Les théorèmes de Noether

Née à Erlangen (Bavière) le 23 mars 1882
Décédée à Bryn Mawr (Pennsylvanie) le 14 avril 1935

par **Gérard SERRA**
13007 Marseille
serra.gerard@numericable.fr

RÉSUMÉ

La biographie montre que les travaux d'Emmy NOETHER concernent essentiellement l'algèbre et la topologie, mais sa collaboration à la diffusion de la théorie de la relativité généralisée, lui a fait découvrir trois théorèmes qui ne peuvent laisser les physiciens indifférents. L'annexe utilise la mécanique analytique pour les démontrer. On peut pour le premier, en donner l'application dans le cadre de la mécanique de terminale S.

BIOGRAPHIE

Les biographes d'Emmy NOETHER, ne sont pas très courtois : « trop grosse, enthousiaste, têtue, désordonnée, sans élégance et sans complexe » [4]. Ce qui rendait EINSTEIN plutôt sympathique, desservait Emmy NOETHER malgré leurs origines communes. Ses origines la conduisirent, elle aussi, à fuir son pays pour émigrer aux États-Unis en 1933. Elle y décéda deux ans plus tard.

Emmy NOETHER, vers 1908.

Son père, Max NOETHER, était mathématicien, professeur à l'université d'Erlangen, n'obtint sa titularisation que treize ans plus tard à cause des préjugés contre les juifs. Le frère d'Emmy, Fritz NOETHER, travaillant longtemps avec elle, soutint une thèse en mécanique rationnelle. Après de brillantes études secondaires à Erlangen, Emmy NOETHER ayant obtenu en 1900 un certificat d'enseignement pour les langues dans les lycées de jeunes filles, décida cependant à dix-huit ans, d'entreprendre tout naturellement des études universitaires en mathématiques.

Elle suivit les cours à l'Université de Göttingen à partir de 1903, sans pouvoir s'y inscrire officiellement, car la Prusse, par un décret de 1908, fermait ses portes aux femmes. Après trois ans d'études à Erlangen et Göttingen, elle revint à Erlangen en 1904, et y soutint une thèse en 1908 sous la direction de Paul GORDAN portant sur les invariants algébriques. Ne pouvant enseigner à l'Université, elle aidait son père et poursuivit ses propres travaux.

Son professeur, Alfred CLEBSCH, fondateur de la géométrie algébrique, développa la théorie des invariants et en collaboration avec son élève Paul GORDAN, découvrit les coefficients qui portent leur nom, jouant un rôle important en physique mathématique. Un autre élève d'Alfred CLEBSCH deviendra célèbre : Félix KLEIN.

Après son doctorat, Emmy NOETHER travailla quelques années sans poste à Erlangen. Ses travaux furent encouragés par le mathématicien Ernst FISCHER, elle mit en application les travaux de David HILBERT à l'algèbre et à la physique, qui furent remarqués par l'Association des mathématiciens allemands. Quatre ans plus tard, elle aborda l'étude des relations entre l'algèbre abstraite et la théorie des nombres, publiée dans les *Annales des mathématiques*, en 1915 ; HILBERT la proposa pour qu'elle fût nommée professeur d'université. Sa candidature fut quand même rejetée à cause du décret de 1908. KLEIN, alors retraité recommanda Emmy NOETHER par une lettre au ministre de la Culture : *« Mademoiselle NOETHER répond tout à fait aux conditions qu'il faut remplir pour être nommée professeur d'université et surpasse la valeur moyenne des candidats »*. Nouvel échec en 1917, qui exaspérera HILBERT au point de dire : *« Messieurs, nous sommes dans une université, pas dans un établissement de bain public ! »* (à l'époque, on y séparait les hommes des femmes).

