

# Expérience de Melde

par **Jean-Paul ROUX**

*Retraité*

42240 Unieux

jean.p.roux@wanadoo.fr

## RÉSUMÉ

*L'expérience de Melde est une expérience qui a l'avantage de faire appel à l'observation visuelle de figures simples en permettant d'évoquer quantité de notions fondamentales qu'on retrouve dans de nombreux domaines de la Physique : résonance, impédance, grandeurs conjuguées. Son interprétation théorique peut être l'occasion de rencontrer des méthodes très générales et fondamentales.*

## UNE EXPÉRIENCE IMPORTANTE

Cette expérience, longtemps inscrite aux programmes des terminales C et D a disparu des programmes entre 1970 et 1980, elle vient de réapparaître dans le programme de Spécialité de terminale S qui propose l'étude des vibrations d'une corde fixée à ses deux extrémités et excitée par des forces de Laplace.

Il est conseillé d'utiliser un système d'excitation électromagnétique d'un fil conducteur, certains (pour des raisons matérielles) réutiliseront le dispositif de Melde (que je prendrai comme référence). Les conclusions sont communes ou très voisines.

Il ne s'agit en aucun cas d'inciter à faire entrer toutes les notions que je vais aborder dans un exposé devant les élèves de terminale, le point essentiel est bien entendu de respecter les textes et les limitations du programme et de ses commentaires. Mais le fait de convaincre les professeurs de la richesse exceptionnelle de cette manipulation ne pourrait manquer de profiter, in fine, aux élèves.

L'interprétation théorique couvre des domaines tellement vastes que je ne donnerai parfois que les résultats en renvoyant à des articles plus détaillés dans la bibliographie en insistant plutôt sur les conclusions à en tirer.

## LES GRANDEURS À OBSERVER

L'étude théorique classique de la propagation d'une déformation le long d'un fil ou d'une corde est basée sur un certain nombre d'hypothèses qui paraissent assez réalistes :

- ◆ Corde de poids négligeable devant sa tension assurée par une masse  $m$  accrochée à l'extrémité d'un fil passant sur une poulie ;

- ◆ Déformations transversales qui restent dans le plan de vibration de la source (pas de couplage des degrés de liberté aux points d'attache) ;
- ◆ Corde de raideur négligeable ;
- ◆ Déplacements visibles (c'est l'intérêt du dispositif) mais restant petits par rapport à la longueur totale de la corde ;
- ◆ Variations de la tension de la corde négligeables par rapport à la situation d'équilibre. Toutes les forces de tension ont pour intensité  $T_0$ .
- ◆ Frottements négligeables.

On note  $y$  l'écart avec la position de repos et  $\mu$  la masse linéique de la corde, la masse de la tranche de corde autour d'un point  $M$  vaut  $\mu dx$ . Appliquons-lui la deuxième loi de Newton :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{j} = \vec{T} + d\vec{T} - \vec{T} = d\vec{T}$$

Dans le cas où  $\theta$  reste petit, les variations de la mesure algébrique  $T \cos \theta \approx T_0$  de la projection de  $\vec{T}$  sur  $Ox$  restent négligeables et il vient sur l'axe  $Oy$  :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \cong T_0 d\theta = T_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$$

Toujours avec la même idée que  $\theta$  reste petit :  $\theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$  qu'on peut reporter dans l'équation :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx, \quad \text{soit: } \boxed{\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (1)$$

On reconnaît là l'équation caractéristique d'une propagation du déplacement  $y$  avec la célérité :  $\boxed{c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$ .  $c$  ne dépend pas de la fréquence  $N$  de vibration : il n'y a pas de dispersion.

On peut introduire la vitesse  $u = \frac{\partial y}{\partial t}$ . En dérivant l'équation (1) on trouve :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui est du même type. On peut aussi trouver la même équation pour  $\theta$  et pour l'énergie linéique ou densité d'énergie [6].

