

L.P. 23 - Traitement d'un signal. Étude spectrale

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- AOP
- Système linéaire
- Fonction de transfert
- Notions d'électrocinétiques

Bibliographie

- Physique Tout en un MPSI 3e edition, Sanz, *Dunod*
- Expériences de physique, Bellier, *Dunod*
- Physique PSI, Renvoizé, *Pearson*
- Électronique PSI, Brenders, *Bréal*
- Physique Tout en un PSI, Cardini, *Dunod*
- Expériences d'électronique, Duffait, *Bréal*

Introduction

Que ce soit pour recevoir la radio ou regarder la télévision, la transmission d'un signal entre un point A et un point B est un phénomène omniprésent dans la vie de tous les jours. Dans la pratique les signaux physiques observés sont la superposition d'un grand nombre de signaux harmoniques de fréquences différentes. Par exemple, le son émis par un instrument de musique résulte d'une superposition de sons harmoniques dont les fréquences sont liées aux résonances acoustiques du système et à la manière dont on met ce système en vibration. On peut en faire l'expérience en analysant une note de piano ou de guitare. Lors de la génération de la note, on commence par entendre un son riche (nombreuse composante). Puis, les différentes composantes ne s'amortissant pas sur les mêmes échelles de temps, la composition du son s'appauvrit pour finir quasiment comme un son harmonique pur.

C'est cette richesse harmonique qui procure des sonorités bien différentes au piano et au clavecin alors que les deux instruments sont quasiment identiques et que seule la manière d'attaquer la corde diffère (frappée pour le piano et pincée pour le clavecin).

La restitution du son par une chaîne à haute fidélité nécessite, pour des raisons mécaniques, la séparation du signal en plusieurs parties que l'on envoie sur les différents haut-parleurs en fonction de leur fréquence.

Le principe physique du transport de l'information par les ondes électromagnétiques et la modulation de fréquence est un autre exemple de l'intérêt de savoir mélanger et filtrer des signaux non sinusoïdaux.

Il est ainsi primordial de savoir analyser la richesse d'une grandeur périodique, non seulement car les signaux naturels sont rarement sinusoïdaux, mais encore en tant que physicien lors du traitement ou de la synthèse de ce même signal.

1. Rappels sur l'analyse de Fourier

1.1 Principe général de la décomposition en série de Fourier

Soit f , une fonction T -périodique, représentant par exemple un signal de pulsation $\omega = 2\pi/T$ et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors f peut s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique, appelée série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1)$$

avec $\forall n \geq 0$, $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$ et $\forall n \geq 1$, $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$.

Rq :

- si f est paire, sa décomposition en série de Fourier ne comportera que des termes en cosinus de sorte que $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$;
- si f est impaire, on n'aura que des termes en sinus et $\forall n \geq 0$, $a_n = 0$. Il faut donc, comme toujours, commencer par analyser la parité avant de se lancer dans un calcul inutile ;
- du fait de la périodicité de la fonction $f(t)$, le résultat des intégrales ne dépend pas de la borne inférieure, pourvu que l'on intègre bien sur une période T entière. Pour une fonction impaire, on a par exemple intérêt à calculer $\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$

plutôt que $\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$.

Ainsi, un signal $f(t)$ périodique peut s'analyser comme la somme d'un signal constant $a_0/2$ et d'un nombre infini de signaux sinusoïdaux $f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$, respectivement de pulsation $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$, appelés harmoniques et constituant l'ondulation du signal. Le terme constant $a_0/2$ représente la valeur moyenne $\langle f(t) \rangle$ du signal. L'harmonique $n = 1$, de pulsation ω , est appelé harmonique fondamental de la série car il est de même période que la fonction.

En regroupant les termes de même pulsations $n\omega$, on peut aussi écrire cette somme comme :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad (2)$$

avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan \phi_n = -b_n/a_n$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = a_0/2$.

1.2 Caractéristique d'un signal périodique

Un signal $f(t)$ est périodique s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux :

$$\exists T \in \mathcal{R} \text{ tel que, } \forall t \in \mathcal{R}, \text{ on a } f(t+T) = f(t)$$

L'intervalle de temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction est la période T . La fréquence f du signal est l'inverse de la période T :

$$f = \frac{1}{T}, \text{ avec } f \text{ en hertz (Hz) si } T \text{ en seconde}$$

La valeur moyenne F_m d'un signal périodique, exprimée dans la même unité que le signal, est par définition calculée sur un intervalle dont la largeur est égale à une période :

$$F_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(u) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3)$$

Le carré de la valeur efficace F_{eff} d'un signal périodique est par définition égale à la valeur moyenne du carré de ce signal :

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (4)$$

En utilisant le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right) \quad (5)$$

Le théorème de Parseval a donc l'interprétation suivante : la puissance moyenne du signal est la somme des puissances transportées par chacun de ses harmonique. Cela peut être réécrit :

$$F_{eff}^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2} \quad (6)$$

1.3 Spectre

MANIP : spectre d'un signal périodique avec un diapason/puis deux, puis mesure de la fréquence du diapason en faisant la FFT sur l'oscilloscope.

Le spectre de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ de période $T = 2\pi/\omega$ est le graphe donnant les coefficients a_n et b_n en fonction de $n\omega$.

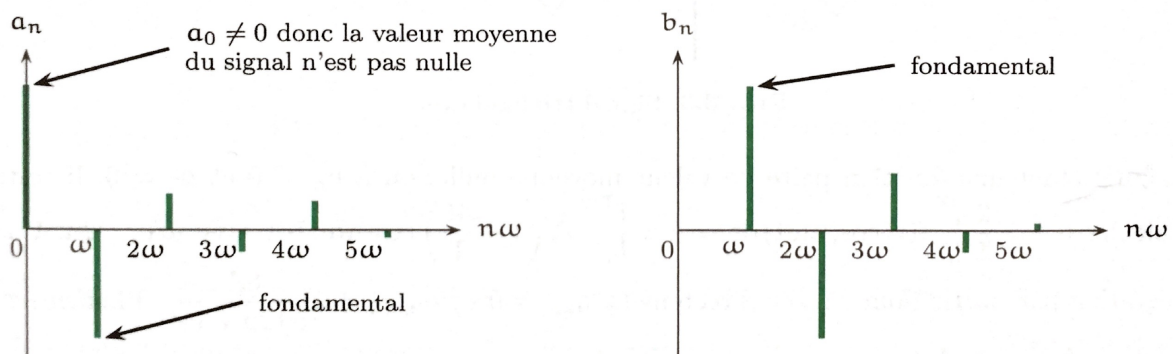


FIG. 3.1. Spectre de Fourier d'un signal.