En 1915, Albert EINSTEIN publia la théorie de la relativité généralisée pour laquelle les physiciens furent moins enthousiastes que les mathématiciens qui étaient déjà familiarisés avec les courbures d'espace des géométries non euclidiennes. David HILBERT et Félix KLEIN organisèrent des cours et des conférences sur cette nouvelle théorie, dans les années 1916 et 1917. Ils soulignèrent la contribution d'Emmy NOETHER qui permit la compréhension de ce monument. C'est à cette occasion qu'elle publia un article remarquable intitulé « Invariante Variationprobleme » dans lequel elle mit en évidence la relation entre les propriétés de l'espace et du temps et les lois de conservation en mécanique, sous forme de théorèmes.

Félix KLEIN en fit la présentation à la Société des Sciences de Göttingen, lors d'une réunion en 1918. À la lecture de cet article, Albert EINSTEIN communiqua à Félix KLEIN son indignation devant l'injustice qui privait Emmy NOETHER d'un poste d'enseignement. Ces résultats, établis par Emmy NOETHER, juste après son arrivée à Göttingen, furent qualifiés par EINSTEIN de **« Monument de la pensée mathématique »**. C'est maintenant l'un des piliers de la physique théorique.

Enfin, en mai 1919, le nouveau ministère des Sciences de l'Art et de l'Éducation de la République de Weimar, reconnut comme thèse d'habilitation son article où étaient énoncés les fameux théorèmes et lui accorda l'« autorisation » d'enseigner à l'Université. Mais ce ne fut, qu'en 1920 que les femmes obtinrent le même droit.

Cette autorisation ne lui permit d'être nommée qu'en 1922, que professeur non titulaire sans chaire… et sans salaire ! Il lui fallut attendre encore un an pour obtenir une

Emmy NOETHER
vers 1933.

faible rémunération correspondant à un contrat d'enseignement d'algèbre. Ses communications, à l'Association des Mathématiciens de Göttingen, concernèrent les « invariants algébriques et différentiels » et furent très appréciées de ses collègues. Au congrès international de mathématiques de Bologne (1928), elle communiqua ses nouveaux travaux sur les « grandeurs hypercomplexes » et pour le congrès suivant à Zurich (1932) elle fut invitée à donner une conférence plénière sur le même sujet. Sa notoriété, due à ses travaux et à son enseignement lui ouvrit les frontières ; elle eut deux postes de professeur associé à Moscou (1928 et 1929). Ses élèves ne furent plus limités aux étudiants allemands, car on en trouve en France, en Russie, au Japon et aux États-Unis, ce sont les « Noether's Boys » qui appréciaient autant sa science que sa bonté et même son hospitalité. Parmi eux, il y aura de nombreux docteurs et enseignants initiant la deuxième génération de ses disciples.

Malheureusement, les nazis prirent le pouvoir et en 1933 elle fut chassée de son poste malgré la protestation de ses élèves. Elle émigra aux États-Unis, obtenant un poste de professeur au Women's College de Bryn Mawr, Pennsylvany. Poursuivant ses recherches sans pouvoir les publier, elle continuera à correspondre avec ses collègues, ses élèves allemands et de diverses nationalités. Elle obtint des heures de cours à l'Institute for Advanced Study de Princeton, New Jersey (qui avait déjà accueilli Hermann WEIL et Albert EINSTEIN) et devait faire la navette entre les deux établissements. Mais à la suite d'une intervention chirurgicale, elle décéda 14 avril 1935, saluée avec une très grande admiration par ses pairs.

LES THÉORÈMES DE NOETHER

Les lois de la physique, pour rester invariantes, doivent s'exprimer dans des référentiels galiléens qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- *Le temps y est uniforme :* un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, à une autre époque. Une translation dans le temps montre qu'il n'y a pas d'origine absolue pour le temps.
- *L'espace est homogène :* un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, en un autre lieu. Une translation dans l'espace montre qu'il n'y a pas d'origine absolue de l'espace.
- *L'espace est isotrope :* un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, en l'orientant dans une autre direction. Une rotation dans l'espace montre qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans l'espace.

