

Freinage par courants de Foucault (II)

Des charges réparties en volume guident les courants induits

par **André DEIBER**

Lycée Kléber - 67000 Strasbourg

andre.deiber@laposte.net

et **Hervé IDDA**

Lycée Gustave Eiffel - 21000 Dijon

h.idda@caramail.com

RÉSUMÉ

Des charges statiques sont réparties en volume dans les conducteurs en mouvement dans une zone de champ magnétique non uniforme. Même si leur nombre n'excède pas quelques milliers de particules, leur présence est nécessaire pour guider les courants induits. L'intensité du champ électrique créé par ces charges est comparable à celle du champ électromoteur. Leur effet contre électromoteur est très sensible et limite nettement le freinage par courant de Foucault. Dans le cas d'une plaque de grande extension en mouvement de translation uniforme, le modèle développé permet de déterminer les lignes de courants induits et toutes les conséquences qui en découlent.

Dans un précédent article [1], nous avons dégagé expérimentalement la complexité du phénomène des courants de Foucault même dans une géométrie aussi simple que celle d'une fine plaque en translation dans une zone de champ magnétique \vec{B} stationnaire. Ce cas fait pourtant partie des rares situations qui se prêtent à un calcul relativement détaillé si on prend néanmoins la précaution de traiter une plaque de très grande extension devant la zone de champ magnétique. Dans notre situation d'étude, l'analyse peut être complètement développée moyennant quelques hypothèses simplificatrices, mais réalistes. Ce cas simplifié contient tous les ingrédients permettant de comprendre le mécanisme physique sous-jacent. Au-delà de l'induction, c'est la mise en mouvement des porteurs de charges, y compris dans les circuits filiformes sous l'action de forces électromotrices d'origines diverses, qui est au centre de ce débat.

1. LE CHAMP ÉLECTROMOTEUR NE SUFFIT PAS POUR GUIDER LES COURANTS INDUITS

Comme son nom l'indique, le champ électromoteur de Lorentz $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ met les électrons en mouvement dans un conducteur en mouvement dans un référentiel où règne

un champ magnétostatique. Mais est-il le seul champ à l'œuvre pour guider les lignes de courant ? Outre le fait qu'un tel modèle est en très net désaccord avec l'expérience [1], il laisse en effet plusieurs zones d'ombre :

- ◆ Mais qu'est-ce qui détermine le tracé des lignes de courant en dehors de cette zone ?
- ◆ Ces boucles de courants induits s'éloignent-elles de l'axe ou restent-elles confinées au voisinage du centre O ?
- ◆ Où sont placées les charges fixes (par rapport aux bobines) qui vont guider les porteurs mobiles ?
- ◆ Sont-elles réparties en surface ou en volume ?
- ◆ Peut-on parler de résistance interne de ce générateur ?
- ◆ Quelle est la résistance qu'oppose la plaque conductrice aux courants induits ?

1.1. Vers un modèle simplifié

Pour aborder ce problème de manière concrète, revenons au cas d'une fine plaque métallique en mouvement de translation uniforme dans le référentiel \mathcal{R}_{Bob} , à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_y$ dans le plan médiateur OXY de deux bobines identiques coaxiales parcourues par des courants circulant dans le même sens.

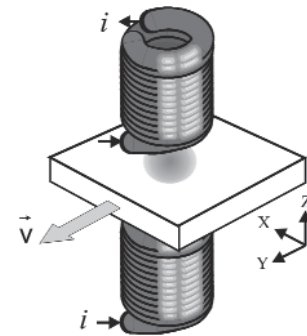


Figure 1 : Orientation du trièdre.

En un point quelconque de ce plan, le champ magnétique est dirigé suivant OZ, mais sa norme diminue rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'axe. Le champ électromoteur n'existe donc que dans la zone de champ magnétique (en grisé sur la figure 1).

Précisons d'abord les notations concernant le champ magnétique. Pour des bobines cylindriques, le champ magnétique présente une invariance par rotation autour de l'axe OZ. Si B_0 est la norme du champ magnétique en O, nous pouvons alors écrire que $B_z(X, Y, 0) = B_0 b(R)$ avec $b(0) = 1$ et $R^2 = X^2 + Y^2$. La fonction $b(R)$ est alors une mesure adimensionnée du champ magnétique.

On peut associer à cette répartition une longueur caractéristique a et introduire dans les figures les coordonnées réduites sans dimension : $x = \frac{X}{a}$, $y = \frac{Y}{a}$ et $r = \frac{R}{a}$.

Toutes les figures qui suivent ont été réalisées, à titre de prototype, sur la base d'une répartition gaussienne du champ magnétique dans le volume de la plaque :

$$\boxed{b = \exp\left(-\frac{R^2}{2a^2}\right)} \quad (1).$$

De même, les applications numériques correspondent aux valeurs $h = 1,00$ mm, $B_0 = 40,0$ mT, $|v| = 1,00$ m · s⁻¹, $a = 3,00$ cm et $\gamma_{Al} \simeq 3,61 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Par ailleurs, si l'épaisseur h de la plaque est négligeable devant la distance inter-bobines, on peut supposer que le champ magnétique en un point quelconque de la masse métallique ne dépend pas de Z car $Z \cong 0$. Cette simplification essentielle permet de passer d'un problème tridimensionnel à une modélisation plane.

1.2. Il doit exister un champ électrostatique dans le conducteur

Dans un circuit électrique, ce sont des charges électriques réparties à la surface des fils qui guident les porteurs mobiles [2]. Il est donc naturel de penser, pour une plaque de grandes dimensions, que des charges statiques sont placées sur les deux plans parallèles délimitant la plaque. Le champ électromoteur imposerait la mise en circulation et ces charges de surface guideraient les lignes de courant au sein du conducteur.

Cette répartition surfacique ne doit pas exclure l'existence d'une distribution volumique, qui s'avère en fait absolument nécessaire.

En effet, si la vitesse de la plaque est maintenue constante, les différentes grandeurs caractérisant ce phénomène d'induction sont indépendantes du temps. D'après l'équation de conservation de la charge électrique $div \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, les courants induits sont donc conservatifs : $div \vec{j} = 0^{(1)}$. Dans le domaine des accélérations réalisables en mécanique, cette conclusion reste pratiquement valable si le mouvement n'est pas uniforme. La loi d'Ohm locale relie la densité de courant \vec{j} à ces vecteurs : $\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

La non-uniformité du champ électromoteur entraîne l'existence d'une densité volumique de charges vue la relation de Maxwell Gauss : $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = -\epsilon_0 div (\vec{v} \wedge \vec{B})$. On voit bien l'origine du hiatus : nier l'existence de charges volumiques revient à supposer que $div (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$. En conséquence, dans le référentiel \mathcal{R}_{bob} des bobines règnent un champ magnétostatique \vec{B} et un champ électrostatique \vec{E} .

Remarque : Dans le cas d'un aimant se déplaçant dans un tube de cuivre [3], cette condition est effectivement vérifiée, mais il s'agit là d'une géométrie très particulière.

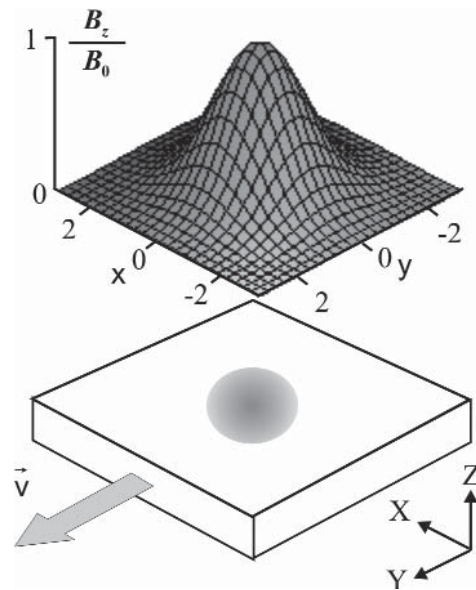


Figure 2 : Répartition de champ magnétique.

