

# Mise au point concernant l'article sur le freinage par courants de Foucault

par **André DEIBER**

Lycée Kléber - 67000 Strasbourg

andre.deiber@laposte.net

et **Hervé IDDA**

Lycée Gustave Eiffel - 21000 Dijon

h.idda@caramail.com

## RÉSUMÉ

*Dans un article publié dans Le Bup n° 891, nous avons déterminé la répartition des courants de Foucault induits dans une plaque en mouvement en tenant compte à la fois du champ électromoteur et du champ électrostatique. Bruno JECH a pointé une incohérence dans notre analyse liée à une hypothèse trop restrictive sur la structure du champ magnétique. Nous montrons comment surmonter ces difficultés en analysant le mécanisme qui transforme, dans la géométrie étudiée, l'équation de Laplace en pseudo équation de Poisson. Nous retrouvons de manière plus rigoureuse l'équation centrale de l'article précédent, ce qui valide l'ensemble des résultats quantitatifs qui y sont établis. Par ailleurs, nous évaluons grossièrement les charges de guidage réparties en surface.*

Nous avons détaillé une méthode de détermination des courants de Foucault dans une plaque métallique en mouvement par rapport à des bobines parcourues par un courant constant dans *Le Bup* de février 2007 [1]. L'équation de départ était une équation de Poisson régissant le potentiel électrostatique dans une modélisation plane. Un de nos collègues Bruno JECH a formulé deux types de critiques concernant notre analyse.

Tout d'abord, une incohérence dans la modélisation du champ magnétique entraîne l'absence de charges volumiques de guidage des courants induits. L'argument est fondé, mais peut être contourné. Le passage d'une description tridimensionnelle à une modélisation plane a pour conséquence l'apparition d'une sorte de répartition volumique « fictive » dont la densité est celle que nous avons obtenue dans l'article mentionné ci-dessus.

Par ailleurs, Bruno JECH réfute l'existence de charges de guidage, qu'elles soient réparties en volume ou à la surface du métal. Un raisonnement qualitatif permet pourtant de justifier l'existence de charges statiques « réelles » de surface et d'en évaluer l'ordre de grandeur.

Par ailleurs, dans un souci de concision, nous nous référons à l'article [1] pour les notations et les valeurs numériques.

## 1. EN TOUTE RIGUEUR, IL N'Y A PAS DE CHARGES DE GUIDAGE RÉPARTIES EN VOLUME

Comme l'a fort bien remarqué notre collègue, en toute rigueur la densité volumique de charge  $\rho$  est nulle dans le conducteur en mouvement même en présence d'un champ magnétique sous réserve d'un mouvement rectiligne uniforme du conducteur. En effet, si nous notons que :

$$\operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} - \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \vec{0}$  en l'absence de courant dans l'entrefer de l'électroaimant et  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  car la vitesse est de la plaque est uniforme. De plus, si la vitesse de la plaque est maintenue constante dans le référentiel fixe  $\mathcal{R}_{\text{bob}}$ , les différentes grandeurs caractérisant ce phénomène d'induction sont indépendantes du temps. D'après l'équation de conservation de la charge électrique  $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , les courants induits sont donc conservatifs :  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ .

Or, la loi d'Ohm locale relie la densité de courant  $\vec{j}$  à la somme  $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$ , soit :  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ . Il en résulte :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \implies \operatorname{div}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

et donc :

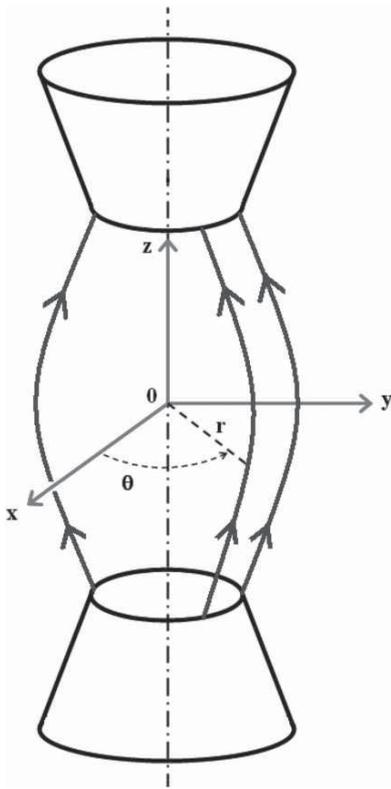
$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = 0$$

Dans l'article de départ, nous avons trouvé une densité volumique de charges égale à  $\rho = -\epsilon_0 v \frac{dB_z}{dr} \cos \theta$  par un calcul explicite dans un système de coordonnées sans nous référer à des relations générales d'analyse vectorielle. Pour comprendre l'origine de ce hiatus, il faut analyser de manière fine notre modélisation de la structure du champ magnétique créé par les bobines.

