

## De l'oscillateur harmonique à Van der Pol

par Laurent SARTRE  
mél : ls.evasion@wanadoo.fr

---

### RÉSUMÉ

*Quoi de plus banal que le battement d'un cœur, la course des aiguilles d'une montre, la vibration d'une corde de violon ou encore les incessants allers-retours du balancier d'une horloge. Pourtant tous ces phénomènes ont un point commun des plus fondamentaux pour la physique : ce sont des oscillateurs.*

*Pour les étudier, des premiers modèles simples ont été développés qui rendent compte des petits mouvements d'un pendule ou d'un ressort. On entre ici dans le domaine de la physique des systèmes linéaires dont l'oscillateur harmonique constitue le modèle universel. Toutefois, les oscillateurs linéaires ne permettent pas d'expliquer la régulation du rythme cardiaque, l'entretien des oscillations d'une balançoire ou la convection de Rayleigh-Bénard<sup>1</sup>. Il devient alors nécessaire de développer une physique non-linéaire dont le paradigme des oscillateurs est certainement l'oscillateur de Van der Pol.*

*Dans le cadre des programmes de terminale S et de première année de classes préparatoires, les oscillateurs occupent une place privilégiée. Leur étude doit avant tout se faire par une approche pragmatique. L'oscillateur de Van der Pol constitue une conclusion possible à cette partie.*

*Après analyse des principaux «défauts» de l'oscillateur harmonique, nous proposons une justification physique à l'introduction de l'oscillateur amorti dans un premier temps, de l'oscillateur de Van der Pol dans un second temps, soulignant par la même occasion la nécessité d'une physique non-linéaire. Toute cette étude offre la possibilité d'utiliser des outils d'analyse tels que les portraits de phase, l'ordinateur, dont l'intérêt pédagogique et scientifique est évident. Enfin, il peut être avantageux de tirer profit d'un tel thème pour élargir la discussion à d'autres sujets comme par exemple les oscillateurs chimiques, les oscillateurs paramétriques ou le monde fascinant du chaos.*

---

1. Convection d'un fluide entre deux murs horizontaux isothermes soumis à un gradient vertical de température.

## DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE ...

### *Un premier modèle : l'oscillateur harmonique*

Les petites oscillations d'un pendule pesant, d'un ressort constituent un phénomène à caractère périodique. Leur modélisation entre dans la catégorie des oscillateurs harmoniques dont l'équation d'évolution dynamique à une dimension est bien connue :

*“x point point plus oméga carré x égal zéro”*

sous forme littéraire (!) ou en utilisant le langage des mathématiques :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1)$$

Dans cette équation,  $x$  représente un degré de liberté du système : élongation du ressort, angle que fait le pendule pesant avec la verticale.  $t$  est bien évidemment le temps alors que  $\omega$  est pulsation propre de l'oscillateur.

### *Quelques propriétés de l'oscillateur harmonique*

Une analyse de l'équation (1) nous indique que celle-ci présente deux **invariances** :

- invariance par **renversement du temps** :  $t \rightarrow (-t)$  ;
- invariance par **dilatation** :  $x(t) \rightarrow \alpha x(t)$ .

L'invariance par renversement du temps signifie que l'équation (1) conserve la même forme quand on change le temps en son opposé. Cela signifie encore que si on observe l'évolution du phénomène, on est incapable de dire si celui-ci évolue dans le même sens que le temps ou remonte le temps ! Ces phénomènes qualifiés de **réversibles**, sont rares en physique. On a tôt fait de se rendre compte quand un film est projeté à l'endroit ou projeté à l'envers. Personne n'a jamais vu un morceau de sucre se reconstituer au fond d'une tasse de café après dissolution dans ce dernier. De la même façon, un oscillateur libre réel ne présente pas ce caractère de réversibilité. Il finit toujours par s'arrêter sous l'effet d'amortissements, de manque d'énergie. Il est par conséquent nécessaire d'améliorer notre modèle pour rendre compte de l'irréversibilité des phénomènes physiques.

La deuxième invariance est liée à la linéarité de l'équation. Si  $x(t)$  est une solution de (1),  $\alpha x(t)$ , où  $\alpha$  est un réel, est encore une solution de (1). L'oscillateur ne vibre donc pas avec une amplitude qui lui est propre ; elle dépend des conditions initiales. Nous verrons que cette invariance ne peut subsister si on veut modéliser des oscillations auto-entretenues, d'amplitude bien définie.