(1) Dans le référentiel \mathcal{R}_{cond} lié au conducteur, les courants ne sont plus rigoureusement conservatifs, mais $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ reste très faible dans l'hypothèse quasi stationnaire si v est faible (cf. [4]).

1.3. Une méthode d'analyse des courants de Foucault

Pour dégager la complexité des courants de Foucault, précisons les étapes nécessaires pour déterminer les courants induits dans le conducteur en mouvement dans un champ magnétique statique.

- ◆ Dans le référentiel galiléen des sources de champ magnétique, les courants de Foucault circulent le long de tubes de courant en constituant des boucles fermées.
- ◆ Quoique le conducteur reste globalement neutre, des charges fixes créent un champ électrostatique qui s'ajoute au champ électromoteur.
- ◆ La densité de courant induit lié à cette addition vectorielle peut ainsi être calculée en chaque point donnant ensuite accès à la force de freinage magnétique.

L'organigramme ci-dessous explicite l'architecture du calcul qui va être développé dans la suite de cet article.

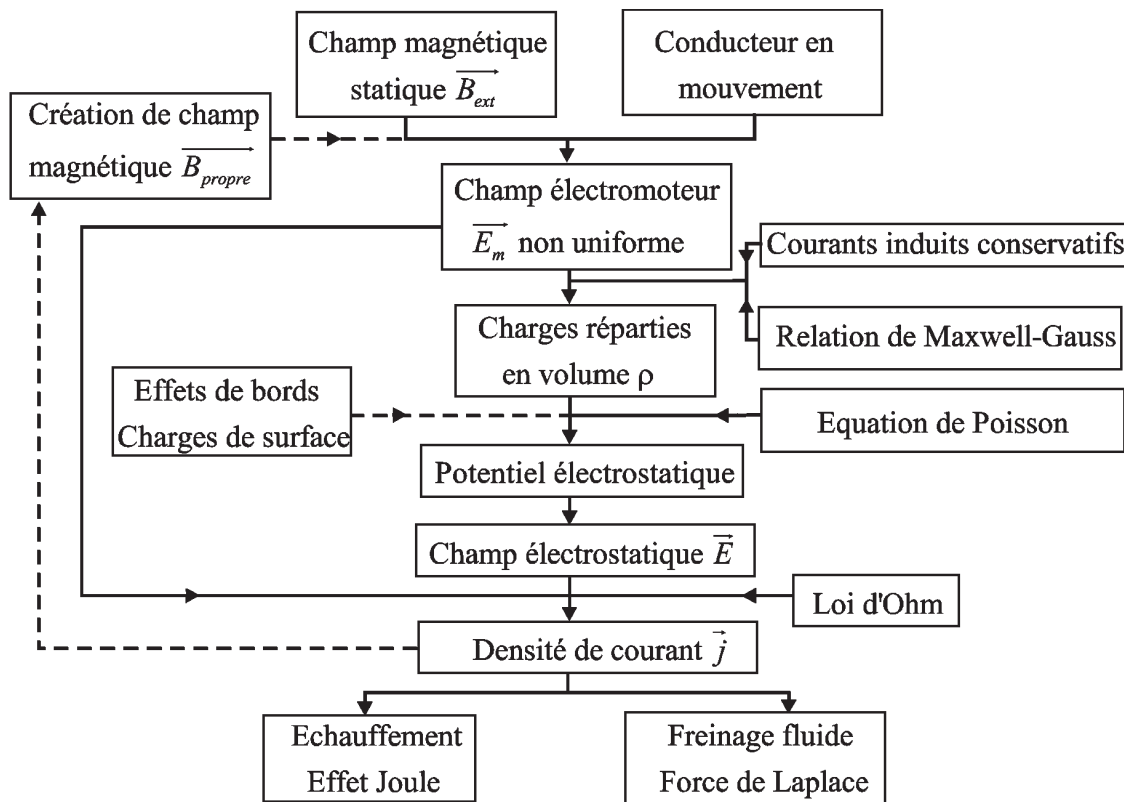


Figure 3 : Organigramme de calcul.

Ce schéma peut se compliquer pour plusieurs raisons (en lignes pointillées) :

- ◆ Si la vitesse est trop élevée, l'intensité du champ magnétique \vec{B}_{ind} associé aux courants induits devient comparable au champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} . Des termes en v^2 , qui apparaissent dans le champ électromoteur $\vec{v} \wedge (\vec{B}_{ext} + \vec{B}_{ind})$, introduisent des non-linéarités dans les équations qui bloquent toute tentative de résolution analytique. Même le cas géométriquement simple d'un aimant se déplaçant dans un tube de cuivre n'échappe pas à cette limitation [3].

- ◆ Ces non-linéarités sont encore plus importantes avec des matériaux ferromagnétiques (rail de TGV ou ralentisseur TELMA® pour camions ou autobus).
- ◆ Si la plaque est trop petite, des charges placées sur les quatre surfaces formant le bord de la plaque métal obligent les lignes de courant à « rester » dans le volume du conducteur. Ces effets de bords peuvent sérieusement compliquer la résolution de l'équation de Poisson permettant de déterminer le potentiel électrostatique.

Nous allons montrer dans ce qui suit que le programme esquissé ci-dessus peut être mené à son terme moyennant des hypothèses simplificatrices pour éviter ces écueils.

Remarque : Une analyse plus complète traitant la rotation d'un disque conducteur en incluant les effets de bords est possible [4], mais ses développements mathématiques sont beaucoup plus conséquents.

2. LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DANS LE CONDUCTEUR

Cette première étape de notre calcul vise donc à déterminer le champ électrostatique présent dans le conducteur en mouvement uniforme dans $\mathfrak{R}_{\text{Bob}}$.

2.1. Des charges fixes réparties en volume : à peine quelques centaines d'électrons

Comme nous l'avons explicité au paragraphe 1.2., la non-uniformité du champ électromoteur :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = vB_0 b(X, Y) \vec{e}_x$$

entraîne l'existence d'une densité volumique de charges. Comment se répartissent alors ces charges au sein de la plaque ?

Reprenons le calcul donnant la densité volumique de charges (cf. § 1.2.) :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{e}_y \wedge B_0 b(R) \vec{e}_z = vB_0 b(R) \vec{e}_x$$

$$\text{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = vB_0 \frac{\partial b(r)}{\partial X} = vB_0 \cos \theta \frac{db}{dR}$$

$$\text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E} = -\text{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = -vB_0 \cos \theta \frac{db}{dR}$$

et

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = -\epsilon_0 vB_0 \frac{db}{dR} \cos \theta} \tag{2.}$$

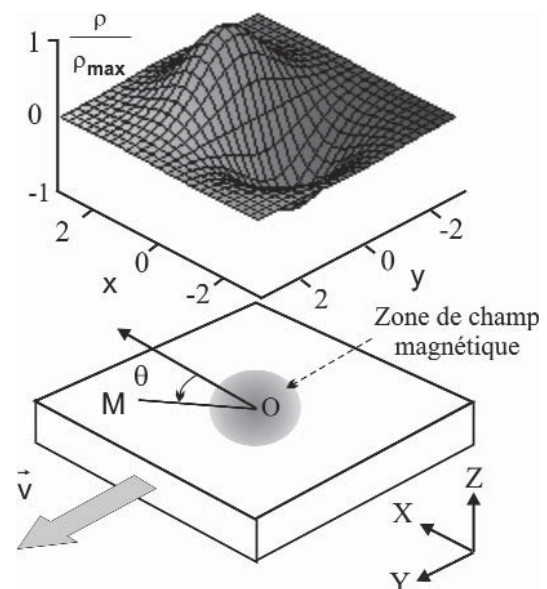


Figure 4 : Densité volumique de charges statiques.

Dans le cas de notre exemple en gaussienne, nous obtenons explicitement :

$$\rho = + \frac{\epsilon_0 v B_0}{a} \cos \theta \times r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).$$

La valeur maximale ρ_{\max} de ρ vaut $\frac{\epsilon_0 v B_0}{a}$.