On voit que les grandeurs intéressantes ne se limitent pas à  $y$  qu'on voit le plus directement, mais sont aussi  $u$  (qui se déduit de  $y$ ) et  $\theta$  dont on peut montrer l'évolution avec un stroboscope. Les densités d'énergie cinétique  $\left(\frac{1}{2} \mu u^2\right)$  et potentielle  $\left(\frac{1}{2} T \theta^2\right)$  sont plus abstraites, mais se déduisent de  $u$  et  $\theta$ .

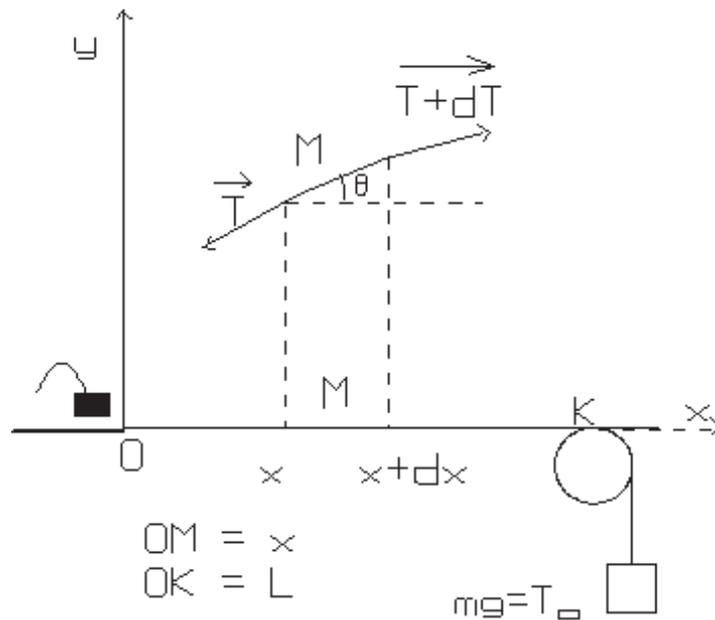


Figure 1

On sait (théorème de D'Alembert) [3] que les solutions de l'équation (1) sont de la forme :

$$u = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right), \text{ soit: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{c} \left[ -F'\left(t - \frac{x}{c}\right) + f'\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

d'où l'on tire :

$$\theta = \frac{1}{c} \left[ -F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

### IMPÉDANCE

Les grandeurs que nous venons de rencontrer sont extensives ( $y$ ) ou intensives ( $T\theta =$  mesure algébrique de la projection de  $\vec{T}$  sur  $Oy$ ).

D'une manière très générale on définit une impédance par :

$$Z = \frac{\text{grandeur intensive}}{\text{debit de grandeur extensive}}$$

Le « débit de  $y$  » est la vitesse  $u = \frac{\partial y}{\partial t}$ . On peut donc écrire  $Z = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}}$ . On retrouve la forme habituelle d'une impédance mécanique.

Remarquons que le produit  $T\theta$  par  $u = \frac{\partial y}{\partial t}$  a les dimensions d'une puissance.

$$Z(x) = \frac{T_0 \theta}{u} = \frac{T_0}{c} \frac{-F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right)}{F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right)} = \mu c \frac{-F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right)}{F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

On a en particulier :  $Z(L) = Z_L = c\mu \frac{-F\left(t - \frac{L}{c}\right) + f\left(t + \frac{L}{c}\right)}{F\left(t - \frac{L}{c}\right) + f\left(t + \frac{L}{c}\right)}$ , soit :

$$f\left(t + \frac{L}{c}\right) = F\left(t - \frac{L}{c}\right) \frac{1 + \frac{Z_L}{\mu c}}{1 - \frac{Z_L}{\mu c}}$$

Si un point est fixé, sa vitesse,  $u$ , est constamment nulle, l'impédance en ce point tend vers l'infini.  $K$  est un point fixe : la corde passe sur une poulie sans jamais en quitter la gorge, alors  $|Z_L| \rightarrow \infty$ , d'où  $f\left(t - \frac{L}{c}\right) = -F\left(t - \frac{L}{c}\right)$ , ce qu'on aurait pu trouver aussi par  $u(L) = 0$ .