En pratique on s'intéresse souvent seulement à l'amplitude des différents harmoniques : on parle alors abusivement du spectre pour le graphe $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en fonction de $n\omega$. Cette seule donnée est insuffisante pour pouvoir remonter à la fonction $f(t)$, il faudrait en effet connaître également ϕ_n en fonction de $n\omega$.

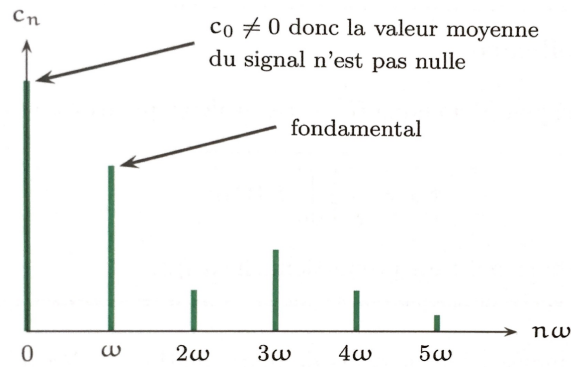


FIG. 3.2. Spectre de Fourier simplifié d'un signal.

La présence d'un harmonique de pulsation nulle montre que la fonction est de valeur moyenne non nulle et la lecture de la pulsation ω de l'harmonique fondamental $n = 1$ donne accès à la période $T = 2\pi/\omega$ du signal.

1.4 Exemple du signal créneau

(Autre résolution p11 du Bréal)

On considère un signal créneau de valeur moyenne nulle et d'amplitude A , représenté sur la figure. Le signal choisi est une fonction impaire du temps, cela simplifie le calcul des coefficients de Fourier sans nuire à la généralité des conclusions.

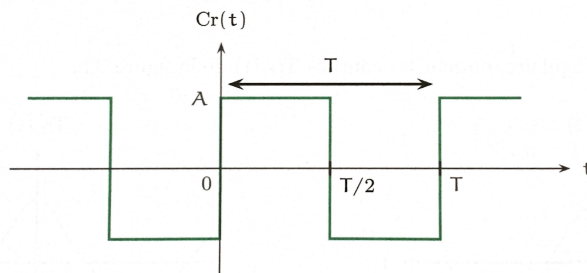


FIG. 3.6. Signal créneau.

Le signal étant une fonction impaire de valeur moyenne nulle, on a $a_n = 0$, il faut pour finir calculer $b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = 2 \int_0^{T/2} A \sin(n\omega t) dt$ toujours avec $\omega T = 2\pi$.

En intégrant on a $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{4A}{\pi(2p+1)}$, donc $Cr(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega t)$.

Le spectre de Fourier est donné sur les figures suivantes. La courbe en pointillé représente la décroissance en $1/n$ des amplitudes des harmoniques.

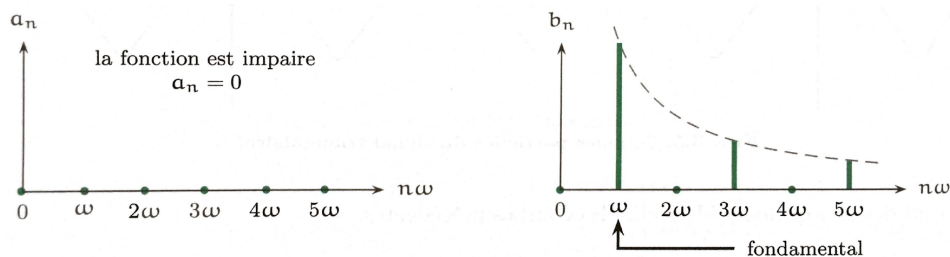


FIG. 3.7. Spectre de Fourier d'un signal créneau.

En calculant les sommes partielles $Cr_N(t)$ on obtient les courbes de la figure suivante. L'analyse de ces courbes apport quelques nouvelles remarques :

- Plus il y a d'harmoniques, plus la somme partielle ressemble à l'original ;
- Même avec un nombre important de termes, la somme partielle diffère assez nettement de la fonction. La décroissance des coefficients en $1/n$ est en effet plus lente que pour un signal triangulaire. C'est la discontinuité de la fonction qui rend plus difficile la convergence ;
- Les harmoniques de rang élevé permettent de mieux restituer la discontinuité, mais occasionnent en même temps de fortes oscillations en son voisinage. Ce phénomène est connu sous le nom du "problème de Gibbs" ; il est lié à la nature de la convergence de la série vers la fonction. Joseph Fourier eut d'ailleurs beaucoup de mal à faire admettre ses idées par l'académie des sciences, ses contradicteurs pensaient en effet qu'il était impossible qu'une fonction discontinue soit la limite d'une somme, même infinie, de fonctions continues.

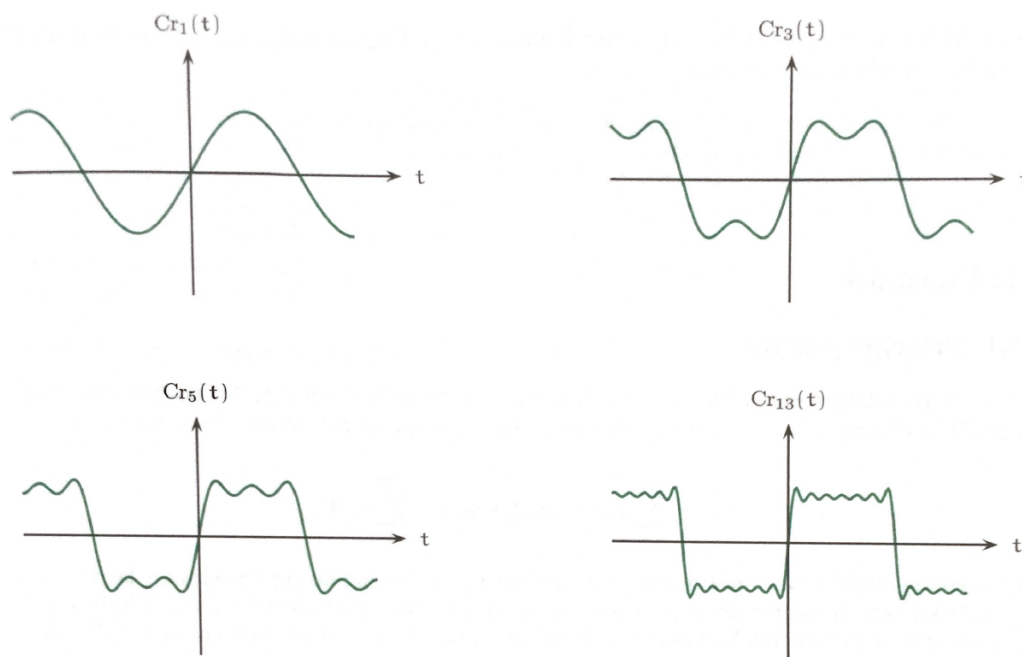


FIG. 3.8. Séries partielles du signal créneau.