La figure 5 représente les lignes d'iso densité de charges. Il y a un excès d'électrons pour $x < 0$ et un défaut d'électrons de

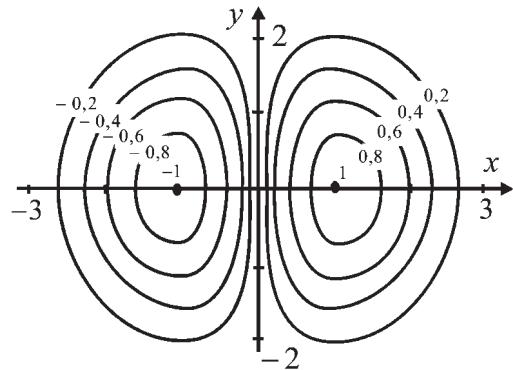


Figure 5 : Lignes iso densité volumique.

l'autre côté. Mais cette distribution de charges est globalement neutre, car le plan (O, \vec{v}, \vec{B}_0) d'équation $y = 0$ est un plan d'antisymétrie. En pratique, cette zone chargée en volume s'étend sur plusieurs centimètres carrés en recouvrant la zone de champ magnétique.

Le nombre d'électrons fixes (par rapport aux bobines) impliqués dans ce processus est extrêmement surprenant. Il s'élève à moins d'un millier de particules ! Calculons en effet la charge $Q > 0$ en excédent dans une moitié de la plaque, donc pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$:

$$Q = -h\epsilon_0 |v| Ba \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=+\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=\infty} \cos \theta d\theta \frac{db}{dr} r dr.$$

À l'aide d'une intégration par parties, nous

obtenons $Q = 2h\epsilon_0 |v| Ba \int_{r=0}^{r=\infty} b(r) dr$ (2). Q est donc de l'ordre de :

$$\boxed{Q \approx ha\epsilon_0 |v| B_0} \tag{3},$$

soit numériquement $Q \approx 10^{-17}$ C. Cette valeur très faible confirme que cette redistribution de charge ne porte que sur quelques centaines d'électrons.

Peut-on dès lors traiter cette charge comme quantité négligeable ? Pour ébranler les convictions des lecteurs sceptiques, validons cet ordre de grandeur par le calcul rapide suivant. Supposons que le champ électrique au point O soit de l'ordre du dixième du champ électromoteur maximal, soit $\|\vec{E}(O)\| \sim \frac{|v| B_0}{10}$. Imaginons maintenant que ce champ soit créé par deux charges ponctuelles $\pm Q'$ placées sur l'axe OX en $X = \pm a$. On aurait alors $\|\vec{E}(O)\| \sim \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 a^2}$, d'où $Q' \sim 0,2\pi\epsilon_0 a^2 |v| B_0 = 2 \cdot 10^{-16}$ C, soit 1250 charges élémentaires. On comprend dès lors qu'il vaut mieux être prudent dans la suite.

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

2.2. Le potentiel électrostatique de la plaque

Connaissant la répartition de charges dans la plaque métallique, il est maintenant possible d'y déterminer le potentiel électrostatique *via* l'équation de Poisson.

2.2.1. Le potentiel électrostatique ne dépend que de deux variables

Si la plaque est assez fine, les lignes de courant sont des courbes inscrites dans le plan du conducteur. Comme le champ électromoteur et la densité de courant sont dans ce plan, il en est de même du champ électrostatique, d'où $E_z \cong 0$. Si le courant dans les bobines est constant, le champ électrique \vec{E} dans $\mathfrak{R}_{\text{bob}}$ dérive d'un potentiel scalaire $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, qui ne dépend donc que des variables R et θ . Tout se passe comme si la plaque était très épaisse et que la distribution de charge présentait une invariance par translation suivant OZ. Les charges réparties sur les faces de la plaque simulent donc une telle distribution volumique en dehors du volume conducteur.

2.2.2. Une équation de Poisson peu engageante a priori

Dans la géométrie de révolution que nous avons retenue, l'équation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ ou encore $\Delta V = \nu B_0 \frac{db}{dR} \cos \theta$, peut se résoudre complètement. Plusieurs arguments heuristiques permettent de fixer la forme générale $V(R, \theta)$ du potentiel en prenant comme référence le point O : $V(0, 0) = 0$.

- ◆ En l'absence de champ magnétique ou pour un conducteur immobile, la densité volumique de charges est identiquement nulle. Il en est alors de même du potentiel scalaire si on exclut la présence d'autres charges surfaciques. Il faut donc choisir $V \propto \nu B_0$.
- ◆ La dépendance angulaire de ρ doit se retrouver dans le potentiel : $V \propto \cos \theta$.
- ◆ La distribution de charges présente une structure dipolaire dans le plan. À grande distance, le potentiel doit varier en $\frac{1}{R}$, à l'image de deux fils infinis, parallèles à l'axe OZ, uniformément chargés de densité linéique $+\lambda$ et $-\lambda$.

Nous retiendrons donc une expression du type :

$$\boxed{V = \nu B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \cos \theta} \quad (4)$$

avec $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = cte \neq 0$ et $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f}{R} = 0$.

En coordonnées cylindriques (R, θ, Z) , l'équation de Poisson s'écrit pour $V(R, \theta)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \nu B_0 \frac{db}{dR} \cos \theta.$$

L'équation différentielle en $f(R)$ se simplifie en $R \frac{d^2 f}{dR^2} - \frac{df}{dR} = \frac{R^2}{a^2} \frac{db}{dR}$. La solution

compatible avec les conditions aux limites peut se mettre sous la forme $f(R) = \int_{\xi=0}^{\xi=R} \xi b(\xi) d\xi$

$$\int_{\xi=0}^{\xi=R} \xi b(\xi) d\xi$$

[5]. Nous aboutissons ainsi à l'expression générale $V = v_Y B_0 \frac{\int_{\xi=0}^{\xi=R} \xi b(\xi) d\xi}{R} \cos \theta$.

2.2.3. Un très faible déséquilibre de potentiel en pratique

Dans l'exemple d'une répartition gaussienne du champ magnétique, V s'écrit :

$$V = vB_0 a \frac{\int_{\xi=0}^{\xi=r} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi}{r} \cos \theta$$

ou encore :

$$V = \frac{vB_0 a \cos \theta}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right].$$

Cette fonction est maximale au point

$M_1 \left(x_1 = \frac{X_1}{a} \cong 1,60 ; 0 \right)$ (qui ne coïncide pas avec l'extremum de la densité volumique de charge) et minimale en $M'_1 \left(x'_1 = \frac{X'_1}{a} \cong -1,60 ; 0 \right)$.

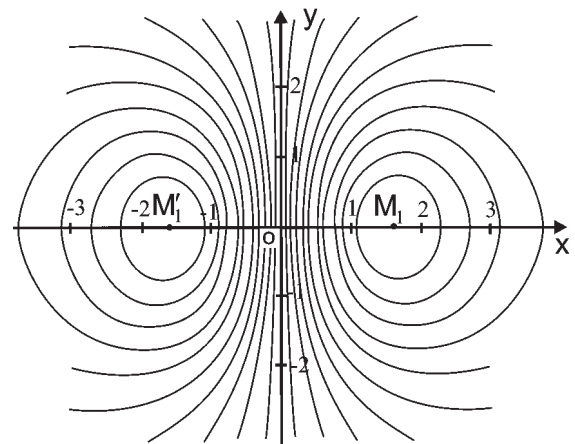


Figure 6 : Lignes équipotentielles.