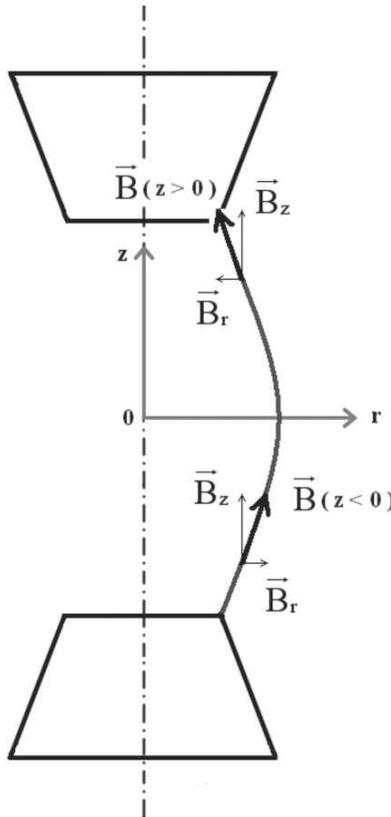
## 2. PEUT-ON NÉGLIGER LA COMPOSANTE RADIALE DU CHAMP MAGNÉTIQUE ?

Vu la symétrie de révolution autour de l'axe  $OZ$ , le champ magnétique se décompose en une composante axiale  $B_z(R, Z)$  et une composante radiale  $B_r(R, Z)$ .

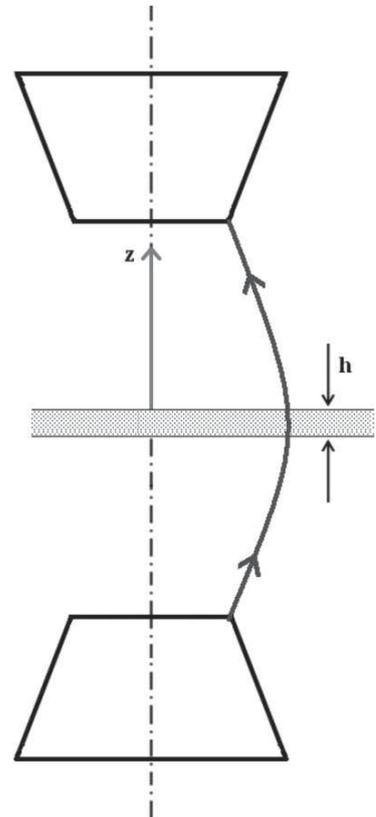
Remarquons que  $B_r$  ne dépend que des variables  $R, Z$  (invariance par rotation) et s'annule pour  $Z=0$ . Comme nous nous sommes limités au cas d'une plaque de très faible épaisseur, la composante radiale du champ magnétique varie de manière quasi affine avec  $Z$ , soit :  $B_r(R, Z) \cong \frac{\partial B_r}{\partial Z} \Big|_{z=0} \times Z$  avec  $\frac{\partial B_r}{\partial Z} \Big|_{z=0} < 0$ .



**Figure 1 :** Ligne de champ magnétique dans l'entrefer.



**Figure 2 :** Projection dans le plan  $\vec{e}_r, \vec{e}_z$ .



**Figure 3 :** La plaque de faible épaisseur dans l'entrefer.

Comme l'indique la figure 3,  $B_r < 0$  sur la face supérieure  $Z = \frac{h}{2}$  et positive sur l'autre face  $Z = -\frac{h}{2}$ . La relation  $\text{rot } \vec{B} = \left( \frac{\partial B_r}{\partial Z} - \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) \cdot \vec{e}_\theta = \vec{0}$  ou encore  $\frac{\partial B_r}{\partial Z} = \frac{\partial B_z}{\partial R}$  donne une seconde expression de la composante radiale :  $B_r(R, Z) \cong \frac{\partial B_z}{\partial R} \Big|_{z=0} \times Z$ .