### Portrait de phase de l'oscillateur harmonique

La solution de l'équation (1) est sinusoïdale, de la forme :

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \phi)$$

et la vitesse s'écrit :

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $V_0 = \omega X_0$ . Il est alors facile de tracer l'évolution temporelle de  $x$  mais également une **trajectoire de phase** en portant  $x(t)$  en abscisse et  $v(t)$  en ordonnée (voir figures 1 et 2)

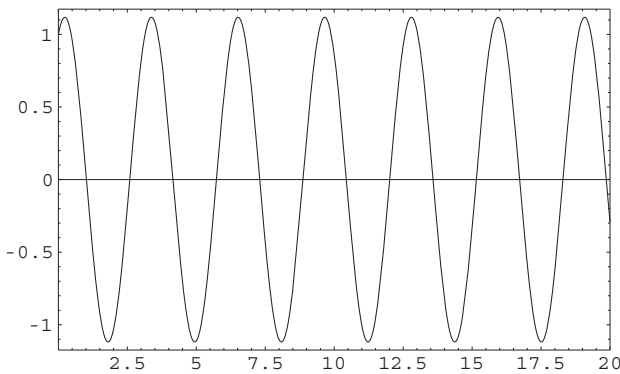


Figure 1

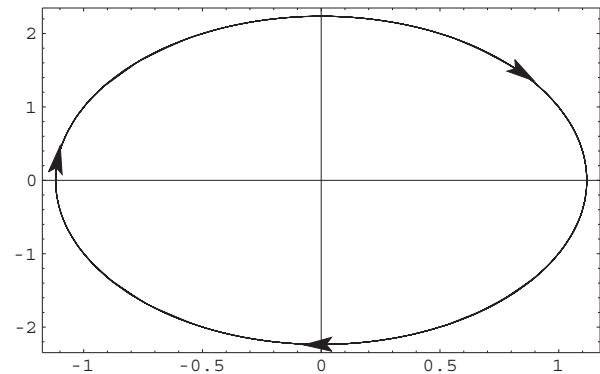


Figure 2

Il est important de préciser le sens de parcours de chaque courbe de l'espace de phase<sup>2</sup> qui précise le sens d'évolution du temps. Ces courbes ont une interprétation physique. En effet, reprenant notre équation d'évolution (1), nous pouvons écrire :

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 \dot{x} x = 0$$

qui fournit l'intégrale première suivante :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = cste$$

Cette relation, à un coefficient positif près, ne traduit rien d'autre que la conservation de l'énergie de l'oscillateur harmonique. C'est l'équation cartésienne d'une ellipse. Ainsi, une ellipse de l'espace de phase est une courbe d'iso-énergie. L'ensemble des trajectoires de phase constitue le **portrait de phase** de l'oscillateur.

2. Espace muni des coordonnées  $(x, \dot{x})$ .

Analysons de plus près le portrait de phase de l'oscillateur harmonique. Celui-ci est constitué d'un réseau d'ellipses concentriques<sup>3</sup>. Ceci nous indique que le phénomène étudié est périodique. Ajoutons que la période des oscillations est indépendante de l'amplitude<sup>4</sup>.

Les invariances identifiées plus haut se traduisent par des propriétés particulières des trajectoires de phase. Nous avons indiqué que leur sens de parcours correspond à celui pour lequel le temps est croissant. Si le sens de parcours est inversé, rien ne change globalement. L'invariance par dilatation se traduit par l'existence du réseau d'ellipses formant le portrait de phase.

Ces remarques montrent que le portrait de phase, riche d'informations, est un instrument dont l'intérêt scientifique et pédagogique sont indéniables.

### *L'oscillateur amorti*

Dans la nature, il n'existe aucun système physique dont l'évolution puisse être modélisée par l'équation (1). Les oscillations finissent toujours par s'amortir. C'est pourquoi il est nécessaire de la modifier au profit d'une autre qui rende compte de ces amortissements.

Traditionnellement, une force de la forme  $-kv$ , s'appuyant sur des résultats d'observations, est introduite. Une petite analyse de cette expression peut nous permettre d'en justifier en partie la forme et la pertinence.