Les conséquences de ces trois propriétés sont respectivement :

- *Conservation de l'énergie :* les différentes parties d'un système isolé peuvent échanger entre elles de l'énergie, mais l'énergie de tout ce système est constante.

- *Conservation de la quantité de mouvement :* les différentes parties d'un système isolé peuvent modifier leurs quantités de mouvement respectives, mais la quantité de mouvement de tout ce système est constante.
- *Conservation du moment cinétique :* les différentes parties d'un système isolé peuvent modifier leurs moments cinétiques respectifs, mais le moment cinétique de tout ce système est constant.

Pour démontrer ces trois théorèmes, il faut utiliser la mécanique analytique comme le montre l'annexe. Cependant, sur un exemple simple de mécanique du point, on peut appliquer le premier théorème. Considérons un point matériel soumis à une force constante. Dans un référentiel galiléen, on peut lui appliquer la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}(\vec{p})$$

ou encore, calculer le travail élémentaire de cette force pour un déplacement élémentaire :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) \cdot \vec{v}\ \delta t\ .$$

Pour un point matériel, la masse étant constante,

$$\delta W = m\,\frac{d}{dt}(\vec{v}) \cdot \vec{v}\ \delta t$$

on peut réécrire la dérivée par rapport au temps :

$$\delta W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)\delta t\ .$$

Toutes ces grandeurs sont calculées dans le voisinage immédiat de l'instant t. C'est alors que l'uniformité du temps des référentiels galiléens permet d'étendre cette relation à un intervalle de temps depuis ti jusqu'à tf :

$$W_{ti}^{tf} = \frac{1}{2}\,m\,[v(tf)]^2 - \frac{1}{2}\,m\,[v(ti)]^2 = E_{cin}(tf) - E_{cin}(ti)$$

Cette relation traduit le **théorème de l'énergie cinétique**. On peut encore remarquer que le travail de la force constitue l'énergie potentielle du point matériel :

$$W_{ti}^{tf} = E_{pot}(ti) - E_{pot}(tf)$$

Entre les instants ti et tf, on obtient :

$$E_{pot}(ti) + E_{cin}(ti) = E_{pot}(tf) + E_{cin}(tf)$$

relation qui traduit la **conservation de l'énergie mécanique**.

CONCLUSION

La vie d'Emmy NOETHER est un exemple remarquable de travail, de courage et d'abnégation que seule une vive intelligence peut expliquer.

J'ai souvent évoqué ces théorèmes de Noether, car leur simplicité associée à une portée aussi fondamentale pour la physique, me fascinait. Je dois avouer que j'ai longtemps pensé qu'ils étaient dus à « Monsieur » NOETHER… jusqu'au jour où lisant l'article donné en référence [1], j'ai réalisé mon erreur. Cet article est une sorte de repentance…

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] « Les génies de la science ». *Pour la science*, 2005, n° 22.

[2] Tous les bons ouvrages de mécanique analytique, en particulier *Mécanique* de LANDAU et LIFCHITZ aux Éditions de Moscou.

[3] Nombreux articles de l'*Encyclopaedia Universalis*.

[4] WITKOWSKI N. *Trop belles pour le Nobel*. Éditions du Seuil.

[5] Internet fournit un très grand nombre de textes sur Emmy NOETHER.
Il suffit de taper NOETHER dans un moteur de recherche pour avoir des textes en français, en anglais ou en allemand. La traduction doit toujours être relue pour y apporter quelques corrections.

