre du champ.

Autre exemple: un champ uniforme le long de l'axe z , dans lequel il y a conservation de la projection M_z du moment, l'origine des coordonnées pouvant être choisie de façon arbitraire.

Remarquons que la projection du moment sur un axe quelconque (appelons-le z) peut être obtenue par dérivation de la fonction de Lagrange, selon la formule

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \quad (9,7)$$

où la coordonnée φ est l'angle de rotation autour de l'axe. Cela ressort clairement de la façon dont nous avons établi la loi de conservation du moment, mais on peut le vérifier par un calcul direct. En coordonnées cylindriques r, φ, z , nous avons (posant $x_a = r_a \cos \varphi_a, y_a = r_a \sin \varphi_a$):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a. \quad (9,8)$$

D'autre part, avec ces variables, la fonction de Lagrange s'écrit

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

et en la portant dans la formule (9,7), nous retrouvons l'expression (9,8).

P r o b l è m e s

1. Trouver les expressions des composantes cartésiennes et de la valeur absolue du moment cinétique d'une particule en coordonnées cylindriques r, φ, z .

Réponse :

$$M_x = m \sin \varphi (r \dot{z} - z \dot{r}) - m r z \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$M_y = m \cos \varphi (z \dot{r} - r \dot{z}) - m r z \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$M_z = m r^2 \dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r^2 \dot{\varphi}^2 (r^2 + z^2) + m^2 (r \dot{z} - z \dot{r})^2.$$

2. Même question en coordonnées sphériques r, θ, φ .

Réponse :

$$M_x = -m r^2 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi),$$

$$M_y = m r^2 (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi),$$

$$M_z = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2).$$

3. Indiquer les composantes de l'impulsion \mathbf{P} et du moment \mathbf{M} qui se conservent lors d'un mouvement dans les champs suivants :

a) Champ d'un plan homogène infini.

Réponse : P_x, P_y, M_z (le plan infini étant le plan x, y).

b) Champ d'un cylindre homogène infini.

Réponse : M_z, P_z (axe du cylindre : z).

c) Champ d'un prisme homogène infini.

Réponse : P_z (arêtes du prisme parallèles à l'axe z).

d) Champ de deux points.

Réponse : M_z (les points sont situés sur l'axe z).

e) Champ d'un demi-plan homogène infini.

Réponse : P_y (le demi-plan infini étant la partie du plan x, y , limitée par l'axe y).

f) Champ d'un cône homogène.

Réponse : M_z (axe du cône : z).

g) Champ d'un tore circulaire homogène.

Réponse : M_z (axe du tore : z).

h) Champ d'une hélice cylindrique homogène infinie.

Solution. La fonction de Lagrange ne change pas lors d'une rotation d'un angle $\delta\varphi$ autour de l'axe de l'hélice (axe z) et d'une translation simultanée le long de cet axe sur une distance $\frac{h}{2\pi} \delta\varphi$ (h pas de l'hélice). Par suite,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi = \left(\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z \right) \delta \varphi = 0,$$

d'où

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{Cte.}$$

§ 10. Similitude mécanique

La multiplication de la fonction de Lagrange par un facteur constant quelconque ne change évidemment pas les équations du mouvement. Grâce à cette circonstance (déjà notée au § 2) il est possible, dans de nombreux cas importants, de tirer plusieurs conclusions quant aux propriétés du mouvement, sans intégrer concrètement les équations.

C'est le cas par exemple lorsque l'énergie potentielle est une fonction homogène des coordonnées, c'est-à-dire une fonction satisfaisant à la condition

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_n) = \alpha^k U(r_1, r_2, \dots, r_n), \quad (10,1)$$

où α est une constante quelconque, et le nombre k le degré d'homogénéité de la fonction.

Effectuons la transformation par laquelle, lorsque les coordonnées varient α fois, le temps varie simultanément (β fois) :

$$r_a \rightarrow \alpha r_a, \quad t \rightarrow \beta t.$$

Toutes les vitesses $v_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$ varient alors α/β fois, et l'énergie cinétique α^2/β^2 fois. L'énergie potentielle est multipliée par α^k . Si α et β sont liés par la condition

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \text{ c'est-à-dire } \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}},$$

alors, par cette transformation, la fonction de Lagrange tout entière est multipliée par le facteur constant α^k , c'est-à-dire que les équations du mouvement restent inchangées.