Nous avons vu que l'équation (1) présente une invariance par renversement du temps et décrit par conséquent un phénomène dynamique réversible. Si à présent nous voulons modéliser le comportement d'un oscillateur amorti, l'équation du mouvement recherché doit nécessairement ne plus satisfaire cette invariance. L'équation (1) peut être modifiée en ajoutant un terme brisant l'invariance par renversement du temps. La quantité la plus simple qui réponde à cette exigence est de la forme  $dx/dt$ . Nous pouvons proposer l'équation dynamique suivante :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (2)$$

ou  $\xi$  est un coefficient de signe, *a priori*, quelconque<sup>5</sup>.

3. Correspondant à différentes valeurs de l'énergie.

4. On parle de l'isochronisme des oscillations.

5. Nous pouvons écrire l'équation en n'introduisant qu'un coefficient  $\lambda$  à la place de  $2\xi\omega$ . L'intérêt de notre choix est que  $\xi$  est sans dimension, et que la résolution de l'équation le fait naturellement apparaître.

### *Quelques propriétés de l'oscillateur amorti*

L'équation (2) est encore invariante par dilatation mais n'est plus invariante par renversement du temps. Elle décrit donc un phénomène irréversible. Cette **irréversibilité** due à la présence du terme en  $\dot{x}$  est étroitement liée à une **dissipation d'énergie**. En effet, nous pouvons déduire de (2) l'expression :

$$\frac{de}{dt} = - 2 \xi \omega \dot{x}^2 \quad (3)$$

avec :

$$e = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x}{2} \right)$$

L'équation (3) nous précise que le sens de variation de l'énergie dépend directement du signe du coefficient  $\xi$  :

- si  $\xi > 0$ , l'énergie décroît inéluctablement vers 0,
- si  $\xi < 0$ , l'énergie croît.

Dans ce dernier cas, la croissance de l'énergie ne pouvant s'opérer indéfiniment, le système ainsi décrit n'est pas physique. En revanche, le premier cas est celui que l'on retrouve dans l'étude traditionnelle de l'oscillateur amorti. Notons que pour  $\xi = 0$ , nous retrouvons notre oscillateur harmonique, système conservatif.

La conséquence de cette discussion est qu'**irréversibilité des phénomènes physiques et dissipation de l'énergie sont des notions étroitement liées**. Ce résultat est général et fondamental en physique.

### *Portrait de phase de l'oscillateur amorti*

Les solutions de l'équation (2) dépendent du signe de  $\xi$  (oscillateur amorti ou amplifié) et du signe de  $\xi^2 - 1$ .

Si l'on se place dans une situation de faible amortissement ( $\xi^2 - 1 < 0$ ), les solutions obtenues sont de la forme :

$$x(t) = X_0 e^{-\xi \omega t} \sin (\Omega t + \phi)$$

avec :

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Nous pouvons facilement calculer  $\dot{x}(t)$  puis tracer le portrait de phase de l'oscillateur. Un ordinateur se révèle être un outil puissant et particulièrement utile pour effectuer ce travail. Les résultats obtenus sont les suivants (voir figures 3 à 6):

- si  $\xi > 0$ , il y a amortissement :

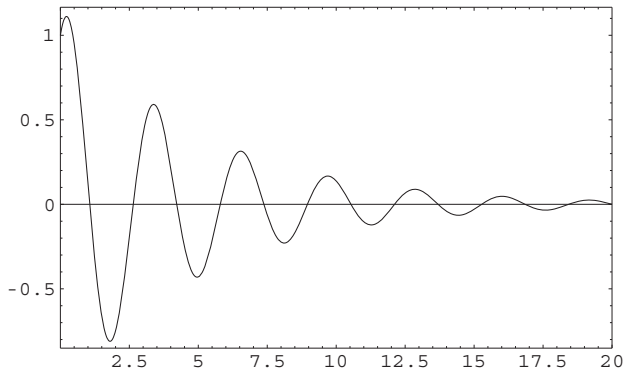


Figure 3

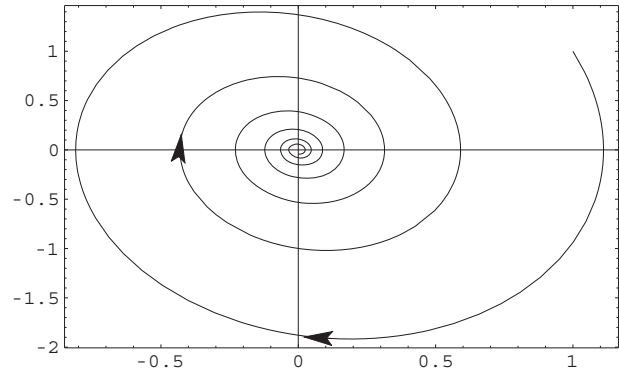


Figure 4

- si  $\xi < 0$ , il y a amplification :