Annexe

par **Gérard SERRA**
13007 Marseille
serra.gerard@numericable.fr
et **Marc MÉNÉTRIER**
Lycée Thiers - 13001 Marseille
mmenet@club-internet.fr

Nous considérons un système **S** de N points matériels. Chacun est repéré dans l'espace par trois coordonnées (coordonnées cartésiennes, coordonnées sphériques ou autres), dépendantes du temps. Le nombre de degrés de liberté de **S** est égal au nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire complètement la position des N points de **S**. Il est au plus égal à 3N et est inférieur à 3N, lorsque ces points sont liés entre eux par des contraintes géométriques :

- Un point contraint à se déplacer le long d'une ligne, possède un seul degré de liberté. Sa position peut être repérée par son abscisse curviligne.
- Un système solide (c'est-à-dire rigide) de N points matériels (N > = 3), possède au plus six degrés de liberté. Sa position peut être repérée par trois coordonnées de l'un des points et trois angles décrivant la rotation du solide autour de ce point.

Si p est le nombre de degrés de liberté du système **S**, nous appelons *coordonnées généralisées*, les p grandeurs permettant de décrire la position de **S** :

$$q_1, q_2, \ldots q_p$$

L'état à l'instant t de S est complètement déterminé par la donnée des p *coordonnées généralisées* et de leurs p dérivées par rapport au temps, appelées *vitesses généralisées* (dérivation désignée par un point placé au dessus de la grandeur considérée) :

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_p$$

La connaissance infiniment précise de l'état du système à l'instant t et des actions qui s'exercent sur les particules qui le composent, doivent permettre, en théorie, de déterminer l'état du système à tout instant. Nous nous intéressons ici plus précisément au système de N particules, sans structure interne, étudié à l'échelon **microscopique**. Cette restriction exclut de notre étude, les actions qui n'ont de sens qu'au niveau macroscopique, comme les frottements. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que le nombre de degrés de liberté est égal à 3N (ce qui exclut des liaisons parfaitement rigides entre deux de ces points).

LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION ET LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Pour un tel système nous postulons que :

- L'évolution du système **S** est déterminée par sa *fonction de Lagrange L*, dépendante des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps. Pour p degrés de liberté :

$$L(q_1, q_2, \dots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_p, t)$$

Cette fonction de Lagrange doit donc contenir toutes les informations, concernant les actions subies par les éléments de **S**.

- La formulation la plus générale de la loi du mouvement de **S**, est fournie par le principe de moindre action de Hamilton, qui met en jeu la fonction de Lagrange :

$$A = \int_{t_a}^{t_b} L(q_1, q_2, \dots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_p, t)\, dt$$

Entre deux instants t_a et t_b, pour lesquels les positions de S, représentées par les coordonnées généralisées $q_i(t_a)$ et $q_i(t_b)$ sont déterminées, l'évolution de S est telle que son *action A* est un extremum, (généralement un minimum).

Le calcul des variations nous permet d'en déduire p équations couplées, appelées *équation de Lagrange*. Nous pouvons ici esquisser une démonstration qui ne prétend pas à une parfaite rigueur mathématique. Considérons entre les positions a et b, parfaitement déterminées, un chemin défini par :

$$q_1(t), q_2(t), \dots q_p(t)$$

Considérons maintenant entre ces deux positions et ces deux instants, un chemin infiniment voisin, défini par :

$$q_1(t) + \delta q_1(t), q_2(t) + \delta q_2(t), \dots q_p(t) + \delta q_p(t)$$

La variation infinitésimale des coordonnées généralisées, entraîne une variation infinitésimale des vitesses généralisées et l'action A devient :

$$A + \delta A = \int_{t_a}^{t_b} L(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots q_p + \delta q_p, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \dot{q}_2 + \delta\dot{q}_2, \dots \dot{q}_p + \delta\dot{q}_p, t)\, dt$$

et la variation de l'action qui en résulte s'écrit :

$$\delta A = \int_{t_a}^{t_b} \begin{bmatrix} L(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots q_p + \delta q_p, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \dot{q}_2 + \delta\dot{q}_2, \dots \dot{q}_p + \delta\dot{q}_p, t) \\ - L(q_1, q_2, \dots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_p, t) \end{bmatrix} dt$$