Comme  $\frac{\partial B_z}{\partial R} \Big|_{z=0}$  est de l'ordre de  $-\frac{B_0}{a}$ , nous obtenons un ordre de grandeur de  $B_r$  en un point de la surface de la plaque d'épaisseur  $h$  :  $|B_r| \approx B_0 \frac{h}{2a}$ .

Avec les valeurs numériques retenues,  $B_r$  est bien négligeable devant  $B_0$  mais on

ne peut pas négliger pour autant sa dérivée vu la relation  $\frac{\partial B_R}{\partial Z} = \frac{\partial B_Z}{\partial R}$ . Or c'est précisément cette dernière relation, que nous avons sous-estimée, qui conditionne l'absence de charges volumiques.

La prise en compte de la composante radiale du champ magnétique semble donc rendre notre détermination des courants de Foucault totalement erronée. En fait, il n'en est rien, car un second effet de la présence de  $B_r$  intervient.

### 3. CONTRAINTES SUR LE CHAMP ÉLECTRIQUE

Comme le champ magnétique n'est plus parfaitement axial, le champ électromoteur  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$  n'est plus rigoureusement parallèle à la surface de la plaque, mais présente une composante axiale égale à  $E_{m_z} \vec{e}_z = v \vec{e}_y \wedge B_r \vec{e}_r = -v B_r \cos \theta \vec{e}_z$ .

Pour que les lignes de courant soient parallèles à la surface métallique, il faut que les composantes axiales du champ électromoteur et du champ électrique se compensent en tout point du conducteur, d'où :  $E_z = +v B_r \cos \theta$ .

Il existe donc un champ électrique  $\vec{E}$  dans le métal dont on connaît maintenant au moins trois caractéristiques :

- ◆ La composante axiale du champ électrique est donc une fonction impaire de  $Z$  à  $R$  et  $\theta$  fixés de la forme :  $E_z \cong +v \cos \theta \left. \frac{\partial B_r}{\partial Z} \right|_{z=0} \times Z$ .
- ◆ Ce champ est à divergence nulle :  $div \vec{E} = 0$  (car il n'y a pas de charges volumiques) !
- ◆ Les différentes grandeurs étant indépendantes du temps  $\implies \vec{rot} \vec{E} = \vec{0}$  d'où l'existence d'un potentiel scalaire  $V(R, \theta, Z)$  dont dérive ce champ  $\vec{E}$ .

Le potentiel varie donc de manière quasi parabolique à  $R$  et  $\theta$  fixés. Évaluons alors l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre le plan médiateur et le bord de la plaque métallique :

$$\Delta V = - \int_{z=0}^{z=\frac{h}{2}} v \cos \theta \left. \frac{\partial B_r}{\partial Z} \right|_{z=0} Z dZ \implies |\Delta V| \sim v \frac{B_0}{a} \times \frac{h^2}{2}$$

Notons que cette différence de potentiel n'excède pas le microvolt à comparer à la dizaine de millivolts entre deux points particuliers de la plaque [1]. La fonction  $V(R, \theta, Z)$  dépend dans la plaque métallique donc surtout des coordonnées planes  $R$  et  $\theta$  et relativement très peu de la cote  $Z$ .

#### 4. L'ÉQUATION DE LAPLACE DEVIENT UNE PSEUDO ÉQUATION DE POISSON

À ce stade, on commence à voir par quel mécanisme mathématique apparaît une densité volumique fictive de charges :

$$B_r \neq 0 \implies E_z = g(R, \theta, Z) \implies V(R, \theta, Z) \implies \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = \frac{\partial E_z}{\partial Z} = -\nu \cos \theta \frac{\partial B_R}{\partial Z} \Big|_{z=0} \neq 0.$$

L'équation de Laplace en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0$$

s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \nu \cos \theta \frac{\partial B_R}{\partial Z} \Big|_{z=0} = 0.$$