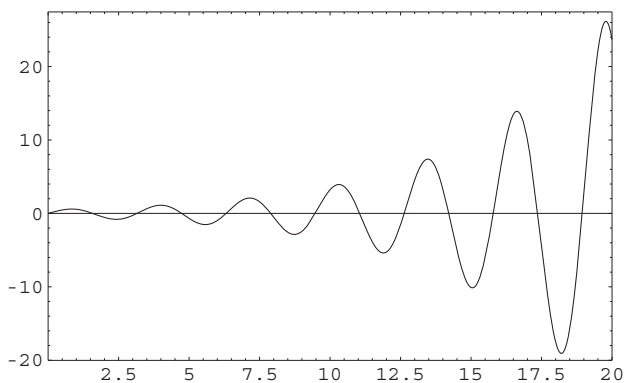


Figure 5

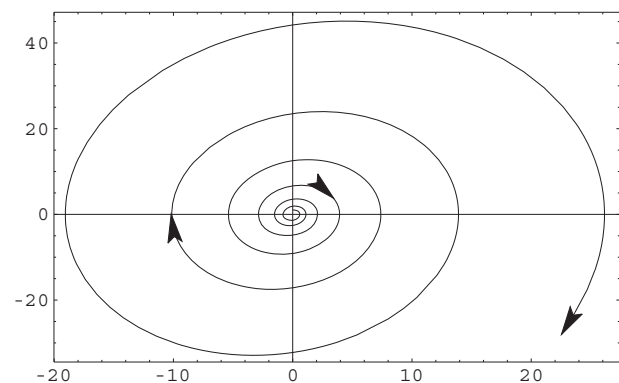


Figure 6

Les courbes de l'espace de phase<sup>6</sup> ne sont plus des courbes fermées mais des spirales. Ceci nous permet immédiatement de conclure que les oscillations ne sont plus périodiques<sup>7</sup>. D'autre part, l'irréversibilité est clairement présente puisque parcourir une spirale dans un sens n'est pas identique à la parcourir dans l'autre sens.

6. Une seule de ces courbes apparaît ci-dessus.

7. Dans notre cas, elles sont pseudo-périodiques.

Ajoutons que l'origine de l'espace de phase est un point d'équilibre. Toutefois, s'il est stable pour  $\xi > 0$ , il est instable pour  $\xi < 0$ . Dans le premier cas, le point d'équilibre porte le nom d'**attracteur**<sup>8</sup>.

### ... À VAN DER POL

#### *L'oscillateur auto-entretenu de Van der Pol*

Il s'agit à présent de trouver un modèle pour décrire le comportement d'un oscillateur plus réaliste. Ce modèle doit rendre compte d'oscillations d'amplitude bien déterminée, caractéristique de l'oscillateur. En raison de son invariance par dilatation, l'équation (2) ne convient pas. Il est donc nécessaire de briser cette invariance due à la linéarité de l'équation. C'est pourquoi l'équation recherchée doit nécessairement être non-linéaire.

Pour trouver cette équation, on peut s'inspirer de l'équation (2). Nous avons vu que celle-ci pouvait décrire des oscillations amorties ou amplifiées selon le signe de  $\xi$ . Si on choisit un coefficient non plus constant mais de signe variable quand l'amplitude des oscillations varie, il doit être possible d'entretenir les oscillations : pour de faibles amplitudes,  $\xi$  serait négatif pour les augmenter alors que pour de fortes amplitudes,  $\xi$  serait positif pour les diminuer. Un choix possible est le suivant :

$$\xi = -\xi_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right]$$

et l'équation dynamique de l'oscillateur est :

$$\ddot{x} - \xi_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

appelée **équation de Van der Pol**.

Il est possible de lui donner une autre forme en introduisant des variables adimensionnées :

$$x \rightarrow \frac{x}{x_0} \sqrt{\xi_0} \qquad t \rightarrow \omega t$$

$$\text{D'où la forme :} \qquad \ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + x = 0 \qquad (4)$$

avec :  $\varepsilon = \xi_0$ .