Si la source de vibrations est sinusoïdale entretenue, on peut poser :

$$F\left(t - \frac{L}{c}\right) = A e^{j\omega t}$$

D'où :  $F\left(t - \frac{x}{c}\right) = F\left(t - \frac{L}{c} + \frac{L-x}{c}\right) = A e^{j\omega\left(t + \frac{L-x}{c}\right)}$

et :  $f\left(t + \frac{x}{c}\right) = A e^{j\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right)}$

On peut incorporer ces valeurs dans la définition de  $Z(x)$  :

$$Z(x) = \frac{-A e^{j\omega\left(t + \frac{L-x}{c}\right)} - A e^{j\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right)}}{A e^{j\omega\left(t + \frac{L-x}{c}\right)} - A e^{j\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right)}} = \frac{j}{\tan \frac{\omega(L-x)}{c}}$$

En  $O$  (même s'il y a un vibreur, il est beaucoup plus rigide que la corde) on peut considérer que  $|Z(0)| \rightarrow \infty$ , ceci implique que  $\tan \omega \frac{L}{c} = 0$ , soit  $\frac{\omega L}{c} = n\pi$ , qu'on peut lire :

$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2N}$ ,  $N$  étant la fréquence des vibrations du vibreur. Cette relation est sans doute celle qui sera la plus exploitée avec les élèves.

La façon dont nous avons trouvé cette relation semble indiquer qu'elle est toujours vérifiée, or  $L$  est fixe, alors que la fréquence imposée peut varier, l'égalité des deux membres ne peut avoir lieu que pour certaines valeurs de la fréquence (variable) imposée. On voit apparaître la notion de *résonance*. Mais on peut dire qu'il y a toujours des ondes stationnaires, leur qualité dépendant de l'accord entre la corde et la source de vibrations.

Expérimentalement on est donc amené à chercher « les bonnes valeurs » de  $N$  (dans l'esprit du nouveau programme) ou à faire varier  $L$  pour  $N$  et  $c$  fixées.

### NŒUDS / VENTRES

Il peut y avoir plusieurs points où  $Z(x) \rightarrow \infty$ . Pour ces points  $\theta$  varie beaucoup, la corde s'incline dans tous les sens (à observer avec un stroboscope), mais  $u$  reste nulle (donc y aussi, le point ne bouge pas). Ils sont tels que :  $L - x = k \frac{\lambda}{2}$  avec  $k < n$ . À la résonance  $x = 0$  satisfait aux mêmes conditions.

Si  $Z(x)$  est au contraire nulle  $u$  varie beaucoup ce qui entraîne de grands déplacements, mais  $\theta$  reste nulle,  $\left| \tan \frac{\omega(L-x)}{c} \right|$ . Ces points sont tels que  $L - x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$  avec  $\frac{2k + 1}{2} < n$ .

On prévoit ainsi une succession régulière de points particuliers espacés de  $\frac{\lambda}{4}$ .

On a l'habitude d'introduire le vocabulaire nœud/ventre, il convient de bien comprendre que les ventres de variations de  $u$  et  $y$  coïncident avec les nœuds de variation de  $\theta$  et vice versa. On peut dresser le tableau suivant :

|          |            |                   |                     |
|----------|------------|-------------------|---------------------|
| N        | V          | V                 | N                   |
| $\theta$ | $y$ et $u$ | Énergie cinétique | Énergie potentielle |
| V        | N          | N                 | V                   |

Tableau 1

*Parler de nœud et de ventre sans préciser la grandeur observée est une imprudence.*

Oralement on est inmanquablement amené à utiliser des raccourcis comme par exemple « ventre de  $y$  », alors qu'il s'agit de « ventre de variations de  $y$  ». On pourra utilement mettre en garde les auditeurs.

Un point important est la fixité des abscisses des nœuds et des ventres qui justifie le terme *d'ondes stationnaires*. La comparaison avec une onde progressive est intéressante : dans ce cas les maxima de  $\theta$  et  $u$  coïncident et « progressent » le long de  $Ox$ .

Les réglages et les mesures se font en observant  $y$ . Il convient toutefois de noter que les grandeurs fondamentales qui sont liées à la notion d'impédance sont plutôt  $u$  et  $\theta$ , d'observation hélas moins immédiate.