En remarquant que : $\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$ la différence infinitésimale δA peut s'écrire :

$$\delta A = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\dot{q}_i \right) dt$$

L'intégration par partie du second terme conduit à :

$$\delta A = \sum_i \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta q_i \right|_{t_b}^{t_a} + \sum_i \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \partial q_i dt$$

Les positions a et b étant déterminées, les δq_i sont nuls en t_a et t_b et de ce fait, le premier terme de δA est nul. A est extrémale (vis-à-vis des chemins voisins), si $\delta A = 0$, soit si :

$$\sum_i \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \partial q_i dt = 0$$

Pour que cette variation soit nulle pour **toute** variation infinitésimale de **tous** les q_i, il faut que la parenthèse soit nulle pour les p intégrales de la somme.

On obtient alors les p ***équations de Lagrange*** :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

pour $i = 1, 2, \ldots p$.

EXPRESSION DU LAGRANGIEN D'UN SYSTÈME ISOLÉ

Notons tout d'abord que l'expression du lagrangien d'un système n'est pas unique. En effet, *f* étant une fonction des coordonnées généralisées et du temps, on vérifie que la fonction :

$$L_1 = L + \frac{df}{dt}$$

satisfait à la condition d'extremum et fournit des équations de Lagrange identiques à celles données par *L*.

L'expression du lagrangien doit traduire les principes de bases de la mécanique classique :

- Existence de référentiels, appelés *référentiels galiléens*, pour lesquels l'espace est homogène et isotrope et le temps doit être uniforme.
- Les lois de la mécanique doivent avoir la même forme dans tous les référentiels galiléens, en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Ces considérations amènent à poser que pour un ensemble **isolé** de N particules **microscopiques**, dont les positions dans un référentiel galiléen sont repérées par les coordonnées généralisées, le lagrangien est de la forme :

$$L(q_1, q_2, \ldots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i v_i^2 - U(q_1, q_2, \ldots q_p)$$

La fonction U qui ne dépend que des positions **relatives** des particules de **S**, est appelée ***énergie potentielle***. Elle contient toutes les informations concernant les interactions entre particules. Le terme qui la précède, en notant v_i la vitesse au sens usuel :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} m_i v_i^2$$

est appelé ***énergie cinétique***. Pour un système de coordonnées généralisées, il se met nécessairement sous la forme :

$$T(q_1, q_2, \ldots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_p) = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, q_2, \ldots q_p)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

T est donc une fonction homogène de degré 2 des vitesses généralisées, ce qui d'après la relation d'Euler, implique :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

car U ne dépend pas des vitesses généralisées.

On peut vérifier que cette forme du lagrangien est conforme aux principes de bases de la mécanique classique :

- *Uniformité du temps :* placé dans des conditions initiales identiques, un système **isolé** aura la même évolution quelque soit la date initiale. Il s'en suit que son lagrangien ne doit pas dépendre explicitement du temps, ce qui justifie la forme :

$$L(q_1, q_2, \ldots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_p)$$

- *Homogénéité et isotropie de l'espace :* le lagrangien d'une particule isolée ne doit pas dépendre de sa position et ne doit dépendre que de la norme de la vitesse. Le lagrangien étant donc de la forme $L(v^2)$, les équations de Lagrange impliquent immédiatement que les composantes cartésiennes du vecteur vitesse soient constantes : c'est la loi de l'inertie.
- *Principe de relativité de Galilée :* le lagrangien doit garder la même forme dans un changement de référentiel galiléen. Notons

$$r_1, r_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$$

Les vecteurs positions et vitesses d'une particule isolée dans deux référentiels galiléens R_1 et R_2 et V_e la vitesse d'entraînement de R_2 par rapport à R_1. On peut écrire dans R_1 :

$$L = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\vec{v}_2 + \vec{V}_e\right)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{df}{dt}$$

avec
$$f(t) = \frac{1}{2}m\vec{V}_e^2 \cdot t + m\vec{V}_e \cdot \vec{r}_2$$

Comme on peut ajouter au lagrangien la dérivée par rapport au temps d'une fonction des coordonnées généralisées et du temps, on peut aussi bien écrire :

$$L = \frac{1}{2} m v_2^2$$

- *Réversibilité :* le lagrangien d'un système isolé de N particules est invariant par le changement de t en $-t$ (rappelons que nous étudions à l'échelon microscopique de particules, sans structure interne).