8. Vocabulaire très utilisé dans l'étude des systèmes dynamiques et du chaos.

### *Quelques propriétés de l'oscillateur de Van der Pol*

L'équation (3) n'est ni invariante par renversement du temps ni invariante par dilatation. Nous voyons ainsi pourquoi il était important de souligner ces invariances dans l'étude de l'oscillateur harmonique. En brisant chacune d'entre elles l'une après l'autre, nous avons pu construire le modèle de l'oscillateur de Van der Pol. Il nous reste à vérifier qu'il s'agit effectivement d'un oscillateur **auto-entretenu**. Un calcul énergétique montre que l'équation (3) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{de}{dt} = (\varepsilon - x^2) \dot{x}^2$$

avec :

$$e = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

En intégrant cette équation sur une période, on obtient :

$$\int dt (\varepsilon - x^2) \dot{x}^2 = 0$$

relation qui exprime la compensation sur une période des phases d'amortissement et des phases d'amplification (la production d'énergie en  $\varepsilon \dot{x}^2$  compense la dissipation en  $x^2 \dot{x}^2$ ).

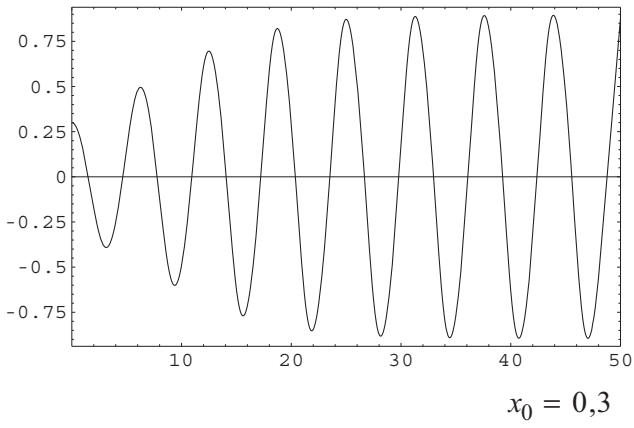
### *Portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol*

Il n'existe pas de solution analytique de Van der Pol. On peut trouver une solution perturbatrice mais seule une approche numérique permet de visualiser la dépendance temporelle et d'établir le portrait de phase de l'oscillateur. Les résultats graphiques donnés ci-dessous (voir figures 7 et 8) ont été obtenus avec un logiciel de calcul formel<sup>9</sup>. Nous donnons, pour des valeurs croissantes de  $\varepsilon$ , le portrait de phase pour différentes conditions initiales, et les variations temporelles de  $x$  associées.

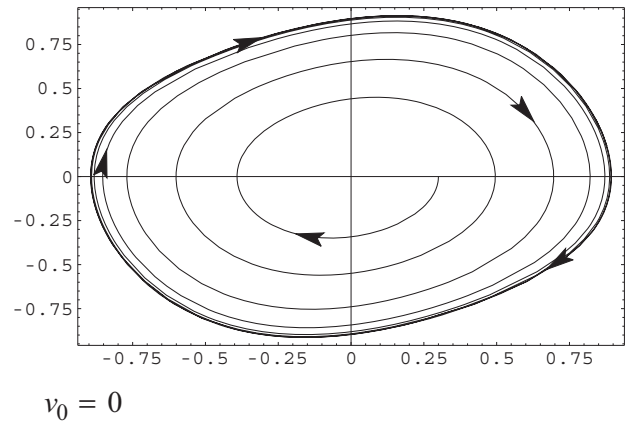
9. Maple ou Mathematica peuvent être utilisés. Les graphiques publiés dans cet article ont été obtenus avec ce dernier.