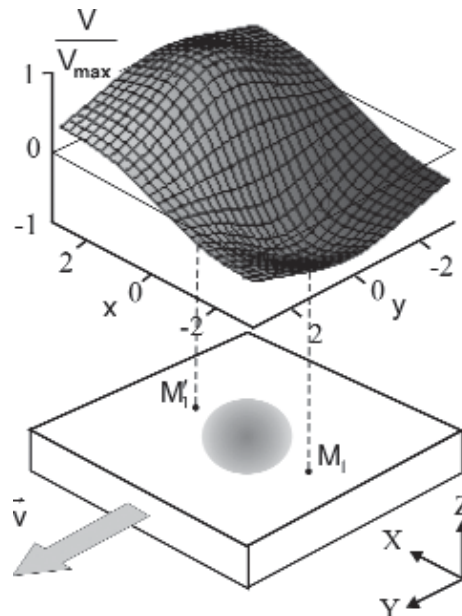
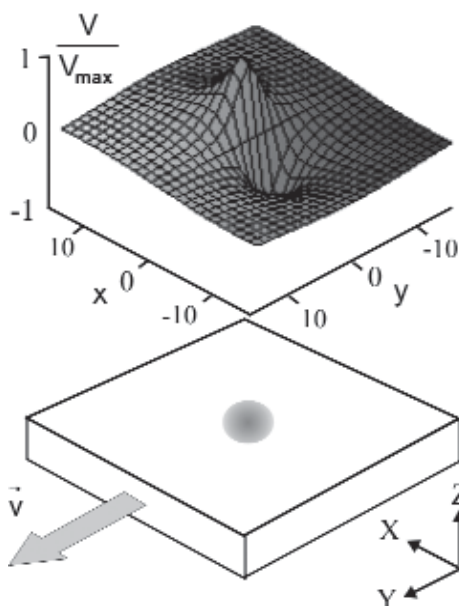


Figure 7 : $\frac{V}{V_{\max}}$ en fonction du point $M(x, y)$:

Vue d'ensemble et vue de détail dans la zone de champ magnétique.

La plaque métallique n'est pas équipotentielle, mais la différence de potentiel maximale entre les points M_1 et M'_1 est très faible : $\Delta V_{\max} \cong 2 \times 0,45 |v| B_0 a = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ V}$. C'est effectivement ce très faible déséquilibre de potentiel de l'ordre du millivolt qui va freiner la plaque.

2.2.4. Il y a une relation directe entre le potentiel électrostatique et le potentiel vecteur

À ce stade, deux remarques s'imposent :

- ◆ $2\pi a^2 f(R) B_0 = \Phi(R)$ n'est autre que le flux du champ magnétique \vec{B}_{ext} à travers le disque de rayon R . En effet :

$$\Phi(R) = \int_{r'=0}^R \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} B(r') R' dR' d\theta = 2\pi B_0 \int_{r'=0}^R R' b(R') dR' = 2\pi a^2 B_0 f(R).$$

- ◆ Dans une jauge telle que $\vec{A} = A_\theta(R) \vec{e}_\theta$, on a $B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} = A_\theta(R)$. La relation entre le potentiel scalaire et ce potentiel vecteur est donc très simple : $V(R, \theta) = v A_\theta(R) \cos \theta$.

2.3. Le champ électrostatique

Dans le référentiel des bobines, la contribution du potentiel vecteur au champ électrique est nulle. Le calcul du champ électrostatique \vec{E} est alors immédiat :

$$\vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial R} \vec{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

avec :
$$V = v B_0 \frac{f(R)}{R} \cos \theta$$

soit :
$$\boxed{\vec{E} = v B_0 a^2 \left[\frac{f}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{df}{dR} \right] \cos \theta \vec{e}_R + v B_0 a^2 \frac{f}{R^2} \sin \theta \vec{e}_\theta} \quad (5).$$

Au voisinage de l'axe des bobines, on peut faire l'approximation $R \ll a$ d'où par développement limité de V au voisinage de 0 :

$$V \cong \frac{v B_0}{2} R \cos \theta = \frac{v B_0}{2} X.$$

Le champ électrique est dirigé suivant OX : $\vec{E}(O) \cong - \frac{v B_0}{2} \vec{e}_x$. Sa norme maximale reste néanmoins modeste $\|\vec{E}\| \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Pourtant, un petit champ électrique peut avoir de grands effets dans un bon conducteur, comme l'aluminium.

Le lecteur attentif aura remarqué que :

$$\boxed{\vec{E}(O) \cong - \frac{v B_0}{2} \vec{e}_x = - \frac{1}{2} \vec{E}_m(O)} \quad (6).$$

Cette relation est très générale et ne dépend pas de la fonction $B_z(r)$. Les quelques charges fixes créent donc un champ électrique tout à fait comparable au champ électromoteur, ce dernier étant lui même à l'origine de cette distribution volumique.

3. COMPÉTITION ENTRE LE CHAMP ÉLECTROMOTEUR ET LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Avant de déterminer les courants de Foucault, il est intéressant de comparer le champ électromoteur au champ électrostatique.

3.1. Structure du champ électrique dans la plaque

Les lignes du champ électromoteur $\vec{E}_m = vB_0 b(R) \vec{e}_x$, qui ne dérive pas d'un potentiel, sont parallèles à l'axe des X. Concernant le champ électrostatique, on retrouve loin des bobines un champ électrique typique d'une distribution dipolaire de dimension 2 avec une variation en $\frac{1}{R^2}$ car $\frac{df}{dR} \rightarrow 0$ et $f \rightarrow cte$. Les figures ci-dessous sont tracées de telle sorte que la longueur des flèches soit proportionnelle à la norme du champ vectoriel.

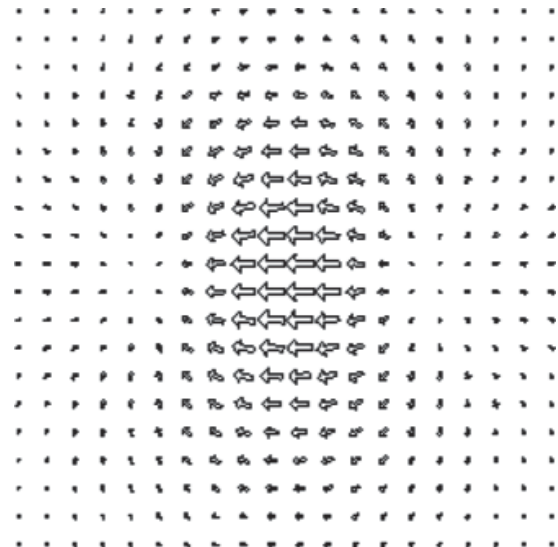
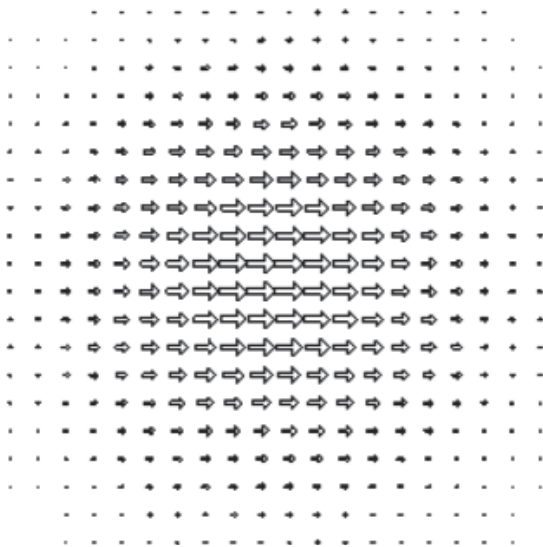


Figure 8 : Représentation du champ électromoteur.

Figure 9 : Représentation du champ électrique.

3.2. Le champ électromoteur l'emporte, mais pas partout !

Au centre du dispositif, \vec{E}_m est le champ dominant. Néanmoins, la décroissance de la norme du champ électromoteur en dehors de la zone de champ magnétique est plus rapide que celle du champ électrique (variant en $\frac{1}{R^2}$ si $R \gg a$), \vec{E} l'emporte donc à plus grande distance.

On peut donc résumer la situation :

- ◆ À « l'intérieur » du générateur équivalent (grosso modo dans la zone de champ magné-

tique), le champ électromoteur est contrecarré par le champ électrique, mais il l'emporte néanmoins.

