L.P. 22 - Rétroaction et oscillation

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis	**Bibliographie**
• AOP	• Physique Tout en un PC-PC*, Sanz, *Dunod*
• Système linéaire	• Physique Tout en un PSI, Cardini, *Dunod*
• Fonction de transfert	• Mécanique, Perez, *Dunod*
• Notions d'oscillateurs	• Électronique PSI, Brenders, *Bréal*
	• Expériences de physique, Bellier, *Dunod*
	• Électronique, Perez *Dunod*

N.B. : Leçon longue donc faire le tri dans le choix du contenu de la leçon et ne pas forcément détailler tout les calculs ! ! !

Introduction

La mesure du temps est un problème lié au développement de l'humanité. Les première horloges étaient les cadrans solaire mais elles étaient tributaires de l'ensoleillement. Vers 3000 ans avant J.C., les Égyptiens inventent les première horloges à eau ou clepsydres.
Pour mesurer le temps , il est nécessaire de disposer d'un système qui reproduit un phénomène de manière périodique et ce avec la plus grande précision possible : ce système est un oscillateur. La première horloge à pendule pesant est mise au point par Christiaan Huygens en 1657. Depuis les horlogers n'ont eu de cesse d'augmenter la stabilité du système pendulaire pour améliorer la précision de l'horloge. Le mouvement du pendule sert de régulateur mais à cause des divers frottements, son amplitude s'atténue et il faut lui communiquer une petite impulsion pour entretenir le mouvement. C'est le rôle du poids ou du ressort spiral encore appelée organe moteur, cette impulsion doit être donnée au niveau de la position d'équilibre stable du régulateur par un système de rouage à roues et pignons dentés servant en plus au mouvement des aiguilles.
De nos jours, les horloges mécaniques tendent à disparaitre car de nombreux circuits électroniques produisent un signal périodique : ces circuits sont des oscillateurs.
Certains oscillateurs produisent des signaux sinusoïdaux (ou quasi sinusoïdaux) alors que d'autres, produisent des signaux rectangulaires, sont appelés multivibrateurs.

Rétroaction : consiste à "réinjecter" une fraction du signal de sortie sur l'entrée de amplificateur. On parle alors de système bouclé.

Dans cette leçon on va ainsi étudier comment des systèmes oscilles et quelles sont les causes de cette oscillation mais également comment un système est auto-entretenu.

1. Rétroaction et systèmes bouclés

Nous savons qu'un système est un dispositif physique qui fait correspondre une grandeur de sortie à une grandeur d'entrée. Ce concept est très général puisqu'on le trouve dans tous les domaines de la physique, et même en biologie :

- En électronique : les amplificateurs sont des systèmes qui font correspondre une tension de sortie à une tension d'entrée ; on définit alors les facteurs amplification en tension, en puissance et en intensité, rapports des grandeurs de sortie sur celles d'entrée.
- En électromécanique : les moteurs électriques sont des systèmes qui réalisent une conversion de puissance électrique en puissance mécanique ; précisément, la grandeur d'entrée peut être la puissance électrique d'alimentation du moteur et la grandeur de sortie la puissance mécanique disponible sur l'arbre du moteur, ou la vitesse de rotation de ce dernier.
- En optique : les lentilles font correspondre une répartition de l'amplitude complexe, ou de l'intensité, de l'onde lumineuse dans un plan image, à une répartition de cette même grandeur dans un plan objet ; le grandissement transversal est alors le rapport des extensions spatiales dans les deux plans objet et image.
- En thermodynamique : un four peut être considéré comme un système qui fait correspondre une grandeur de sortie, la température du four, à la grandeur d'entrée, la puissance électrique fournie au résistor chauffant.
- En biologie : les organismes vivants sont aussi des systèmes qui fournissent, par l'intermédiaire du métabolisme interne, une grandeur de sortie, l'énergie nécessaire à la vie de l'organisme (travail pour ses déplacements, compensation des pertes d'énergie par conduction thermique ou par évaporation, ...) à partir d'une grandeur d'entrée, l'énergie apportée par la nutrition des aliments absorbés.