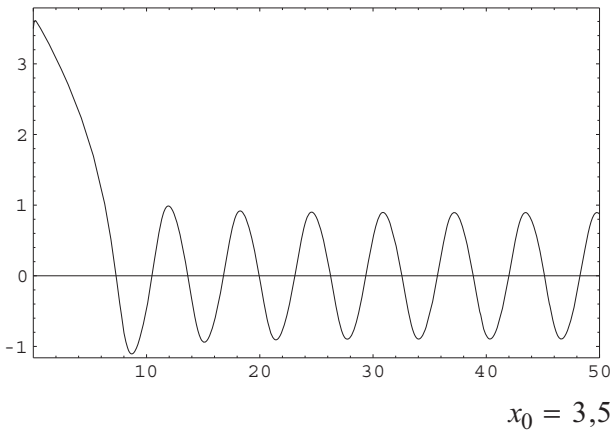
•  $\varepsilon = 0,2$  :



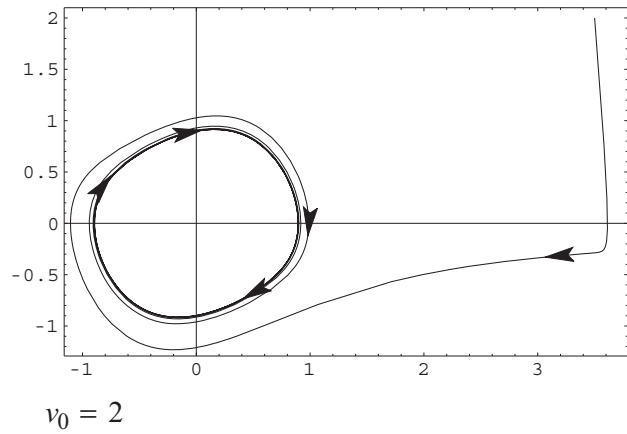
**Figure 7**



**Figure 8**

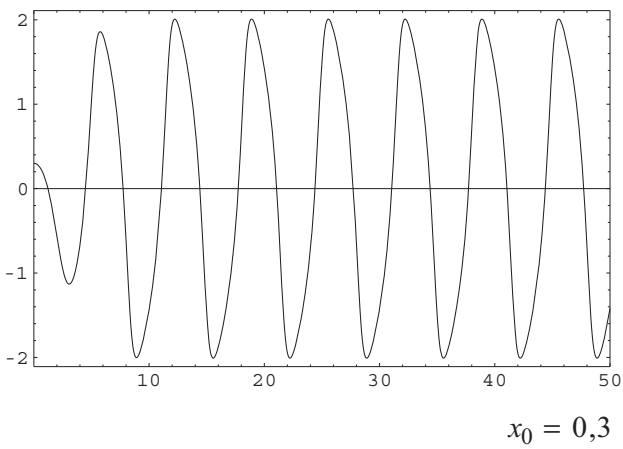


**Figure 9**

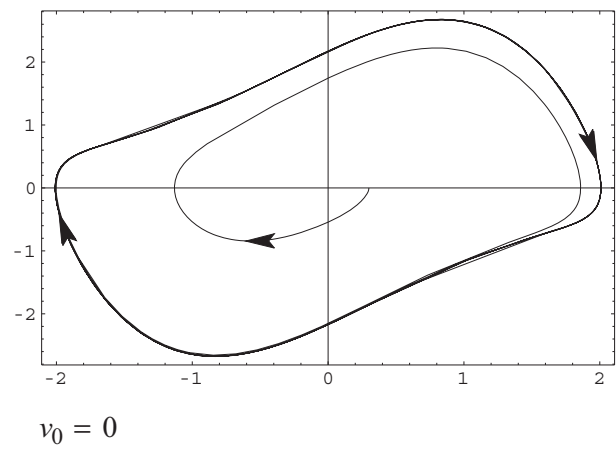


**Figure 10**

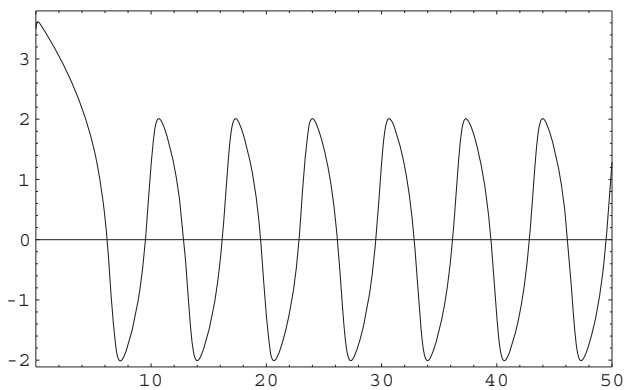
•  $\varepsilon = 1$  :