Dans le cas de l'excitation électromagnétique on se demandera où placer l'aimant. La réponse théorique est : en un point où l'impédance de la source de vibration est égale à l'impédance de la corde. Dans la pratique on trouvera ces points par tâtonnement plutôt près d'un nœud de déplacement.

On a prévu l'existence de points pour lesquels  $y$  serait nulle, l'observation montre que ce n'est pas le cas de façon absolument parfaite. L'écart provient des hypothèses de

départ qui ont été posées : les équations nous renvoient des résultats en accord avec les conditions que nous avons fixées à leur établissement, mais pas plus ! [4]

## CAVITÉ RÉSONANTE

On peut aborder la question d'un autre point de vue en considérant que le vibreur fournit une vibration qui se réfléchit en K (avec changement de signe), puis en O, puis en K, etc.

En régime établi le point M est donc soumis à la superposition d'une infinité d'ondes qui ont subi des réflexions aux extrémités O et K. Soient :

- ◆ a l'amplitude du mouvement du vibreur placé en O ;
- ◆ R le coefficient de réflexion en amplitude en K ;
- ◆ R' le coefficient de réflexion en amplitude en K' ;
- ◆  $\varphi_x = 2\pi \frac{x}{\lambda}$  ;  $\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda}$ .

Utilisons la notation complexe pour calculer l'amplitude du mouvement de M :

$$A = a e^{-j\varphi x} - a R e^{-j(2\varphi - \varphi x)} = a R R' e^{-j(2\varphi + \varphi x)} - a R R' R e^{-j(4\varphi - \varphi x)} + \dots$$

(les changements de signes proviennent des réflexions sur des obstacles fixes).

$$A = a \sum_{n=0}^{\infty} R^n R'^n e^{-j(2n\varphi + \varphi_x)} - a \sum_{n=0}^{\infty} R^{n+1} R'^n e^{-j2\varphi} e^{-j(2n\varphi + \varphi_x)}$$

Compte tenu de ce que  $R < 1$  et  $R' < 1$ , cette somme géométrique converge, il vient :

$$A = a \frac{e^{-j\varphi x} - R e^{-j(2\varphi - \varphi x)}}{1 - R R' e^{-2j\varphi}}$$

Soit A l'amplitude du mouvement de M :

$$A^2 = A \cdot A^* = a^2 \frac{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\varphi - \varphi_x)}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \varphi}$$

Les nœuds de variation de y sont donc tels que  $\sin(\varphi - \varphi_x) = 0$ , ce qui redonne les résultats du paragraphe précédent pour leurs positions. De la même façon on peut retrouver les positions des ventres. Les opticiens auront repéré la similitude avec l'étude d'une cavité de Pérot et Fabry et la fonction d'Airy.

$$(A^2)_{\text{ventre}} = a^2 \frac{(1 + R)^2}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \varphi} \quad \text{et} \quad (A^2)_{\text{noeud}} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \varphi}$$

Ces relations montrent mieux que le paragraphe précédent pourquoi il faut faire des réglages pour obtenir de belles ondes stationnaires. Il y a toujours des nœuds et des ventres, mais ils peuvent être plus ou moins marqués. Il faut satisfaire une condition de résonance qui minimise le dénominateur de  $(A^2)_{\text{ventre}}$ .

La résonance a lieu pour plusieurs fréquences multiples les unes des autres. On a là

l'occasion de retrouver le vocabulaire de la musique: *fondamental, harmoniques, Pythagore, Fourier*. À la résonance :

$$A_{\text{ventre}} = a \frac{1 + R}{1 - RR'} \quad \text{et} \quad A_{\text{nœud}} = a \frac{1 - R}{1 - RR'}$$

Ces relations peuvent (en partie) expliquer le fait que, même à la résonance, l'amplitude aux ventres est limitée et les nœuds ne sont pas parfaits [4].

On peut définir le *taux d'ondes stationnaires* par  $\tau = \frac{A_{\text{ventre}} - A_{\text{nœud}}}{A_{\text{ventre}} + A_{\text{nœud}}}$ . Ce nombre peut varier entre 0 (pas d'ondes stationnaires observables) à 1 (ondes stationnaires parfaites). On trouve qu'à la résonance  $\tau = R$ . Avec les dispositifs courants  $R \approx 1$ , à la résonance on doit voir de belles ondes stationnaires.