Rq : Pb de Gibbs

On retiendra que la décroissance des harmoniques est d'autant plus lente que la fonction est irrégulière, et que la convergence est difficile au voisinage des discontinuités. On dit que les irrégularités du signal contribuent à la "largeur du spectre".

En toute rigueur, il faut un nombre infini d'harmoniques pour reconstituer un signal périodique à partir de sa série de Fourier. Cependant, en pratique, l'amplitude c_n des harmoniques décroît lorsque n augmente. Il est donc possible d'obtenir une approximation du signal en tronquant sa série de Fourier jusqu'à un certain rang. De manière évidente, l'approximation s'améliore lorsque le nombre d'harmonique pris en compte augmente.

2. Filtrage linéaire

Un signal utile est souvent accompagné d'un bruit ou d'autres signaux inutiles. Il est alors possible de filtrer le signal brut afin d'en extraire le signal utile. Exemples : télévision (plusieurs chaînes, dont une est désirée), téléphone (plusieurs communications, dont

une est destinée à l'utilisateur).

Un filtre est un quadripôle qui a pour rôle de transmettre, sans déformation, les composantes sinusoïdales d'un signal complexe dans un domaine de fréquence constituant sa bande passante et d'éliminer les composantes sinusoïdales du signal complexe hors de sa bande passante (bande coupée). Le filtre parfait ou idéal est celui pour lequel le module de la fonction de transfert est égale à 1 dans sa bande passante et 0 dans sa bande coupée.

Un filtrage linéaire n'ajoute pas de nouvelles fréquences au signal.

Rq : Filtre linéaire

- Ordre 1 : $A \frac{ds(t)}{dt} + Bs(t) = C \frac{de(t)}{dt} + De(t)$
- Ordre 2 : $A' \frac{d^2s(t)}{dt^2} + B' \frac{ds(t)}{dt} + C's(t) = D' \frac{d^2e(t)}{dt^2} + E' \frac{de(t)}{dt} + F'e(t)$

2.1 Principe général

On s'intéresse à un système linéaire sollicité par une entrée périodique $e(t)$. On peut alors mettre à profit la décomposition en série de Fourier de ce signal que l'on écrit sous la forme :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) \quad (7)$$

Le système étudié étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition : la réponse globale $s(t)$ est la somme des réponses à chacun des harmoniques ($s(t) = s_1(t) + s_2(t)$). Il suffit donc d'évaluer séparément les réponses aux harmoniques de pulsation $n\omega$. La décomposition en série de Fourier ramène donc directement à l'étude mono-harmonique.

De plus, les signaux sinusoïdaux étant des fonctions isomorphes des systèmes linéaires, chaque composante du signal de sortie est de la forme $s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \phi'_n)$. Il est alors judicieux d'introduire la fonction de transfert complexe du système :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) \exp(j\phi(\omega)) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

En effet, quand on isole une des composantes $e_n(t) = E_n \cos(n\omega t + \phi_n)$, on sait que la sortie associée à cet harmonique est :

$$s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \phi'_n) \quad (8)$$

Avec $S_n = H(n\omega)E_n$ et $\phi'_n = \phi_n + \phi(n\omega)$.

La fonction de transfert nous donne deux informations :

- le rapport des amplitudes grâce au module : $|\underline{H}(j\omega)| = S_n/E_n$
- le déphasage grâce à son argument : $arg(\underline{H}(j\omega)) = \phi$

2.2 Représentation des fonctions de transfert harmonique

On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes :

- la courbe de gain : tracé du module $G(db)$, en décibels, en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f en échelle logarithmique :

$$G(\text{dB}) = 20 \log(H(\omega)) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

- la courbe de phase : tracé de l'argument $\phi(\omega)$, en radians, ou en degrés, en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f en échelle logarithmique.

Il est souvent utile d'étudier le comportement aux limites des très basses fréquences et des très hautes fréquences d'un circuit électronique. En échelle logarithmique, cela correspond aux deux limites à l'infini de l'axe des abscisses. Nous chercherons systématiquement ces deux asymptotes pour toute fonction de transfert.

On appelle diagrammes asymptotiques les diagrammes de Bode réduits à leurs asymptotes.

L'abscisse du point d'intersection des deux asymptotes de la courbe de gain, lorsqu'il existe, constitue la pulsation de cassure ou brisure.

Bande passante à -3 dB

La courbe de gain d'un circuit réel présente toujours une borne supérieure, car physiquement, le gain ne peut pas être infini. Lorsque c'est possible, on définit alors une ou deux pulsations de coupure ($\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$).

On appelle pulsation de coupure du filtre toute pulsation ω_c telle que :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

où H_{max} désigne la valeur maximale prise par le module de la fonction de transfert (l'amplification).

La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquence pour lequel :

$$|\underline{H}| > \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

En décibels, la définition d'une pulsation de coupure correspond à un point d'intersection de la courbe de gain avec une droite horizontale située à -3dB sous le maximum.

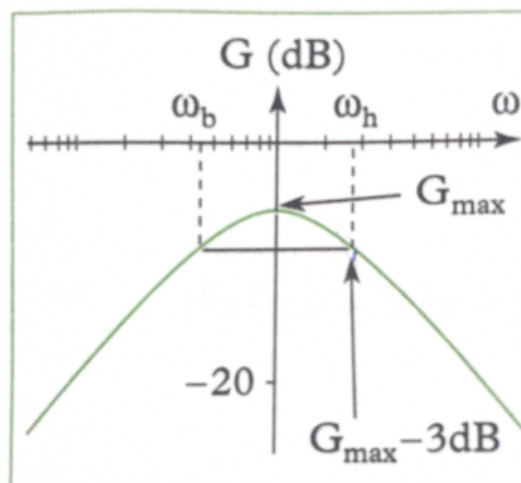


Fig. 13 - Définition de la bande passante à -3 dB.

2.3 Filtre du premier ordre

(Aussi bien expliqué dans le tout en un MPSI-PCSI-PTSI 3eme edition p.404)

On sait que pour les filtres du premier ordre on a $A \frac{ds(t)}{dt} + Bs(t) = C \frac{de(t)}{dt} + De(t)$.
En supposant un régime harmonique alors $H = \underline{s}/\underline{e} = (D + j\omega C)/(B + j\omega A)$.