**Figure 11**

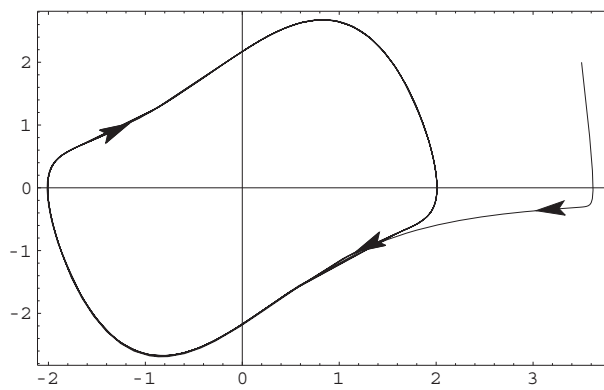


**Figure 12**



$x_0 = 3,5$

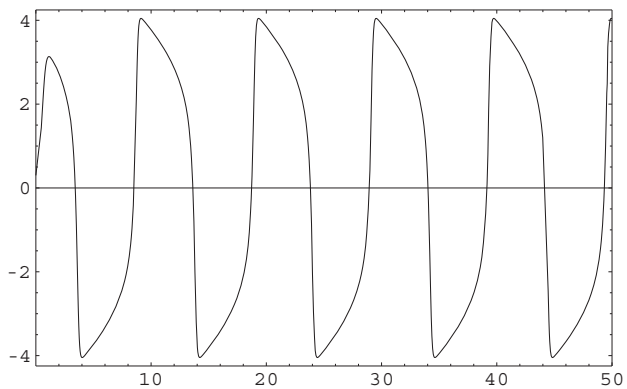
**Figure 13**



$v_0 = 2$

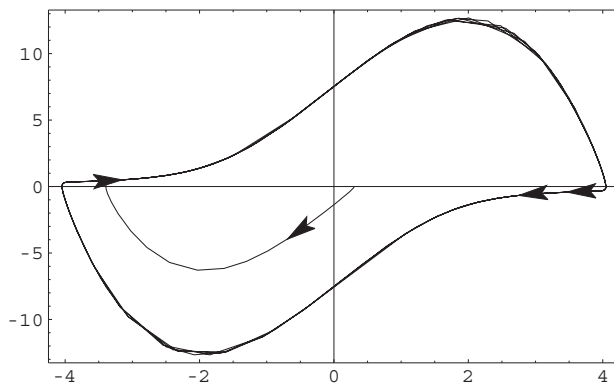
**Figure 14**

•  $\varepsilon = 4$  :



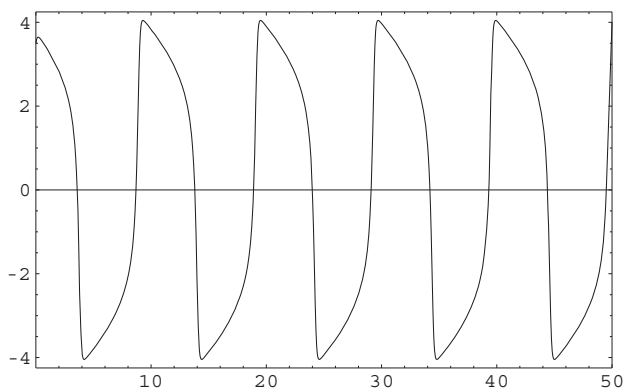
$x_0 = 0,3$

**Figure 15**



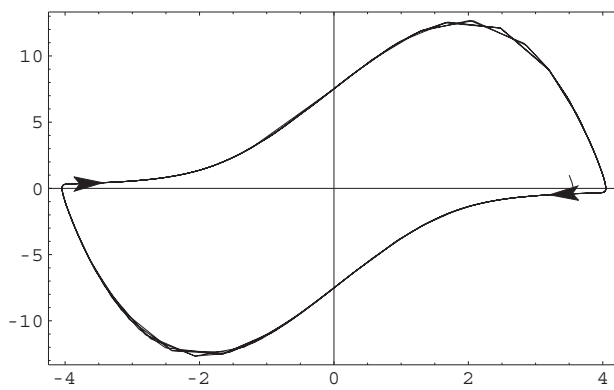
$v_0 = 0$

**Figure 16**



$x_0 = 3,5$

**Figure 17**



$v_0 = 1$

**Figure 18**

A la vue de ces graphiques, on observe effectivement un comportement oscillatoire, fortement dépendant de  $\varepsilon$ . Les trajectoires de l'espace de phase ne sont ni des ellipses ni des spirales, mais des courbes qui convergent vers une courbe limite fermée. Celle-ci porte le nom de **cycle limite**. Il s'agit encore d'un attracteur. Ce cycle limite, de forme quasi-elliptique pour  $\varepsilon$  petit, se déforme dès que  $\varepsilon$  augmente. Ainsi, plus la non-linéarité devient importante, plus le cycle limite se déforme.