- ◆ Mais à l'extérieur de la zone magnétique, le champ \vec{E} est seul maître à bord pour piloter les déplacements des porteurs de charge.

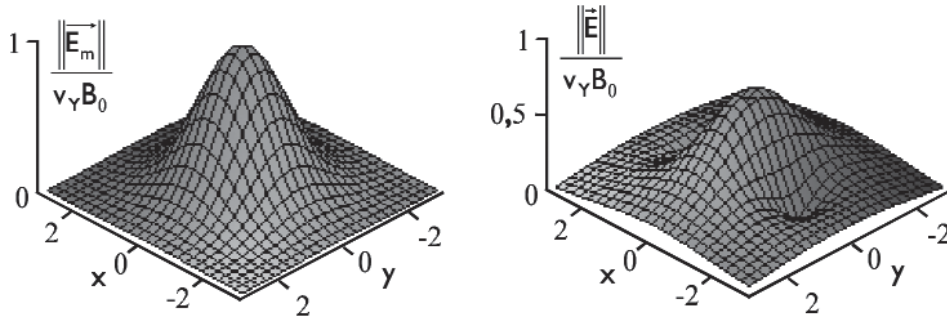


Figure 10 : Comparaison des normes $\frac{\|\vec{E}\|}{|v| B_0}$ et $\frac{\|\vec{E}_m\|}{|v| B_0}$.

4. RÉPARTITION DES COURANTS DE FOUCAULT

La connaissance du champ électromoteur et du champ électrostatique va nous permettre de déterminer la répartition des courants induits.

4.1. Une symétrie inattendue : les lignes de courant ressemblent aux équipotentiels !

Dans le référentiel du laboratoire, la loi d'Ohm locale fait intervenir les champs \vec{E}_m et \vec{E} : $\vec{j} = \gamma [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$. Les lignes de courant diffèrent donc des lignes de champ électrostatique. Avec les notations précédentes, on peut expliciter la densité volumique de courant \vec{j} :

$$j_R = \frac{\gamma v_Y B_0 a^2 \cos \theta}{R^2} \left[f(R) - R \frac{df}{dR} + \frac{R^2}{a^2} b(R) \right]$$

et :

$$j_\theta = \frac{\gamma v_Y B_0 a^2 \sin \theta}{R^2} \left[f(R) - \frac{R^2}{a^2} b(R) \right].$$

Ces expressions se simplifient, car $\frac{df}{dR} = \frac{R}{a^2} b(R)$:

$$j_R(R, \theta) = \frac{\gamma v_Y B_0 a^2 f(R)}{R^2} \cos \theta$$

et :

$$j_\theta(R, \theta) = \gamma v_Y B_0 a^2 \left[\frac{f(R)}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{df}{dR} \right] \sin \theta.$$

Elles ne sont pas sans rappeler celles des coordonnées du champ électrique :

$$E_R(R, \theta) = v_Y B_0 a^2 \left[\frac{f}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{df}{dR} \right] \cos \theta$$

et :
$$E_\theta(R, \theta) = + v_Y B_0 a^2 \frac{f}{R^2} \sin \theta.$$

Il est clair que $\frac{j_R\left(R, \frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\gamma} = E_\theta(R, \theta)$ et que

$$\frac{j_\theta\left(R, \frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\gamma} = E_R(R, \theta),$$

ce qui peut se traduire géométriquement. Soit deux points C et C' symétriques par rapport à la première bissectrice Δ. La connaissance de $\vec{E}(C)$ permet de déterminer $\vec{j}(C')$ et vice versa en remarquant que $\vec{j}(C')$ est orthogonal à $\vec{E}'(C)$ obtenu à partir de $\vec{E}(C)$ par une opération de symétrie par rapport à Δ.

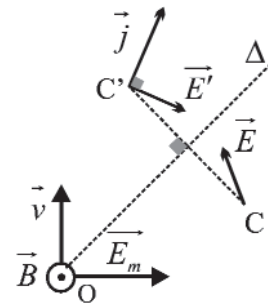


Figure 11 : Lignes de champ et lignes de courant.

On en tire deux conséquences qui sont loin d'être triviales :

- ◆ Les lignes de courant (non orientées) sont symétriques des équipotentielles par rapport à la première bissectrice.
- ◆ La densité de courant maximale est égale à $j_{\max} = \gamma E_{\max} = \gamma \frac{v_Y B_0}{2}$. Sa valeur numérique $j_{\max} = 5 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ est comparable à celle ($\sim 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$) qui parcourt une rallonge électrique de section $0,25 \text{ mm}^2$ alimentant une lampe de 60 W.

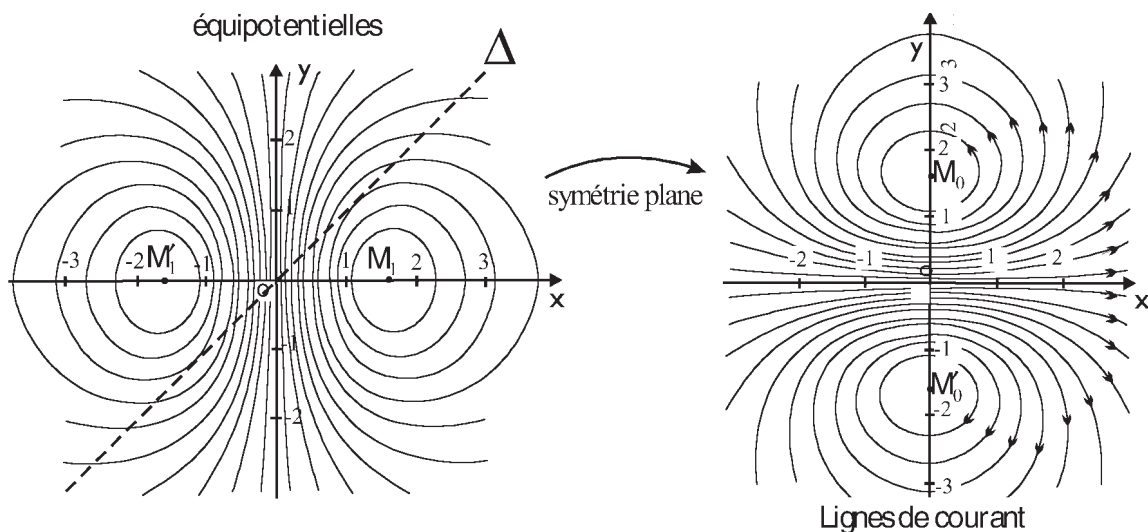


Figure 12 : Lignes des courants de Foucault et équipotentielles.

4.2. Deux points de contournement pour les boucles de courant

La figure précédente montre que les courants induits parcourent des boucles qui doivent contourner l'un ou l'autre des points où la densité de courant s'annule : $M_0(0, y_0)$ et $M'_0(0, -y_0)$. Vu la symétrie signalée plus haut, les points M_0 , M'_0 , M_1 et M'_1 sont disposée en carré. Ce résultat très général est lié à la symétrie cylindrique du champ magnétique \vec{B}_{ext} et non à la forme explicite de $B_z(r)$.

En un point quelconque de l'axe des Y , le vecteur \vec{j} est dirigé suivant \vec{e}_x . La composante j_x est positive tant que le champ électromoteur l'emporte sur le champ électrostatique, le courant s'écoulant des charges négatives vers les charges positives sous l'action motrice de \vec{E}_m .

C'est le champ électrostatique qui force le courant à revenir par l'extérieur de la zone de champ magnétique, là où $\|\vec{E}_m\| \cong 0$ en contournant M_0 ou M'_0 . La composante $j_x(0, y)$ est donc négative pour $y \notin [-y_0 ; +y_0]$.