*Remarque :* avec  $R = R' = 1$ , l'amplitude prendrait la forme simple :

$$A = a \left| \frac{\sin(\varphi - \varphi_x)}{\sin\varphi} \right|$$

Cette expression permet de situer facilement les ventres et les nœuds, mais donne l'idée fautive que l'amplitude est infinie aux ventres à la résonance.

Ayant rencontré la notion de résonance on doit pouvoir définir un *facteur de qualité* qui mesure l'acuité de la résonance.

On peut représenter  $A_{\text{ventre}}$  à la résonance en fonction de la fréquence  $N$  du système excitateur, si c'est elle qu'on fait varier. On considérera qu'on est dans la bande à 3 dB tant que l'amplitude reste supérieure à  $\frac{A_{\text{ventre}}}{\sqrt{2}}$ . Le calcul donne :

$$Q = \frac{N}{\Delta N} = \frac{n\pi \sqrt{RR'}}{1 - RR'}$$

On peut en tirer les conclusions que  $Q$  est d'autant plus grand que :

- ◆  $RR'$  est voisin de 1 (c'est une confirmation des idées générales sur les rapports entre atténuation et acuité de résonance) ;
- ◆ que  $n$  est élevé, c'est-à-dire que la corde est longue par rapport à  $\lambda$ .

## AMORTISSEMENT

Les calculs que nous avons déjà faits ne tenaient pas compte de l'amortissement en

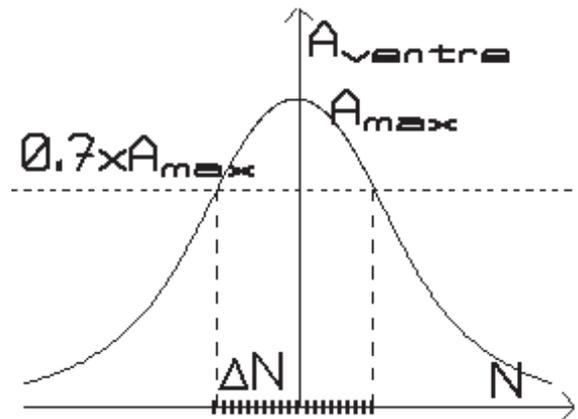


Figure 2

cours de propagation qui a deux sources :

- ◆ la plus importante : les frottements dans l'air ;
- ◆ les frottements internes à la corde (non négligeables avec des cordes métalliques).

On peut supposer une atténuation exponentielle en cours de propagation. Ceci revient à transformer  $\varphi_x$  et  $\varphi$  en grandeurs complexes :

$$\underline{\varphi}_x = \frac{2\pi x}{\lambda} - jfx \quad \text{et} \quad \underline{\varphi} = \frac{2\pi L}{\lambda} - jfL$$

$f$  est le *facteur d'atténuation en amplitude*.

Le calcul peut alors être conduit en effectuant la même sommation et on aboutit à :

$$A^2 = a^2 \frac{e^{-2fx} + R^2 e^{-2f(2L-x)} - 2R e^{-2fL} \cos 2(\varphi - \varphi_x)}{1 + R^2 R'^2 e^{-4fL} - 2RR' e^{-2fL} \cos 2\varphi}$$

Cette expression n'est pas commode à utiliser, mais on y voit quand même la confirmation que l'amplitude des nœuds de variations de  $y$  n'est pas nulle à cause des réflexions et des frottements, et la présence de fonctions de  $L$  au dénominateur induit une condition de résonance.

Il est évident que l'expérience n'est intéressante que si l'atténuation reste faible (mais pas annulable pour autant). On est donc tenté, pour voir l'influence des frottements de prendre  $R = R' = 1$  et de développer au premier ordre les exponentielles. On a la surprise de voir disparaître tous les termes en  $f$ , ce qui prouve que les frottements ont peu d'influence.