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE D'UN SYSTÈME ISOLÉ

Le lagrangien d'un système microscopique isolé ne dépend pas explicitement du temps, on peut écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_i \right)$$

D'après les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Et donc : $$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}_i \right)$$

En regroupant les deux dérivées par rapport au temps, il apparaît :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \frac{d(2T - L)}{dt} = 0$$

On en déduit donc que la quantité $E = 2T - L = T + U$, appelée énergie du système, est constante.

L'énergie d'un système fermé est constante. Cette propriété est la conséquence de l'uniformité du temps dans un référentiel galiléen. C'est le premier théorème de Noether.

CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME ISOLÉ

L'homogénéité de l'espace dans un référentiel galiléen, implique que la fonction de Lagrange d'un système isolé est invariante lors d'une translation de l'ensemble de ce système. Envisageons une translation infinitésimale telle que les vecteurs positions des points matériels du système subissent tous la même translation :

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \delta\vec{r}$$

Dans un référentiel galiléen, repérons les positions des N particules de S par leur p = 3N coordonnées cartésiennes. La translation

$$\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$$

Entraîne la variation du lagrangien :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) \delta x + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right) \delta y + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial z_i}\right) \delta z$$

D'après les équations de Lagrange :

$$\delta L = \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \delta x + \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) \delta y + \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) \delta z$$

Cette variation doit être nulle pour tout δr ce qui implique trois relations :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = 0$$

et

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = 0$$

Or, comme

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - U\left(q_1, q_2, \ldots q_p\right)$$

Ces relations peuvent s'écrirent :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{x}_i = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{y}_i = 0$$

et

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{z}_i = 0$$

Ou encore en introduisant le vecteur *impulsion* ou *quantité de mouvement* du système S.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z = \vec{C}^{ste}$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé dans un référentiel galiléen est constant. Cette propriété est la conséquence de l'homogénéité de l'espace dans un référentiel galiléen. C'est le deuxième théorème de Noether.

CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME ISOLÉ

L'isotropie de l'espace dans un référentiel galiléen implique que la fonction de Lagrange soit invariante pour toute rotation d'ensemble d'un système isolé. Considérons donc une rotation infinitésimale d'axe (O, u) et d'angle $\delta\phi$. Les vecteurs position r_i des N particules, définis à partir de l'origine O, subissent une variation δr_i donnée par :

$$\delta \vec{r}_i = \delta\phi \, \vec{u} \times \vec{r}_i$$

Les vitesses sont également transformées par le même produit vectoriel :

$$\delta \vec{v}_i = \delta\phi \, \vec{u} \times \vec{v}_i$$

La variation de la fonction de Lagrange qui en résulte est alors :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\partial L}{\partial z_i}\right)\delta z_i + \sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right)\delta \dot{y}_i + \sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right)\delta \dot{z}_i$$

Or, d'après les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} m_i \dot{x}_i \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt}$$

On obtient donc :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\frac{d\dot{x}_i}{dt}\delta x_i + \frac{dx_i}{dt}\delta \dot{x}_i\right) + \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\frac{d\dot{y}_i}{dt}\delta y_i + \frac{dy_i}{dt}\delta \dot{y}_i\right) + \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\frac{d\dot{z}_i}{dt}\delta z_i + \frac{dz_i}{dt}\delta \dot{z}_i\right)$$