Voyons les principaux filtres du 1er ordre.

Filtre passe-bas

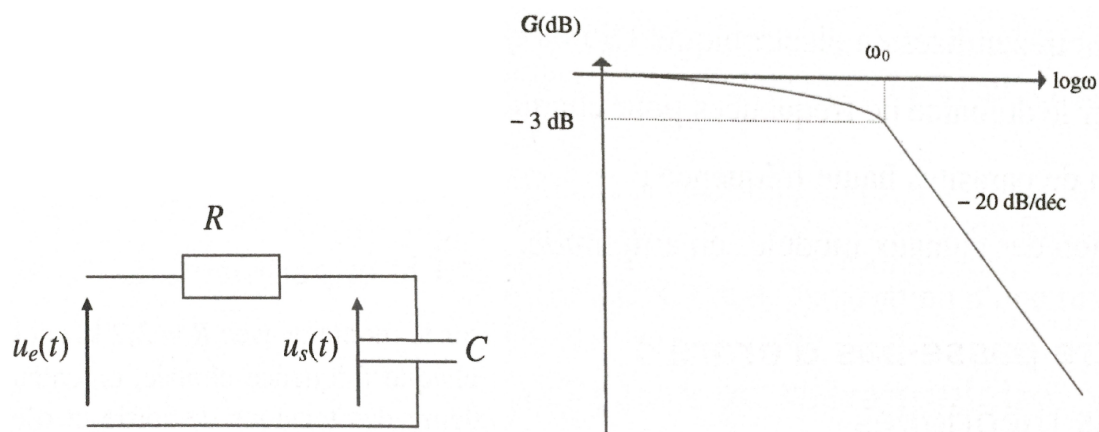


FIGURE 1 – Filtre passe bas

$u_e(t)$ désigne une tension alternative sinusoïdale. En notation complexe, la fonction de transfert de ce quadripôle est égale à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (11)$$

On a un diviseur de tension.

Le module de la fonction de transfert de ce filtre est de la forme :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (12)$$

avec $\omega_0 = 1/RC$. Ce module correspond l'amplification en tension.

Le gain en tension est tel que $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(H(\omega))$. Pour caractériser les propriétés d'un filtre, il est nécessaire de définir le domaine de fréquences (bande passante) pour lequel le signal de sortie est d'une amplitude "suffisante".

Pour définir ce domaine de fréquence on cherche la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert est maximal. Ici $H_{max} = 1$ quand ω tend vers 0 et $G_{max} = 0dB$. Puis, il faut déterminer la ou les fréquences de coupure (f_C ou ω_C), avec $H(\omega_C) = H_{max}/\sqrt{2}$ et donc :

$$G(\omega_C) = 20 \log(H(\omega_C)) = 20 \log(H_{max}) - 10 \log(2) = G_{max} - 3dB, \text{ car } 10 \log(2) \approx 3$$

Ici $H(\omega_C) = H_{max}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$. La pulsation de coupure à $-3dB$ est donc $\omega_C = \omega_0$.

Filtre passe-haut

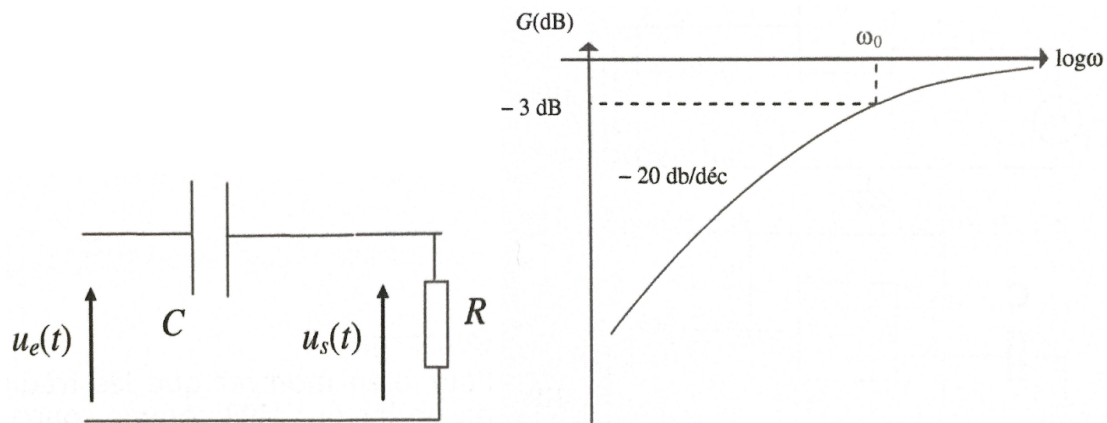


FIGURE 2 – Filtre passe-haut

Dans ce cas le fonction de transfert s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (13)$$

avec $\omega_0 = 1/RC$. On a un gain maximum pour $\omega \rightarrow \infty$ donc passe haut.

2.4 Filtre du second ordre

On sait que pour les filtres du second ordre on a $A' \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + B' \frac{ds(t)}{dt} + C' s(t) = D' \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + E' \frac{de(t)}{dt} + F' e(t)$.

Plus l'ordre d'un filtre est élevé, plus forte sera l'atténuation en sortie (-40dB/déc. pour un filtre d'ordre 2 et -20dB/dec pour un filtre d'ordre 1) quand on se trouve hors de la bande passante et donc plus le filtre est efficace.

Rq : En effet système ordre 2 pour le basse-bas par exemple : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

avec σ le coefficient d'amortissement. Alors en posant $x = \omega/\omega_0$, $G(dB) = -10 \log[(1 - x^2)^2 + 4\sigma^2 x^2]$, $\omega \rightarrow \infty \Leftrightarrow G(dB) \rightarrow -40 \log(x)$.

Filtre passe-bas et passe-haut

On utilise les circuits R,L,C en posant $Q = 1/2\sigma = \omega/\Delta\omega$, le facteur de qualité et $\Delta\omega$ pris à -3dB :

- Passe-bas : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

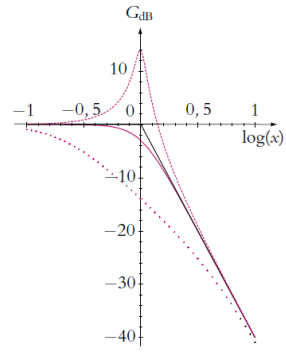
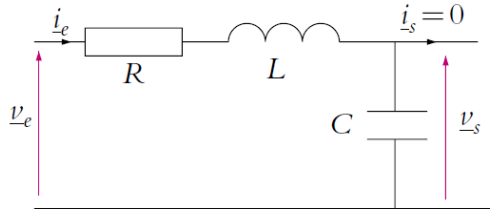


Figure 18.28 Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bas du second ordre pour différentes valeurs du facteur de qualité : pointillés : $Q = 5$, trait plein : $Q = 1/\sqrt{2}$, croix : $Q = 0,2$.