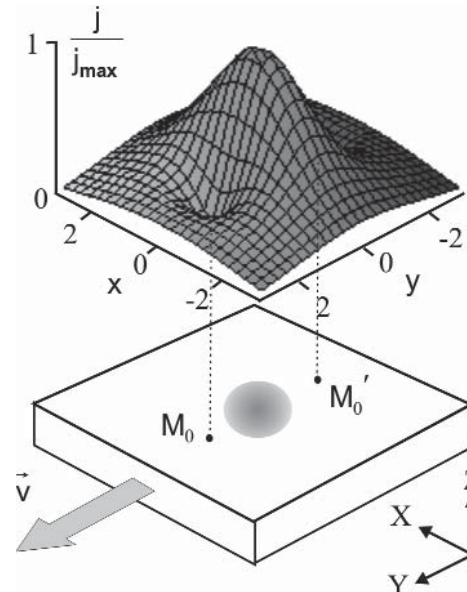


Figure 13 : Norme de la densité de courant induit.

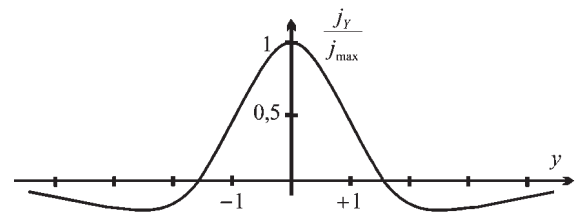


Figure 14 : Graphe de $j_x(0, y)$ en coordonnées réduites.

4.3. Une intensité extrêmement élevée

Estimons l'intensité des courants de Foucault par le flux de \vec{j} à travers le rectangle placé dans le plan $X = 0$, tel que $(-Y_0 \leq Y \leq Y_0, 0 \leq Z \leq h)$:

$$I_{induit} = \int_{Y=-Y_0}^{Y_0} \int_{Z=0}^h j_x(0, Y) dY dZ.$$

Cette intensité se met sous la forme $I_{induit} = \gamma h |v| B_0 a \int_{y=-y_0}^{y_0} \left[b(y) - \frac{f(y)}{y^2} \right] dy$ qui permet de donner l'ordre de grandeur de l'intensité associée aux courants de Foucault :

$$\boxed{I_{induit} \sim \gamma h |v| B_0 a} \tag{7},$$

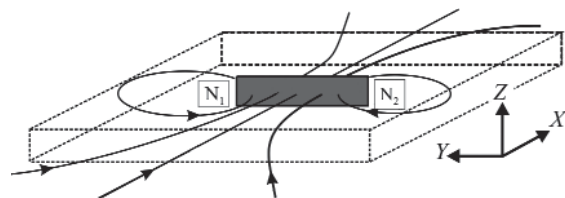


Figure 15 : Section de définition de l'intensité.

car la valeur numérique de l'intégrale est de l'ordre de l'unité. Nous voyons que les courants de Foucault sont très intenses $I_{induit} \sim 40$ A. Le contraste est saisissant entre le nombre très limité de charges fixes, qui guident les charges mobiles, et le nombre énorme de porteurs de charge en déplacement.

On peut fixer les ordres de grandeur en introduisant le temps de relaxation τ du conducteur égal à $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$. L'intensité du courant induit est sensiblement égale au rapport de la charge statique au temps de relaxation du conducteur (cf. équations (4) et (7)).

4.4. Boucle de courant et relief de potentiel

Une ligne de courant est une ligne fermée située dans le plan de la plaque. Il est instructif de positionner cette boucle par rapport aux équipotentielles (schéma du dessous) et de représenter l'évolution du potentiel en 3D (schéma du dessous).

Deux points apparaissent naturellement : le point P de potentiel (ou si on préfère d'altitude) maximal et le point N de potentiel minimal. Par définition, la boucle de courant est tangente aux équipotentielles en ces points : $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$.

Dans la partie intérieure, là où règne un champ magnétique important, le travail du champ électromoteur se traduit par une élévation du potentiel électrique des porteurs mobiles (d'une manière imagée, ils remontent la colline) et par un échauffement par effet Joule. Remarquons que $\vec{j} \cdot \vec{E} < 0$ dans cette partie du « circuit ».

Par contre, entre P et N à l'extérieur du générateur, l'effet Joule repose essentiellement sur le champ électrique $\vec{j} \cdot \vec{E} > 0$, car $\|\vec{E}_m\|$ diminue rapidement quand on sort de la zone de champ magnétique.

4.5. Un pavage de petits circuits indépendants

Comme deux lignes de courant ne peuvent pas se croiser, on peut associer de telles lignes contournant le même point (M_0 par exemple) pour former un tube de courant découpé dans l'épaisseur h de la plaque métallique. La partie de ce circuit plongée dans la zone de champ magnétique (en grisé sur la figure 17) donne la contribution majeure à la force électromotrice définie comme la circulation du champ électromoteur le long du circuit.

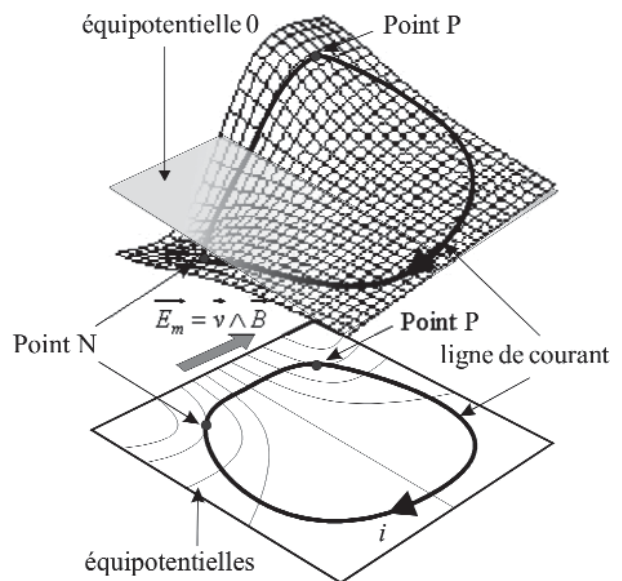


Figure 16 : Lignes de courants et lignes équipotentielles

On aboutit ainsi à un circuit élémentaire en associant une source idéale de tension e à un conducteur ohmique de résistance R_{eq} obtenue en sectionnant cette masse conductrice au niveau du segment (M'_0, M_0) .



De tels circuits élémentaires indépendants les uns des autres permettent de réaliser un pavage du plan conducteur.

Remarque : Précisons que R_{eq} peut être décomposée en deux tronçons $R_{NP(int)}$ et $R_{PN(ext)}$. Ces deux résistances sont d'ailleurs égales. Avec quelques nuances, on peut donc affirmer que les courants de Foucault circulent en adaptation d'impédance dans le conducteur.

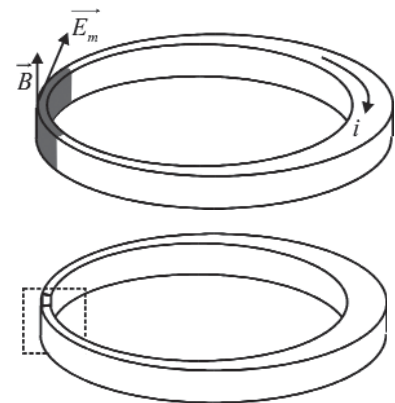


Figure 17 : Circuit élémentaire.

4.6. Des boucles de courant très étendues

Regroupons des boucles de courant de taille croissante pour obtenir un domaine D_p symétrique par rapport à l'axe OY englobant un pourcentage p de l'intensité totale.

La figure ci-contre indique les frontières correspondant aux pourcentages 25 %, 50 % et 75 %. Ces courbes montrent que les courants de Foucault ne s'écoulent pas uniquement au voisinage de la zone de champ magnétique (en grisé sur la figure à l'échelle) et loin s'en faut !

Un quart de l'intensité totale doit s'éloigner jusqu'à $|y| > 15$ avant de pouvoir revenir vers O. Pour que ce modèle s'applique correctement, il faut donc choisir une plaque très grande devant le diamètre de la zone de champ magnétique.