Cependant, lorsqu'ils se réduisent à cette seule correspondance, entrée vers sortie, les systèmes présentent un inconvénient majeur : ils ne prennent pas en compte la valeur effective de la grandeur de sortie, alors que cette dernière peut ne pas satisfaire aux attentes, soit que le système n'ait pas pu être totalement maitrisé lors de sa conception, soit que des actions extérieures indésirables le perturbent de façon significative.

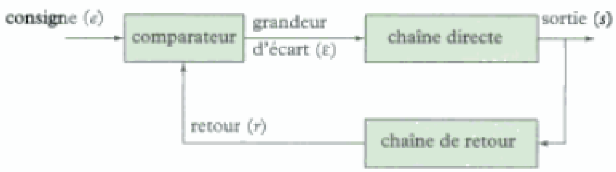
Il apparait alors indispensable d'introduire le concept général de rétroaction ou de système bouclé.

1.1 Les systèmes bouclés

Qu'est ce qu'un système bouclés ou système asservi ? Un système asservi est un dispositif technique qui permet d'asservir une grandeur physique à une consigne. Un système de ce type ne doit pas nécessiter l'intervention d'un opérateur humain : il est de ce fait automatique.

Structure d'un système asservie

Un système asservi est un système dans le quel la grandeur de sortie est utilisée pour commander l'élément qui agit sur cette grandeur. Un tel système est qualifié de système bouclé. Un système asservi simple possède la structure suivant, où chaque bloc a une fonction bien définie :



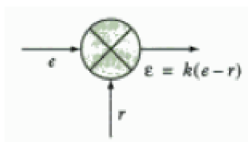
La chaine directe est l'organe qui permet de commander la grandeur à asservir. Son entrée correspond à la sortie du comparateur et sa grandeur de sortie est la grandeur à asservir.
Une chaine direct est un organe de commande qui dispose :
- d'un actionneur permettant d'agir sur la grandeur de sortie
- d'une amplification de puissance permettant de fournir l'énergie nécessaire à l'actionneur

La chaine de retour est un dispositif comportant un capteur (convertit une grandeur physique quelconque sous forme d'un signal électrique qui est l'image de cette grandeur) qui permet de convertir la grandeur à asservir (vitesse, position, température ...) en un signal que le comparateur peut ensuite traiter.

Le comparateur est l'organe de comparaison. Ses entrées sont constituées par la grandeur de retour (r) et la consigne (e). Sa sortie est la grandeur d'écart (ε). Un comparateur est un système produisant un signal fonction de la différence des signaux d'entrée et de retour ($e - r$).
Les grandeur e, ε et r doivent être de la même nature physique. Dans la majorité des cas, nous rencontrerons des comparateurs linéaires.
Un comparateur linéaire est un système produisant un signal ε proportionnel à la différence des signaux d'entrée ($e - r$) :

$$\varepsilon = k(e - r) \tag{1}$$

Souvent, $k = 1$ et le comparateur est représenté par le schéma suivant :

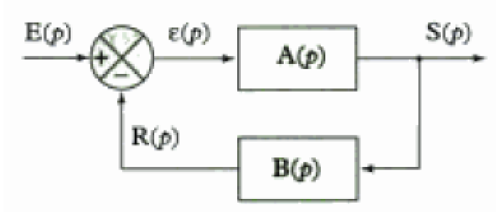


Transmittance d'un système linéaire

Un système linéaire, à une entrée notée e et une sortie notée s, est caractérisé par sa fonction de transfert ou transmittance que l'on écrit en notation complexe ou en notation symbolique de Laplace.
La transmittance d'un système linéaire est donnée par :
- $\underline{A}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ où $\underline{e}$ et $\underline{s}$ sont les expressions complexes respectivement de la grandeur d'entrée et de la grandeur de sortie
- $A(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$, où $E(p)$ et $S(p)$ sont les expressions sous forme symbolique de Laplace respectivement de la grandeur de d'entrée et de la grandeur de sortie.