- Passe-haut : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\underline{H}(j\omega) = \frac{-H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

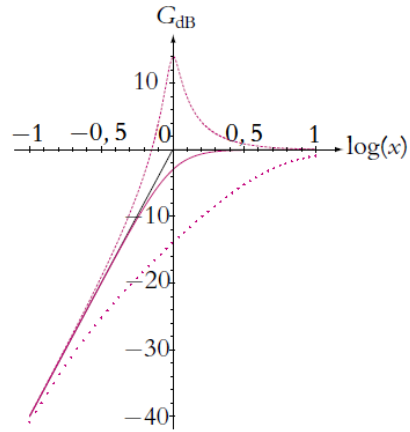
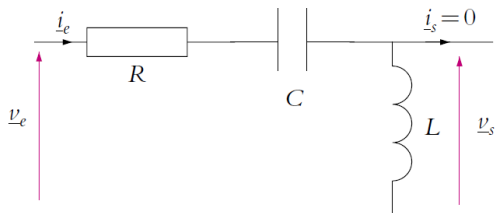
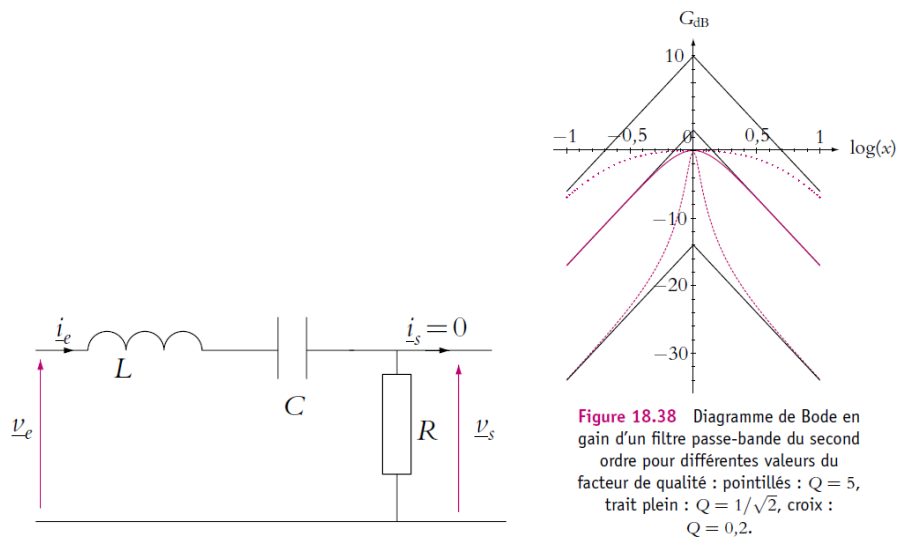


Figure 18.33 Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-haut du second ordre pour différentes valeurs du facteur de qualité : pointillés : $Q = 5$, trait plein : $Q = 1/\sqrt{2}$, croix : $Q = 0,2$.



Filtre passe-bande

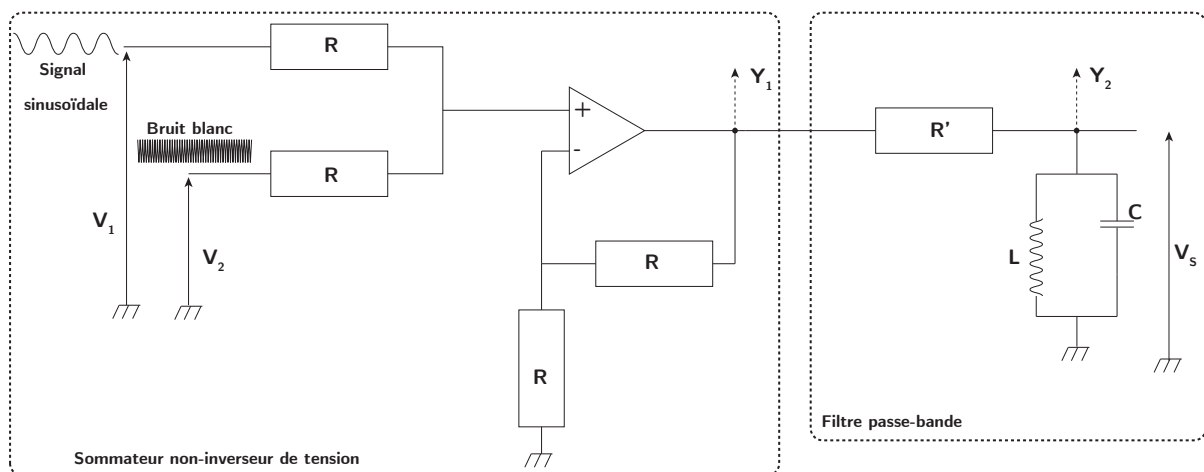


On trouve :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (14)$$

Application au filtrage d'un signal bruité : MANIP : Montage signal + bruit

Pour le sommateur non inverseur : on prend quatre résistances identiques ($R = 10k\Omega$). Le sommateur non inverseur permet de sommer un signal sinusoïdal avec un générateur de bruit blanc (compris entre 10Hz et 100kHz).



Le courant étant nul et les résistances toutes égales à R , on trouve la tension V^+ via le théorème de Millman et V^- par un pont diviseur. Ainsi sachant que les quatre résistances sont identiques :

$$V^+ = \frac{\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R}}{\frac{2}{R}} \quad (15)$$

$$V^- = V_S \left(\frac{R}{2R} \right) = \frac{V_S}{2}$$

Or $V^+ = V^-$, car l'AOP est supposé idéal, en régime linéaire, alors $V_S = V^+ + V^-$, on somme bien les deux signaux.

Pour ce qui est du filtre passe bande on prendra $R' = 47k\Omega$, $L = 17mH$ et $C = 14nF$, sachant que la fréquence du signal initial est $f_0 = 10kHz$.

Le bruit est compris entre 10Hz à 100Hz. Ainsi pour essayer de centrer sur f_0 on choisit les valeurs de la conductance et l'inductance selon $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

3. Modulation-démodulation

Les systèmes de télécommunication ont pour objet de transmettre des informations à l'aide d'un signal se propageant dans l'espace ou le long d'une ligne, de son point d'émission à celui de réception. Que ce soit en transmission hertzienne (radio, TV, ...), en téléphonie ou en transmission de données, le procédé de modulation est la solution considérée comme la plus efficace. Le signal à transmettre (ou signal modulant) est utilisé pour moduler (faire varier) une des caractéristiques d'un signal porteur, de fréquence plus élevé.