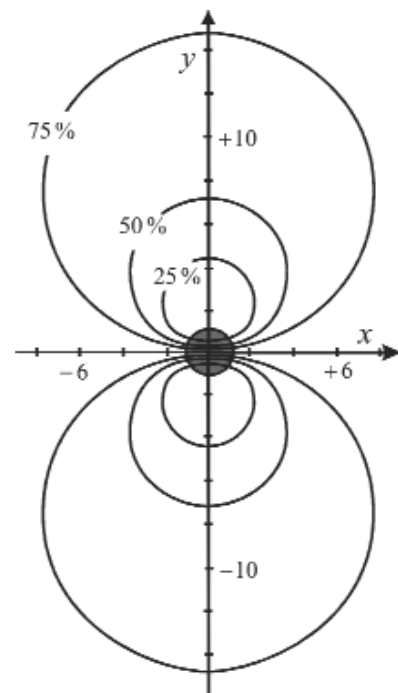


Figure 18 : Extension des boucles de courant

4.7. Vitesse limite pour laquelle ce modèle est applicable

Les courants de Foucault créent un champ magnétique propre \vec{B}_{prop} . Notre modèle n'est valable qu'à la condition $\|\vec{B}_{prop}\| \ll \|\vec{B}_{ext}\|$. Ces courants sont très intenses au voisinage de l'axe OX pour $|y| \sim a$. Il est donc raisonnable d'estimer que $\|\vec{B}_{ext}\|$ est environ égal au champ créé par un fil parcouru par un courant I_{ind} et de rayon a . Nous obtenons ainsi la condition :

$$\left\| \vec{B}_{prop} \right\| \ll \left\| \vec{B}_{ext} \right\| \Rightarrow \frac{\mu_0 I_{ind}}{2\pi a} \ll B_0 \Rightarrow \frac{\mu_0 \gamma h |v_Y|}{2\pi a} \ll 1 \Rightarrow |v_Y| \ll \frac{2\pi}{\mu_0 \gamma h} \sim 140 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dans la quasi-totalité des expériences de démonstration, les vitesses des conducteurs sont notablement inférieures à cette vitesse critique. Il est donc réaliste de ne pas tenir compte du champ magnétique propre dans nos calculs.

5. FREINAGE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

C'est la dernière phase de notre développement. Le calcul de la force de freinage électromagnétique va pouvoir être confronté avec l'expérience.

5.1. Estimation du coefficient de frottement fluide

Ces courants intenses vont freiner le conducteur par l'action de la force de Laplace. La force volumique associée aux courants de Foucault s'exprime par le produit vectoriel $\vec{f}_{vol} = \vec{j} \wedge \vec{B}$. Le plan $Y = 0$ est à la fois un plan de symétrie pour la distribution des courants induits et un plan d'antisymétrie pour les courants circulant dans les bobines produisant le champ magnétique. En conséquence, la force résultante obtenue par intégration de \vec{f}_{vol} est dirigée suivant \vec{e}_Y . Il suffit donc de calculer $\vec{e}_Y \cdot \vec{f}_{vol}$ en exploitant une permutation circulaire dans le produit mixte :

$$\vec{f}_{vol} \cdot \vec{e}_Y = B_0 b(R) \left[\vec{j} \wedge \vec{e}_Z \right] \cdot \vec{e}_Y = B_0 b(R) \left[\vec{e}_Z \wedge \vec{e}_Y \right] \cdot \vec{j} = -B_0 b(R) \vec{e}_X \cdot \vec{j},$$

d'où : $f_{volY} = -B_0 b(R) \left[\cos \theta \vec{e}_R - \sin \theta \vec{e}_\theta \right] \cdot \left[j_R \vec{e}_R + j_\theta \vec{e}_\theta \right] = -B_0 b(R) \left[\cos \theta j_R - \sin \theta j_\theta \right].$

En exprimant les coordonnées de \vec{j} , il vient :

$$\boxed{f_{volY} = -\gamma v B_0^2 a^2 b \left[\frac{f}{R^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{1}{R} \frac{df}{dR} \sin^2 \theta \right]} \quad (8).$$

Lors de l'intégration sur θ entre 0 et 2π , le premier terme donne zéro et le second apporte une contribution égale à $\int_{\theta=0}^{2\pi} f_{volY} d\theta = -\frac{\gamma v B_0^2 a^2 b}{2} \frac{1}{R} \frac{df}{dR}$. Comme $\frac{df}{dR} = \frac{R}{a^2} b(R)$, nous obtenons finalement, après intégration sur le volume de la plaque, une force résultante opposée à la vitesse de la plaque dans le référentiel des bobines :

$$\boxed{\vec{F} = -\gamma h B_0^2 \pi \left(\int_{r=0}^{\infty} b^2(R) R dR \right) \vec{v}} \quad (9)$$

Le coefficient de frottement fluide d'origine magnétique s'écrit donc :

$$\boxed{\alpha_{theo} = \gamma h B_0^2 \pi \left(\int_{r=0}^{\infty} b^2(R) R dR \right)} \quad (10).$$

5.2. Retour à l'expérience

Comparons deux modèles théoriques :

- ◆ Si nous tenons compte que du champ électromoteur \vec{E}_m (modèle 1), il vient :

$$\alpha_{\text{theol}} = 2\gamma h B_0^2 \pi \left(\int_{r=0}^{\infty} b^2(R) R dR \right)$$

- ◆ Si nous associons \vec{E}_m et \vec{E} (modèle 2), nous obtenons exactement la moitié $\alpha_{\text{theol}} = 2\alpha_{\text{theo2}}$ et ce quelque soit la répartition du champ magnétique dans la plaque. L'effet contre-électromoteur de \vec{E} compense exactement la moitié du caractère électromoteur de \vec{E}_m . Ceci est à mettre en relation avec un résultat facile à démontrer. Chaque générateur élémentaire est tel que la résistance « intérieure » soit égale à la résistance de charge. Les courants de Foucault circulent en adaptation d'impédance.

Par rapport aux résultats expérimentaux, la situation s'améliore sensiblement. On passe de $\frac{\alpha_{\text{theol}}}{\alpha_{\text{exp}}} = 6,1$ à $\frac{\alpha_{\text{theo2}}}{\alpha_{\text{exp}}} \approx 3$. Mais cela reste quand même un écart important qu'il faut relier à taille de la plaque.

Comme nous l'avons montré au paragraphe 4.6., il faut une plaque de très grande extension devant le diamètre de la zone de champ magnétique pour que les courants puissent circuler comme le prévoit notre modèle. Que se passe-t-il alors lorsque la plaque est trop petite ? Les courants devant rester à l'intérieur du métal, il faut courber les lignes de champ pour que l'écoulement des charges soit tangentiel au voisinage des côtés du rectangle qui délimite la plaque.

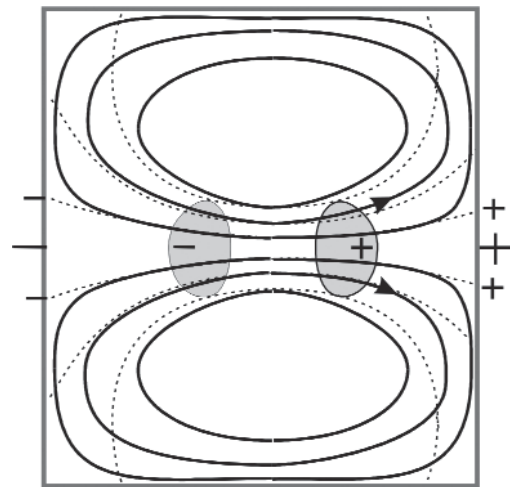


Figure 19 : Allure des lignes de courant théoriques (pointillées) et réelles (lignes pleines).