En remarquant que  $\text{rot } \vec{B} = \left( \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right) \cdot \vec{e}_\theta = \vec{0}$  ; soit  $\frac{\partial B_R}{\partial Z} = \frac{\partial B_Z}{\partial R}$  ; nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \nu \cos \theta \frac{\partial B_Z}{\partial R} \Big|_{z=0} = 0$$

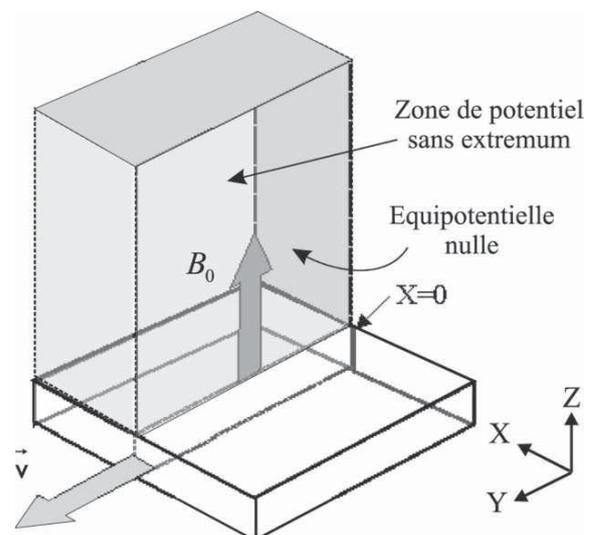
Soit exactement la même équation que celle obtenue dans le cadre de nos hypothèses simplificatrices de l'article [1] à la très faible dépendance en Z signalée ci-dessus près.

Tout se passe donc effectivement comme si le métal était le siège d'une répartition volumique de densité  $\rho = -\epsilon_0 \nu \cos \theta \frac{\partial B_Z}{\partial R} \Big|_{z=0}$ , ce qui valide l'ensemble des calculs développés dans l'article de départ.

#### 5. OÙ SE TROUVENT LES CHARGES DE GUIDAGE ?

Il reste à localiser les charges électriques statiques qui guident les courants induits *via* le champ électrostatique. Pour Bruno JECH, la réponse est simple : il n'y en a pas ! À notre sens les arguments avancés ne sont pas recevables.

Considérons, à cet effet, le demi-espace situé en dehors de la plaque  $\left\{ \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right], Z > \frac{h}{2} \right\}$  (cf. figure 4). Celui-ci est vide de charges électriques, le



**Figure 4**

potentiel électrostatique ne peut donc pas y présenter d’extremum.

Par ailleurs,  $V(R, \theta, Z)$  est tel que :

- ◆  $V\left(R, \theta, \frac{h}{2}\right) > 0$  pour  $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$  ;
- ◆  $V(R, \theta, Z) = 0$  pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  (donc pour  $X = 0$ ), pour  $Z \rightarrow +\infty$  et pour  $R \rightarrow +\infty$  ;
- ◆  $\frac{\partial V}{\partial X}(X = 0) > 0$  car le champ électrique dans le plan d’antisymétrie est dirigé suivant  $-\vec{u}_x$ .

De manière imagée, le potentiel est nul sur cinq des six faces de cette boîte, si celle-ci est assez grande, et positif en tout point de la face du bas. De surcroît, il est croissant au voisinage de la face  $X = 0$ .

Pour qu’il n’y ait pas d’extremum dans cette zone de l’espace, il faut imposer la contrainte géométrique :  $\frac{\partial V}{\partial Z} \Big|_{Z=\frac{h}{2}} < 0$  en tout point de la surface  $Z = \frac{h}{2}$  ;  $X > 0$  ;  $Y$  quelconque. Il en résulte que :  $E_z\left(R, \theta, Z = \frac{h^+}{2}\right) > 0$  (composante  $E_z$  dans le sens des potentiels décroissants) à comparer avec :

$$E_z\left(Z = +\frac{h^-}{2}\right) = +v \cos \theta \frac{\partial B_r}{\partial Z} \Big|_{Z=0} \cdot \frac{h}{2} < 0.$$

Cette discontinuité de la composante normale du champ électrique entraîne l’existence d’une densité surfacique de charge de surface égale à :

$$\sigma = \epsilon_0 \left[ E_z\left(Z = \frac{h^+}{2}\right) - E_z\left(Z = \frac{h^-}{2}\right) \right].$$

Le raisonnement ci-dessus montre non seulement l’existence de charges de surface, mais il en fixe aussi les signes en adaptant le raisonnement ci-dessus aux quatre cas possibles comme l’indique la figure 5.