Tout d'abord, rappelons que la voix humaine produit des sons dont les fréquences sont comprises entre 100 et 7500Hz. Pour un orchestre, la plage est 30/20000Hz. Supposons que l'on veuille transmettre de tels signaux par voie hertzienne. La transmission directe est impossible ; en effet :

- il n'est pas possible, à la réception, de distinguer ce signal de tout autre signal encombrant la même plage de fréquence (signaux "industriels" à 50Hz par exemple) ;
- les dimensions des antennes, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, auraient des valeurs irréalistes (ex : pour $f = 1kHz$, $\lambda = cT = c/f = 300km$) ;
- de plus, l'éventuelle antenne ne serait pas adaptée pour des signaux de 50Hz à 15kHz, par exemple, qui est la plage retenue pour la transmission en radio commerciale.

La modulation utilise des fréquences de porteuses de 100kHz à 100MHz typiquement (jusqu'à plusieurs GHz pour les transmissions entre paraboles). Le spectre du signal utile est translaté vers la fréquence de la porteuse, sa bande de fréquence relative est réduite d'autant.

3.1 Principes

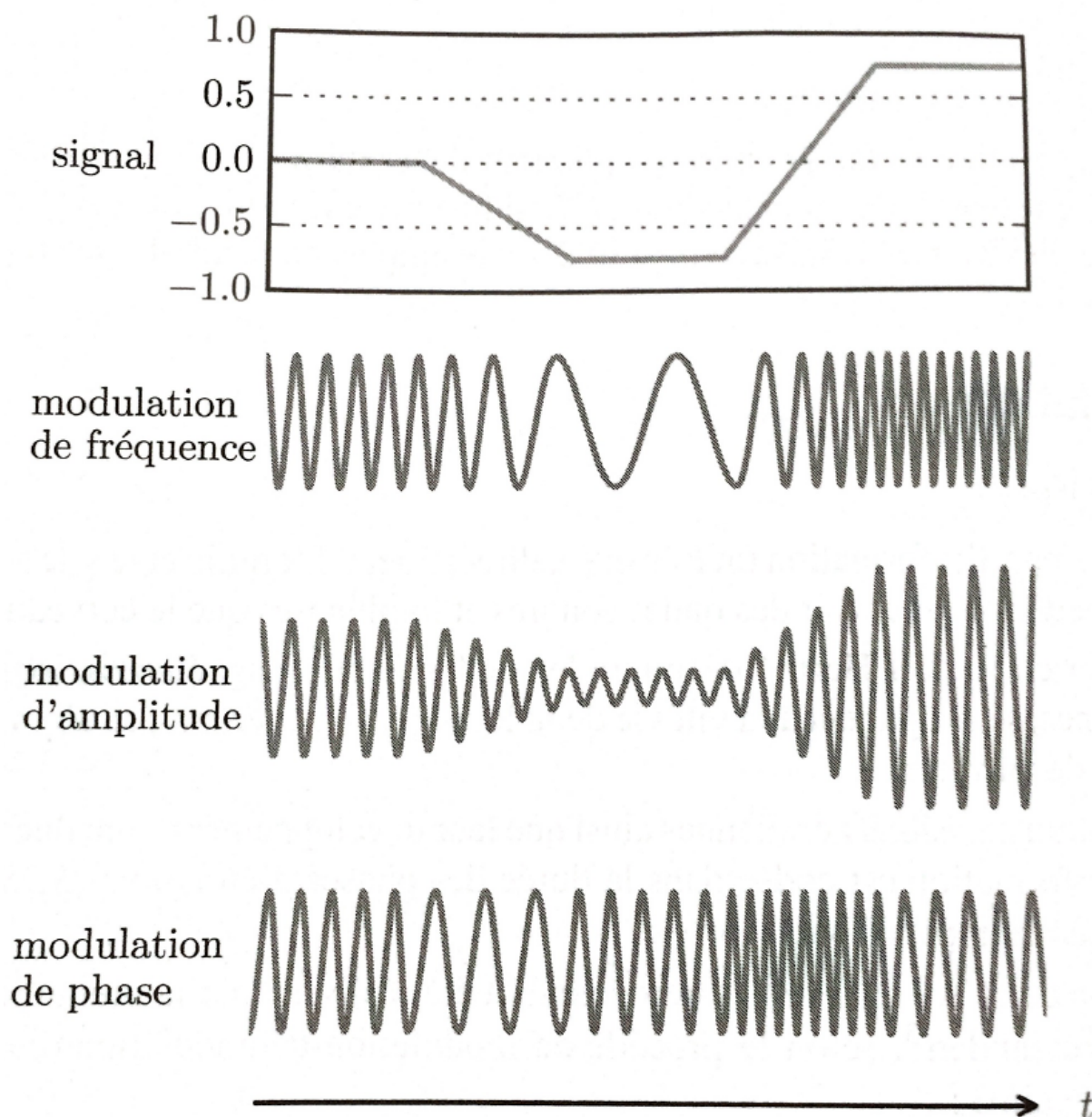
Le principe de la modulation est le suivant :

- on part d'un signal porteur sinusoïdal $s_p(t)$ de haute fréquence, couramment appelée la porteuse, caractérisé par trois paramètres : son amplitude A_p , sa fréquence f_p et sa phase ϕ_p :

$$s_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$

- on module un des trois paramètres de la porteuse, en fonction du signal $s(t)$ à transmettre.

En fonction du paramètre modifié, on obtient les trois types de modulation, représentées ci dessous :