L'étude de l'acuité de la résonance ne peut se faire sans approximations. Une des plus évidentes consiste à regrouper l'atténuation avec les réflexions comme si elle n'avait lieu qu'en bout de parcours d'une longueur de la corde, ce qui transforme par exemple

$R$  en  $Re^{-fL}$ . Il ne nous reste plus qu'à écrire :

$$Q = \frac{n\pi \sqrt{RR'} e^{-fL}}{1 - RR' e^{-2fL}}$$

Les conclusions sur  $RR'$  sont inchangées, mais on voit apparaître une optimisation à trouver sur la longueur de la corde : on a intérêt à ce que  $n$  soit grand, donc de ce point

de vue à ce que  $L$  soit grande, par contre  $\frac{e^{-fL}}{1 - RR' e^{-2fL}}$  est une fonction décroissante de  $L$ .

Cela ne nous surprend pas : la propagation avec atténuation sur une grande longueur ne peut pas favoriser l'obtention de belles ondes stationnaires.

Une bonne méthode d'étude de l'influence des frottements est d'avoir recours à des simulations numériques [4].

## L'EXPÉRIENCE DE MELDE ET AU-DELÀ

L'énorme avantage de cette expérience c'est que les ventres et les nœuds de variation de  $y$  sont observables sans appareils de mesures plus ou moins mystérieux et la gran-

deur observée n'est pas abstraite comme dans d'autres domaines :

- ◆ acoustique où il faut un micro et un amplificateur ;
- ◆ électromagnétisme où il faut des boucles ou des antennes réceptrices.

D'autre part les « dessins » qui s'impriment dans la mémoire de l'observateur ne peuvent qu'aider à la compréhension des phénomènes correspondants :

- ◆ dans les tuyaux sonores ;
- ◆ en électromagnétisme : fils de Lécher, guides d'ondes et cavités optiques (pensons au laser en particulier) ;
- ◆ quantification dans un puits d'énergie potentielle.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ROUX J.-P. Corde vibrante - Expérience de Melde. *Bull. Un. Phys.*, mai 1975, vol. 69, n° 574, p. 939-948. Cet article comportait des erreurs dans des calculs (qui ne remettaient pas en cause les conclusions). L'une de ces erreurs a été signalée par un article (*cf.* [2]).
- [2] BARRAT J.-P. Sur l'équation de propagation des vibrations sur une corde. *Bull. Un. Phys.*, mars 1984, vol. 78, n° 662, p. 771-774 : une salutaire mise au point.
- [3] MAURAS D. Le théorème de D'Alembert : Application à la visualisation par ordinateur de la propagation d'ondes. *Bull. Un. Phys.*, mars 1993, vol. 87, n° 752, p. 337-352 : propagation, grandeurs conjuguées.
- [4] PENIGAUD A. Physique et méthodes numériques. *Bull. Un. Phys.*, novembre 2000, vol. 94, n° 828, p. 1763-1778 : calculs et illustrations très intéressants.
- [5] Concours général 1974 et 1992. Illustrent bien la similitude corde/cavité optique.
- [6] TANGUY P. et THOUROUDE D. Problèmes énergétiques liés à la propagation des ondes en mécanique. *Bull. Un. Phys.*, octobre 1979, vol. 74, n° 617, p. 49-58 : propagation de l'énergie.
- [7] ALLARD R. Étude d'un résonateur à fréquences multiples : Le ressort d'une ligne à retard. *Bull. Un. Phys.*, juin 1986, vol. 80, n° 685, p. 1009-1019 : les analogies sautent aux yeux.
- [8] MOREAU R. Propagation et réflexion d'une onde électromagnétique. Impédance caractéristique. *Bull. Un. Phys.*, octobre 1979, vol. 74, n° 617, p. 1-12 : rappelle les connections avec la propagation le long d'une corde ou dans un tuyau sonore.
- [9] BOURGEOIS J. Courants HF et ondes électromagnétiques. *Bull. Un. Phys.*, avril 1976, vol. 70, n° 583, p. 831-74 : tout sur la question avec des observations visuelles avec des ampoules, mais les grandeurs mesurées sont beaucoup plus abstraites qu'avec l'expérience de Melde.



Jean-Paul ROUX  
Professeur retraité