Ce rôle est dévolu à des charges statiques réparties sur ces surfaces. Or l'action de ces charges, qui sont de même signe que les charges volumiques étudiées précédemment, ne se limite pas au voisinage des bords de la plaque. Le champ électrique, qu'elles créent dans la zone de champ magnétique, est loin d'être négligeable devant le champ électromoteur. C'est leur forte action contre-électromotrice qui explique la différence résiduelle entre notre modèle de plaque infinie et les résultats expérimentaux.

5.3. Effet Joule et résistance équivalente du conducteur

Pour maintenir constante la vitesse de la plaque, un opérateur doit exercer une force \vec{F}_{op} opposée à la force de Laplace. Pour définir la résistance équivalente totale de la plaque,

égaons la puissance de cette force et la puissance Joule en faisant abstraction des coefficients numériques adimensionnels : $\vec{F}_{op} \cdot \vec{v} = RI^2$ avec $I_{induit} \sim \gamma h |v| B_0 a$. Il en résulte que $\frac{\gamma h B_0^2 a^2}{4} v^2 \approx R_{eq} \gamma^2 h^2 B_0^2 a^2 v^2$, ce qui donne une expression simple pour la résistance :

$$R_{eq} \sim \frac{1}{\gamma h} \tag{11}$$

[6]. Comme on pouvait s’y attendre, sa valeur numérique est extrêmement faible $R_{res} \sim 2 \cdot 10^{-5} \Omega$.

5.4. Coefficient de frottement et énergie magnétique

Le coefficient de frottement peut se mettre sous une forme très synthétique en introduisant deux paramètres physiques, l’énergie magnétique W_{mag} créée par les bobines dans le volume du conducteur et le temps de relaxation τ du conducteur égal à $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$:

$$\alpha_{theo} = \gamma \mu_0 \int_{r=0}^{\infty} \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{B^2}{2\mu_0} R dR d\theta dZ = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \frac{W_{mag}}{c^2} = \frac{W_{mag}}{\tau c^2}$$

CONCLUSION

Des charges statiques situées à la surface des conducteurs guident les charges mobiles le long du circuit électrique. Mais ce sont des charges réparties en volume au niveau du générateur qui mettent les porteurs en mouvement. L’exemple traité dans cet article est un des rares cas où ce mécanisme peut être pratiquement mis à nu. L’architecture générale qui apparaît ainsi permet de comprendre les éléments essentiels régissant les courants induits, même si une solution rigoureuse reste hors de portée. Les situations réelles sont toujours infiniment plus riches que les schémas que nous pouvons esquisser. Les courants de Foucault ne dérogent pas à cette règle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DEIBER A. et IDDA H. « Étude expérimentale et première modélisation du freinage par courant de Foucault ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, février 2007, vol. 101, n° 891, p. 199-204.
- [2] DEIBER A. et PAVIET-SALOMON F. « L’énergie électrique ne passe pas par les fils ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, novembre 2003, vol. 97, n° 858 (2), p. 35-60. et d’autres références en bibliographie de cet article.
- [3] DEIBER A., MARKIEWICZ L., KEMPF O., PAVIET F. et Groupe GRESEP. « Phénomène d’induction associé au mouvement d’un aimant dans un tube de cuivre ». *Bull. Un. Phys.*, mars 2000, vol. 94, n° 822 (1), p. 487-509.

- [4] AGUIRREGARIBA J.M., HERNANDEZ A. et RIVAS M. « Magnetic braking revisited ». *Am. J. Phys.*, september 1997, vol. 65, n° 9.
- [5] CHESTER C.R. *Techniques in partial differential equations*. New York : McGraw-Hill, 1971.
- [6] WIEDERICK H.D., GAUTHIER N. et CAMPLBELL D.A. « Magnetic braking : simple theory and experiment ». *Am. J. Phys.*, june 1987, vol. 55, n° 6.
- [7] MEIER D., DEIBER A., PAVIET-SALOMON F. *L'intégrale des compositions de physique de l'Agrégation - Session 1985* : « Électromagnétisme et relativité restreinte », p. 61. Paris : Masson, 1998.



André DEIBER
Professeur
Lycée Kléber
Strasbourg (Bas-Rhin)



Hervé IDDA
Professeur en PCSI
Lycée Gustave Eiffel
Dijon (Côte-d'Or)

Annexe

Neuman rejoint Lorentz

Imaginons qu'un observateur O_{cond} lié à la plaque métallique veuille décrire ces courants de Foucault.

1. CHOIX D'UNE JAUGE DANS \mathfrak{R}_{bob}

Nous avons vu plus haut qu'un des choix possibles pour le potentiel vecteur est $\vec{A} = b_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \vec{e}_\theta$, soit $A_x = -B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \sin \theta$ et $A_y = B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \cos \theta$. On peut ajouter à A_x (resp. A_y) une fonction du type $\frac{d}{dX} g_1(X)$ (resp. $\frac{d}{dY} g_2(Y)$) sans modifier $\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Ces fonctions auxiliaires sont néanmoins indépendantes du temps, car le phénomène est stationnaire dans \mathfrak{R}_{bob} . Si $g_1 = g_2 = 0$, la jauge retenue est celle de Coulomb : $div \vec{A} = 0$. Par contre si $g_1 = 0$ et g_2 quelconque, il y a une relation simple entre le potentiel scalaire V et la composante A_y (cf. § 3.2.) : $V = vA_y$, que nous allons prendre comme condition de jauge ⁽³⁾.

2. IL N'Y A PLUS DE POTENTIEL SCALAIRE DANS \mathfrak{R}_{Cond}

En passant de \mathfrak{R}_{bob} dans \mathfrak{R}_{Cond} les potentiels se transforment d'après les relations approchées [7] valables pour $|v| \ll c$: $\frac{V'}{c} \cong \frac{V}{c} - \frac{v_Y}{c} A_Y$, $A'_x = A_x$, $A'_y \cong A_y - \frac{v_Y}{c} \frac{V}{c}$, $A'_z = A_z$.

Vu le choix de la jauge, le nouveau potentiel scalaire V' est nul au second ordre en $\frac{|v|}{c}$, et ce, en dépit de la présence de charge volumique au sein du conducteur. À cette précision, on peut aussi affirmer que $\vec{A}' = \vec{A}$.

3. CHAMP ÉLECTRIQUE DANS LE RÉFÉRENTIEL DU CONDUCTEUR

Dans la jauge considérée, le champ électrique se réduit à $\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$. La fonction g_2 est indépendante du temps, elle ne donne pas de contribution au champ électrique. Nous en tirons que :

(3) On peut qualifier cette jauge de transversale, car les deux quadrvecteurs $\left(\vec{A}, \frac{V}{c}\right)$ et $\left(\vec{v}, c\right)$ sont orthogonaux.

$$\vec{E}' = - \frac{\partial}{\partial t} \left(B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \vec{e}_\theta \right)$$

ou encore :

$$\vec{E}' = + B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_R - B_0 a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f(R)}{R} \right) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}' = + B_0 a^2 \frac{f(R)}{R} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_R - B_0 a^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{f(R)}{R} \right) \vec{e}_\theta$$

En notant que le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ du point M pendant le temps dt est :

$$d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta = v_Y dt \cos \theta \vec{e}_Y = dR \vec{e}_R + R d\theta \vec{e}_\theta$$

et que $dR = v_Y dt \sin \theta$, nous aboutissons au résultat du paragraphe 2.3. en tenant compte d'une rotation de la base polaire de 90° entre la figure 4 et la figure A. Dans $\mathfrak{R}_{\text{Cond}}$ c'est ce seul champ qui s'exerce sur les porteurs de charge.

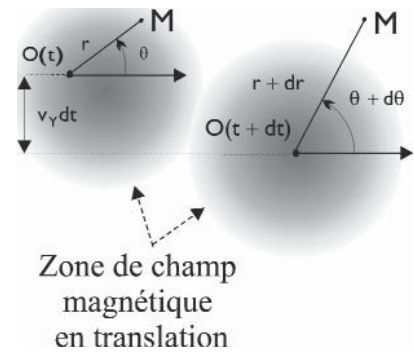


Figure A : Géométrie du problème.