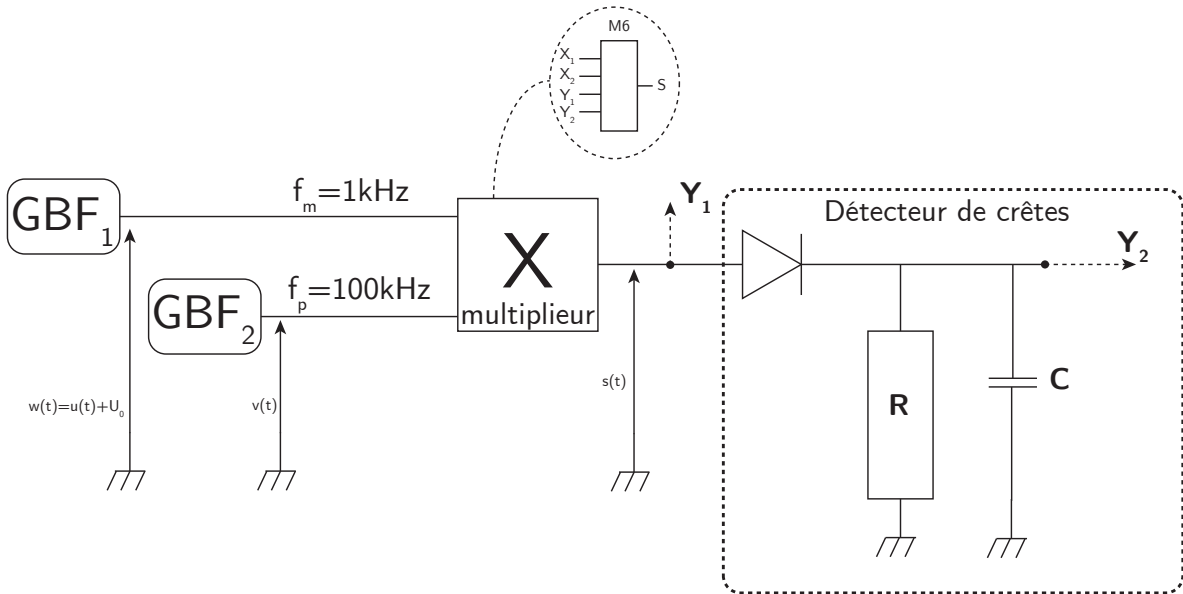
La modulation d'amplitude est la plus ancienne, elle est encore utilisée pour les émissions en Grandes Ondes ou ondes AM (Amplitude Modulation). En France, la plage de fréquence attribuée à la modulation d'amplitude est la plage 150-300 kHz. C'est la plus simple à mettre en oeuvre, elle sera étudiée en détail.

La modulation de fréquence lui est souvent préférée de nos jours, du fait de sa meilleure immunité au bruit. Elle est utilisée en radiophonie dans la bande FM (Frequency Modulation); la plage qui lui est dévolue en France est la plage 87-108 MHz.

Enfin, la téléphonie mobile et la technologie Wifi utilisent respectivement des bandes de fréquence au voisinage de 900 MHz et 2.4 GHz. Les signaux transmis sont numériques, et les modulations angulaires.

3.2 Application à la modulation et démodulation d'amplitude

MANIP : Aide page 291 du Bellier



Modulation

Une tension modulée en amplitude est une tension qui garde une fréquence constante mais dont l'amplitude varie en fonction du temps. Soient $s(t)$ le signal modulé en amplitude ; Ω la pulsation de la porteuse et ω la pulsation instantanée du signal à transporter. En choisissant un signal modulant de forme sinusoïdale, on ne restreint pas notre étude car tout signal complexe (périodique) peut être décomposé en série de Fourier, donc en une somme de sinusoïdes pures. Il est assez simple de produire une tension modulée en amplitude (ce qui n'est pas le cas pour une tension modulée en fréquence). On utilise, pour créer une tension modulée en amplitude, un simple multiplieur électronique.

Il se présente sous la forme d'un circuit intégré dont les connexions sont représentées sur la figure. Sur l'entrée X_1 on applique une tension $w(t) = u(t) + U_0$ est la tension modulante (signal à transporter de basse fréquence) et U_0 une tension de décalage. Sur l'entrée Y_1 , on applique une tension $v(t)$ qui représente la porteuse de haute fréquence.

En sortie S on récupère le signal $s(t) = 0.1 \cdot w(t) \cdot v(t)$.

Si $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\Omega t)$ alors

$$s(t) = 0.1V_m[U_0 + U_m \cos(\omega t)] \cos(\Omega t)$$

En mettant U_0 en facteur, il vient

$$s(t) = A[1 + m \cos(\omega t)] \cos(\Omega t)$$

où $A = 0.1U_0V_m$ et $m = U_m/U_0$. A représente l'amplitude de la tension modulée et m le taux de modulation.

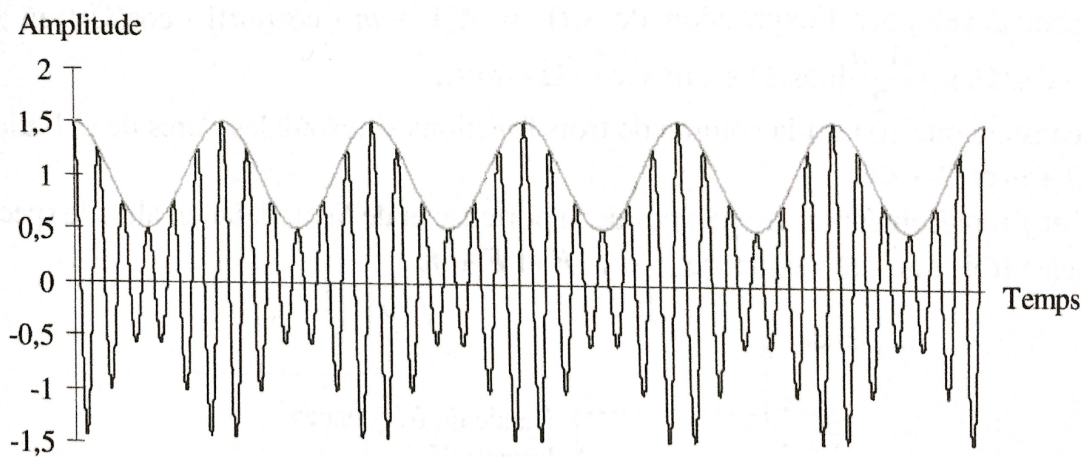
Pour la manip on prend diode de germanium car tension au seuil 0.2V. La diode sert à lever la partie négative du signal modulé. On prend $C = 111nF$ et $R = 10k\Omega$. Prendre des résistances et conductivité variable pour vérifier et aller plus vite. Pour choisir il faut avoir la condition :