On peut exploiter davantage ce calcul en notant que la composante normale du champ électrique en dehors de la plaque est de l’ordre du rapport du potentiel maximal  $V_{\max}$  sur la plaque (évalué à une dizaine de millivolts) divisé par la distance caractéristique  $a$  de la zone de champ magnétique. Le potentiel doit tomber à zéro sur une distance environ

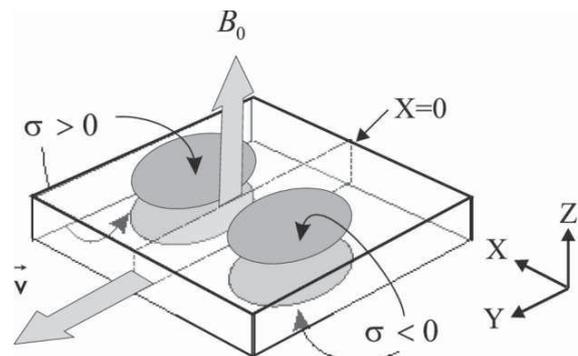


Figure 5

égale à  $a$ . Cette composante extérieure dépasse de plusieurs ordres de grandeur la composante normale intérieure. On a donc :

$$E_z\left(Z = \frac{h^+}{2}\right) \approx \frac{V_{\max}}{a} \gg \left| E_z\left(Z = \frac{h^-}{2}\right) \right| \Rightarrow \sigma \approx \varepsilon_0 \frac{V_{\max}}{a}.$$

L'aire de la surface chargée valant sensiblement  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ , nous aboutissons à une évaluation, certes grossière, de la charge  $Q$  déposée à la surface d'un quart de la plaque :

$Q \approx \frac{a^2 \sigma}{4} \approx \frac{\varepsilon_0 a V_{\max}}{4} \approx 10^{-15} \text{ C}$ . Le nombre de porteurs de charge statiques qui guident les courants reste très faible environ quelques dizaines de milliers d'électrons. Cette valeur numérique est à comparer à celle du paragraphe 2.1. de [1] : les deux résultats sont somme toute assez voisins.

## CONCLUSION

Un modèle ne sera jamais plus qu'une certaine représentation de la réalité. Souvent qu'un pâle reflet, tant n'importe quel phénomène est riche de multiples influences plus ou moins négligeables. Le propre de la démarche scientifique est de procéder par approximations successives. Une modélisation sera quantitative ou ne sera pas ! C'était bien notre état d'esprit devant le désaccord flagrant entre l'expérience et le calcul communément admis pour le freinage électromagnétique. Nous sommes partis d'une intuition physique forte : il faut un champ électrostatique pour contrecarrer partiellement le champ électromoteur et pour guider les courants induits. L'amélioration était substantielle, un facteur 2 à la clé. Mais il fallait encore localiser les charges statiques responsables de ce champ. Notre première idée était erronée, nous venons de le voir. Mais notre intuition était bonne : l'équation de départ pouvait être fondée sur des bases solides. D'une manière générale, nous retrouvons dans ce cas particulier une situation courante. Les charges de guidage sont localisées sur les surfaces des conducteurs parcourus par des courants (induits ou non) et c'est le gradient de charge surfacique qui génère le champ qui met les porteurs de charge en mouvement. Pour conclure, nous regrettons d'avoir eu à passer à maintes reprises sous les fourches caudines des Mathématiques sur l'ensemble de ces trois articles. Mais c'est là l'injuste rançon à payer à l'exactitude !

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DEIBER A. et IDDA H. « Freinage par courants de Foucault (II) : des charges réparties en volume guident les courants induits ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, février 2007, vol. 101, n° 891, p. 177-197.



**André DEIBER**  
Professeur  
Lycée Kléber  
Strasbourg (Bas-Rhin)



**Hervé IDDA**  
Professeur  
Lycée Gustave Eiffel  
Dijon (Côte-d'Or)