Toutefois, l'existence d'un tel cycle limite, i.e. d'une courbe fermée, nous indique que l'oscillateur a un comportement périodique pour les grands temps  $t \rightarrow \infty$ . Sachant que toute fonction périodique admet un développement en série de Fourier, on a alors :

$$x(t) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

pour  $t$  tendant vers l'infini.

D'autre part, la présence de ce cycle limite nous indique que l'amplitude des oscillations n'est pas quelconque. C'est effectivement ce que confirme l'observation des graphiques temporels de  $x$ . Pour les premiers instants, le système dépend de conditions initiales, puis rapidement, il tend vers une solution périodique d'amplitude bien déterminée, indépendante des conditions initiales. L'amplitude des oscillations est une caractéristique intrinsèque de l'oscillateur.

Ces graphiques nous permettent également de nous rendre compte de la non-linéarité du comportement<sup>10</sup>. La dépendance temporelle est de type oscillations sinusoïdales pour  $\varepsilon$  petit alors qu'elle est de type oscillations de relaxation pour  $\varepsilon$  grand.

## CONCLUSION

Au terme de cet exposé, il nous semble intéressant de mettre l'accent sur l'intérêt pédagogique des oscillateurs non-linéaires en classe de terminale S ou en classes préparatoires. L'oscillateur de Van der Pol, et bien d'autres encore comme l'oscillateur paramétrique<sup>11</sup>, constituent des illustrations plus réalistes de certains phénomènes physiques. Comme nous l'avons déjà souligné, l'utilisation du portrait de phase nous semble envisageable dès la terminale S. L'outil informatique est aussi très précieux. Les élèves, très sensibles à ce type d'approche, sont souvent plus motivés, plus dynamiques. Un «savant mélange de tous ces ingrédients» constitue peut-être là un moyen de développer un esprit scientifique plus intuitif que calculatoire...

10. Bien que le portrait de phase soit un outil plus performant.

11. Qui modélise le mouvement d'une balançoire... avec une personne dessus.

Pourquoi alors ne pas saisir l'occasion qui nous est offerte de discuter plus en profondeur du déterminisme en physique, des phénomènes dissipatifs, du rôle joué par les conditions initiales ? Cela permet non seulement de prendre du recul par rapport à la physique du programme, mais aussi d'aborder le thème du chaos, sujet actuel d'intenses recherches. Ce dernier peut être simplement introduit comme caractérisant un système physique déterministe dont le comportement à long terme n'est plus prévisible et dépend de façon sensible des conditions initiales. Les termes d'attracteur étrange, et pourquoi pas de fractal, peuvent être « lâchés ». L'illustration peut venir de la météorologie. La question de l'impossibilité de prévoir le temps à moyen ou long terme peut recevoir une réponse partielle. Enfin, la sensibilité aux conditions initiales peut expliquer ce qu'Edward LORENZ a poétiquement appelé l'effet papillon.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. GIÉ et J.-P. SARMANT : «*Le portrait de phase des oscillateurs*» - BUP n° 744, mai 1992, pp. 719-755.
- [2] J.-M. VIGOUREUX : «*Introduction à l'étude des systèmes non-linéaires*» - BUP n° 722, mars 1990, pp. 331-352 - «*Introduction à l'étude des systèmes non-linéaires - 2. Le chaos et l'approche du chaos*» - BUP n° 724, mai 1990, pp. 581-616.
- [3] Une possible première approche de l'oscillateur de Van der Pol - Sujet concours École Centrale Paris P', 1986.
- [4] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL : «*L'ordre dans le chaos*» - Hermann. Un livre très complet sur la physique des systèmes dynamiques et de la turbulence, les oscillateurs étant largement étudiés.
- [5] «*L'ordre du chaos*» - Bibliothèque pour la science, diffusion Belin. Un excellent livre qui propose une approche simple des portraits de phase, de la physique de la matière condensée, du chaos et bien d'autres thèmes encore où les oscillateurs interviennent.