$$f_m < \frac{1}{2\pi RC} < f_p$$

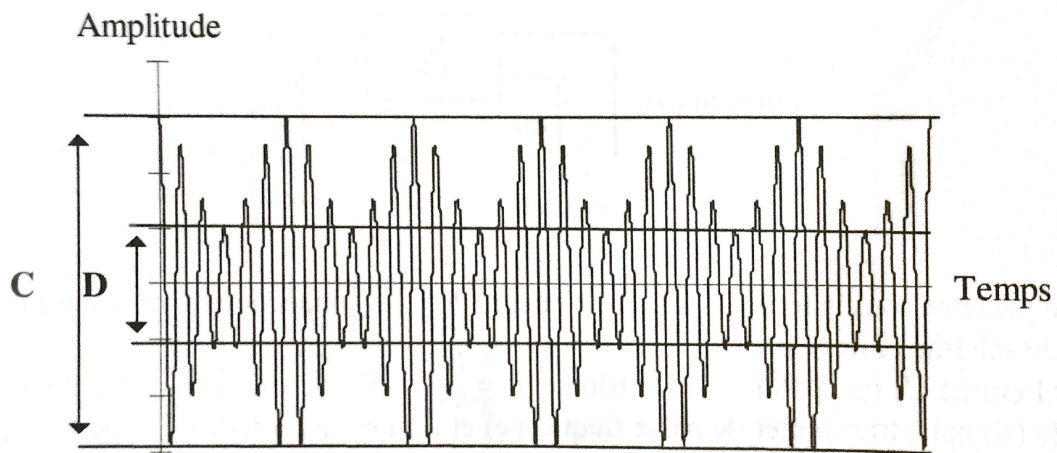
Ne pas oublier de régler amplitude pour les deux GBF :

- pour le GBF₁, $A = 2V_{pp}$, Offset=1.3V

- pour le GBF₂, $A = 4V_{pp}$, Offset=0V



Tension modulée et signal modulant



Modulation d'amplitude

Déterminons le taux de modulation. L'amplitude maximale crête à crête est $C = 2A(1 + m)$; l'amplitude minimale crête à crête est $D = 2A(1 - m)$. On a donc $C + D = 4A$ et $C - D = 4Am$. On peut alors définir le taux de modulation par :

$$m = \frac{C - D}{C + D} \quad (16)$$

Pour obtenir une bonne modulation il faut que $m < 1$ donc que $U_m < U_0$ et que la fréquence de la porteuse soit nettement supérieur à la fréquence de la modulante.

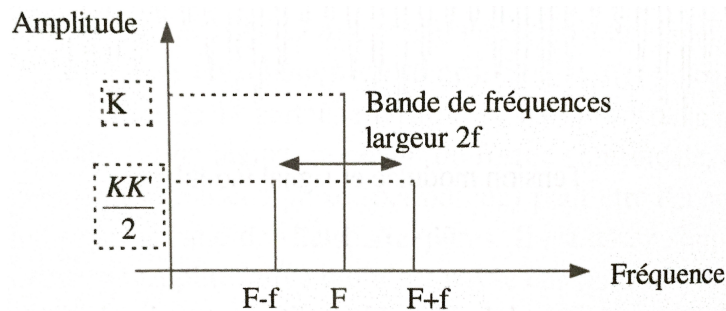
En utilisant la relation trigonométrique $\cos(a) \cos(b) = (1/2)(\cos(a + b) + \cos(a - b))$ on peut développer l'expression de $s(t)$:

$$s(t) = A[1 + m \cos(\omega t)] \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\text{en } s(t) = A \cdot \cos(\Omega t) + \frac{Am}{2} [\cos((\Omega + \omega)t) + \cos((\Omega - \omega)t)]$$

On constate que $s(t)$ est la somme de trois fonctions sinusoïdales pures de pulsations Ω , $\Omega + \omega$ et $\Omega - \omega$.

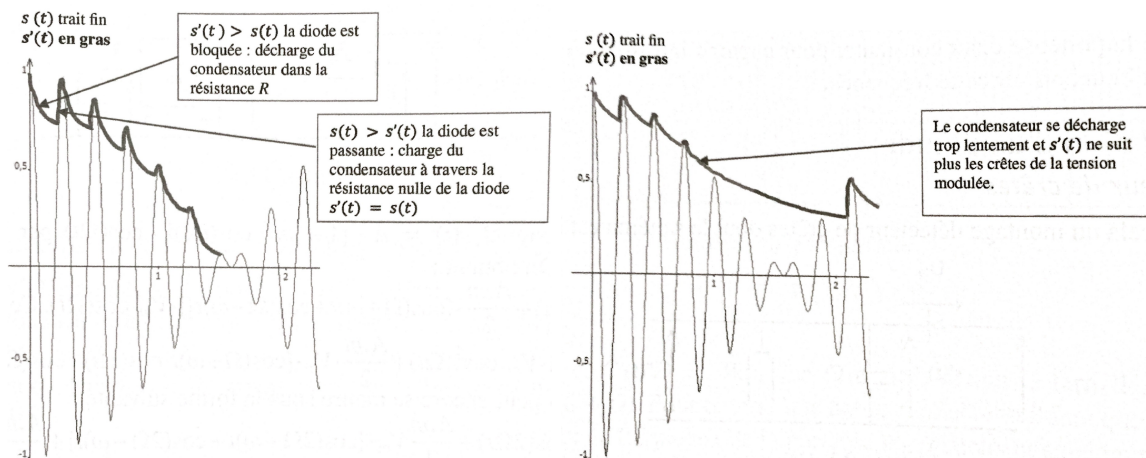
Si F et f représentent les fréquences de la porteuse et de la modulante, alors le spectre présente trois raies de fréquence $F - f$, F et $F + f$.



Comme indiqué précédemment, un signal complexe se décompose en une somme de signaux simples sinusoïdaux. Les fréquences audibles étant comprises entre 20Hz et 20kHz , le spectre réel se compose de la porteuse entourée de deux bandes latérales.

Démodulation

On utilise pour cela un montage détecteur de crêtes. Considérons que la diode est parfaite et qu'à l'instant initial, le condensateur est déchargé. La tension aux bornes de la diode est $U_D = s(t) - s'(t)$. On considère aussi que la résistance R est très grande. Soit T la période de la porteuse. Pour que la tension $s'(t)$ suive parfaitement les crêtes de la tension $s(t)$ (c'est à dire qu'elle représente la tension de modulation), il faut que la constante de temps des circuits RC soit très supérieur à la période T de la porteuse, tout en étant inférieur à la période du signal modulant. En effet, dans le cas contraire le condensateur se décharge trop lentement et ne "rencontre" plus la charge sur l'alternance suivante.



ATTENTION : Pour ce qui est de la démodulation synchrone, puis de la modulation en fréquence voir Bréal p209 ou 294 du Bellier

Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon comment caractériser un signal quelconque à travers la décomposition de Fourier. On le sait maintenant tout signal est décomposable en une somme de sinus et cosinus. On a pu ainsi voir qu'un signal est caractérisable par une fréquence, que l'on peut obtenir après un filtrage. Le filtrage peut donc être de plusieurs ordres selon le degré du polynôme définissant la fonction de transfert. Enfin nous avons pu voir comment faisons-t-on dans la "vraie vie" pour envoyer des ondes grâce à la modulation de signal.