Expression que l'on peut écrire avec les vecteurs positions et vitesses :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\delta\vec{r}_i + \frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\delta\vec{v}_i\right) = \delta\phi \sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot(\vec{u}\times\vec{r}_i) + \frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}_i)\right)$$

En permutant les produits mixtes, on obtient :

$$\delta L = \delta\phi\vec{u}\cdot\sum_{i=1}^{i=N} m_i\left(\vec{r}_i\times\frac{d\vec{v}_i}{dt} + \vec{v}_i\times\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \delta\phi\vec{u}\cdot\frac{d\sum_{i=1}^{i=N} m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i}{dt}$$

Le lagrangien étant invariant pour cette rotation uniforme de **S** :

$$\delta L = \delta\phi\vec{u}\cdot\frac{d\sum_{i=1}^{i=N} m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i}{dt} = 0$$

Cette relation étant vérifiée pour tout $\delta\phi$ et pour tout vecteur u, on en déduit :

$$\frac{d\sum_{i=1}^{i=N} m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i}{dt} = 0$$

Le vecteur $$\vec{K} = \sum_{i=1}^{i=N}\vec{r}_i\times\vec{p}_i$$

appelé vecteur moment cinétique du système, est donc constant.

Le vecteur moment cinétique d'un système isolé dans un référentiel galiléen est constant. Cette propriété est la conséquence de l'isotropie de l'espace dans un référentiel galiléen. C'est le troisième théorème de Noether.

APPLICATION DU FORMALISME LAGRANGIEN AUX SYSTÈMES MACROSCOPIQUES

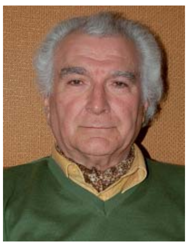
Un système macroscopique (un corps solide au sens usuel par exemple), est en général décrit par son état mécanique, représenté par un petit nombre m de coordonnées et son état thermodynamique, représenté par (3N-m) coordonnées, si N est le nombre de particules qui le constituent.

- Si l'on peut négliger tout couplage entre l'état mécanique et l'état thermodynamique, les m coordonnées mécaniques fournissent m équations de Lagrange indépendantes de l'état thermodynamique. En pratique cela se présente si l'on peut négliger les phénomènes dissipatifs (frottements) ou toute conversion d'énergie interne en énergie mécanique. On peut alors ne considérer que la partie macroscopique du lagrangien et poser, pour un système dont le lagrangien est indépendant du temps :

$$L = T_{méca} - U_{méca}$$

L'évolution de l'état mécanique est alors régie par les équations de Lagrange. En particulier, l'énergie mécanique $T_{méca} + U_{méca}$ se conserve pour un système isolé ou, plus généralement, pour un système dont le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

- Si les coordonnées mécaniques et thermodynamiques sont couplées, alors pour un système isolé, l'énergie mécanique macroscopique ne se conserve pas, mais l'énergie totale (énergie mécanique + énergie interne) se conserve : cet constitue le ***premier principe de la thermodynamique***.
- Les coordonnées qui définissent l'état thermodynamique sont définies dans le référentiel barycentrique du corps macroscopique. La quantité de mouvement qui leur est associée est donc nulle, et pour un système isolé, la quantité de mouvement associée aux seules coordonnées macroscopiques se conserve.
- Le moment cinétique total d'un système isolé se conserve. En toute rigueur, il faut tenir compte d'une éventuelle variation du moment cinétique associé aux particules microscopiques. Ce cas est peu fréquent (*cf*. expérience de EINSTEIN - DE HAAS) et, en général, on peut ne considérer que le moment cinétique associé au seul état mécanique.



Gérard SERRA
Professeur retraité
Marseille (Bouches-du-Rhône)

Marc MÉNÉTRIER
Professeur de physique en mathématiques spéciales
Lycée Thiers
Marseille (Bouches-du-Rhône)