Faire varier un même nombre de fois toutes les coordonnées des particules signifie passer de certaines trajectoires à d'autres, géométriquement semblables aux premières, et n'en différant que par leurs dimensions linéaires. Nous sommes amenés ainsi à la conclusion suivante: si l'énergie potentielle d'un système est une fonction homogène du $k^{\text{ième}}$ degré des coordonnées (cartésiennes), les équations du mouvement admettent des trajectoires géométriquement semblables; tous les temps du mouvement (entre les points correspondants des trajectoires) sont alors dans le rapport

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \quad (10,2)$$

où l'/l est le rapport des dimensions linéaires de deux trajectoires. Comme les temps, les valeurs des diverses grandeurs mécaniques aux points correspondants des trajectoires et aux instants correspondants sont aussi des puissances déterminées du rapport l'/l . Ainsi, pour les vitesses, les énergies et les moments, on a:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}. \quad (10,3)$$

Prenons quelques exemples.

Comme nous le verrons plus loin, dans le cas des petites oscillations, l'énergie potentielle est une fonction quadratique des coordonnées ($k = 2$). La formule (10,2) montre que la période de ces oscillations ne dépend pas de leur amplitude.

Dans un champ de forces homogène l'énergie potentielle est une fonction linéaire des coordonnées [voir (5,8)], c'est-à-dire $k = 1$. De (10,2) on tire

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Il s'ensuit par exemple que pour la chute d'un corps dans un champ de pesanteur, les carrés des temps de chute sont dans le même rapport que les hauteurs initiales.

Lors de l'attraction newtonienne de deux masses, ou de l'interaction coulombienne de deux charges, l'énergie potentielle est inversement proportionnelle à la distance entre les particules; autrement dit, elle est une fonction homogène de degré $k = -1$. Dans ces cas :

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l} \right)^{3/2},$$

et nous pouvons dire par exemple que les carrés des temps de révolution de corps sur leurs orbites sont proportionnels aux cubes des dimensions de celles-ci (*troisième loi de Kepler*).

Si le mouvement d'un système dont l'énergie potentielle est une fonction homogène des coordonnées s'effectue dans une région limitée de l'espace, il existe une relation très simple entre les valeurs moyennes dans le temps des énergies potentielle et cinétique; cette relation est connue sous le nom de *théorème du viriel*.

Puisque l'énergie cinétique T est une fonction quadratique des vitesses, on a d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes :

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = 2T,$$

ou, en introduisant les impulsions $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$:

$$2T = \sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a. \quad (10,4)$$

Prenons la moyenne de cette égalité dans le temps. On appelle valeur moyenne d'une fonction quelconque du temps $f(t)$ la grandeur

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

Il est facile de voir que si $f(t)$ est la dérivée par rapport au temps $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ d'une fonction $F(t)$ bornée (c'est-à-dire ne prenant pas de valeurs infinies), sa valeur moyenne s'annule. En effet,

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Supposons qu'un système soit en mouvement dans une région finie de l'espace, avec des vitesses ne tendant pas vers l'infini. Alors la grandeur $\sum_a \mathbf{r}_a \mathbf{p}_a$ est bornée, et la valeur moyenne du pre-

mier terme du second membre de l'égalité (10,4) s'annule. Remplaçant par ailleurs, conformément aux équations de Newton, $\dot{\mathbf{p}}_a$ par $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}$, nous obtenons ¹

$$2\bar{T} = \sum_a \overline{\mathbf{r}_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}}. \quad (10,5)$$

Si l'énergie potentielle est une fonction homogène du $k^{\text{ième}}$ degré de tous les rayons vecteurs \mathbf{r}_a , l'égalité (10,5) donne d'après le théorème d'Euler la relation cherchée :

$$2\bar{T} = k\bar{U}. \quad (10,6)$$

Puisque $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$, on peut écrire la relation (10,6) sous les formes équivalentes

$$\bar{U} = \frac{k}{k+2} E, \quad \bar{T} = \frac{2}{k+2} E, \quad (10,7)$$

où \bar{U} et \bar{T} sont exprimés en fonction de l'énergie totale du système.

En particulier, pour des petites oscillations ($k=2$), nous avons

$$\bar{T} = \bar{U},$$

c'est-à-dire que les valeurs moyennes des énergies potentielle et cinétique coïncident. Pour l'interaction newtonienne ($k=-1$):

$$2\bar{T} = -\bar{U}.$$

Ici $E = -\bar{T}$, ce qui correspond au fait que pour ce genre d'interaction, le mouvement ne s'effectue dans une région finie de l'espace que lorsque l'énergie totale est négative (voir § 15).

Problèmes

1. Deux points de masses différentes et de même énergie potentielle se déplacent sur des trajectoires identiques; trouver le rapport des temps.

Réponse :

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

2. Trouver les valeurs des temps pour un mouvement sur des trajectoires identiques lorsqu'on multiplie l'énergie potentielle par un facteur constant.

Réponse :

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

¹ L'expression du second membre de (10,5) est parfois appelée viriel du système.