Calcul de la transmittance d'un système bouclé

Notons $A(p)$ la transmittance de la chaine direct et $B(p)$ la transmittance de la chaine de retour. La consigne est représenté par le signal $E(p)$, la grandeur d'écart par $\varepsilon(p)$, la grandeur de sortie $S(p)$ et la grandeur de retour par $R(p)$. Le système bouclé se représente sous la forme :



La transmittance d'un système asservi en boucle ouverte est :

$$H_{BO} = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} \tag{2}$$

D'après la figure nous avons :

$$\begin{aligned} R(p) &= B(p)S(p) \\ S(p) &= A(p)\varepsilon(p) \end{aligned} \tag{3}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} R(p) &= B(p)A(p)\varepsilon(p) \\ \Leftrightarrow H_{BO}(p) &= \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p) \end{aligned} \tag{4}$$

La transmittance d'un système asservi en boucle ouverte est le produit des transmittance $A(p)$ et $B(p)$ des chaines directe et de retour :

$$H_{BO}(p) = A(p)B(p) \tag{5}$$

Transmittance en boucle fermé

La transmittance d'un système asservie en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \tag{6}$$

où $E(p)$ et $S(p)$ sont les expressions sous forme symbolique de Laplace respectivement de la grandeur d'entrée et de la grandeur de sortie.
D'après la figure nous avons :

$$S(p) = A(p)\varepsilon(p),\ R(p) = B(p)S(p) \text{ et } \varepsilon(p)E(p) - R(p)$$

soit,

$$S(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)]$$

Nous en déduisons la transmittance en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)} \tag{7}$$

Cas d'une chaîne directe à grand gain

Dans cette partie, nous travaillerons en notation complexe pour une meilleure compréhension. La transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 + \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} \tag{8}$$

On parle de chaine direct à grand gain lorsque $|\underline{A}(j\omega)|$ est suffisamment élevé pour considérer :

$$|\underline{H}(j\omega)| = |\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| \gg 1 \tag{9}$$

La transmittance en boucle fermée se simplifie alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &\approx \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} = \frac{1}{\underline{B}(j\omega)} \\ \Longrightarrow H(p) &\approx \frac{1}{B(p)} \end{aligned} \tag{10}$$

La transmittance d'un système asservi ayant une chaine directe à grand gain ne dépend donc que de la transmittance de la chaine de retour. Les caractéristiques de la chaine de retour déterminent les caractéristiques du système bouclé dans le cas où la chaine directe possède une amplification importante.

Régime propre et stabilité

Stabilité

La stabilité d'un système physique comportant une entrée et une sortie peut se définir ainsi : Un système bouclé évoluant en régime libre (entrée e nulle) est stable lorsque la sortie s tend spontanément vers 0.

L'étude de la stabilité d'un système bouclé linéaire peut se faire à partir de sa transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{11}$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont deux polynômes en p. En se limitant aux systèmes du second ordre, nous aurons toujours :

$$\text{degré numérateur} \leq \text{degré du dénominateur} \leq 2$$

le numérateur et le dénominateur pouvant se mettre sous la forme :

$$N(p) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 \text{ et } D(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2$$

De la définition de $H(p)$ il vient :

$$b_0 E(p) + b_1 p E(p) + b_2 p^2 E(p) = a_0 S_1(p) + a_1 p S(p) + a_2 p^2 S(p)$$

ce qui donne l'équation différentielle :

$$b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} = a_0 s(t) + a_1 p \frac{ds(t)}{dt} + a_2 p^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

La sortie $s(t)$ est ainsi la somme d'un régime forcé $s_f(t)$ et d'un régime libre $s_\ell(t)$. Si le système n'est pas intégrateur ($a_0 \neq 0$), le régime forcé est borné, donc la stabilité dépend du régime libre, qui vérifie l'équation homogène (sans second membre) :

$$a_0 s_\ell(t) + a_1 \frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s_\ell(t)}{dt^2} = 0$$

Les critère de stabilité du système dépendront ainsi des coefficients a_0, a_1 et a_2 du dénominateur de la transmittance du système bouclé.

Système du premier ordre

Pour un système du premier ordre, nous avons :

$$\text{degré du numérateur} \leq \text{degré du dénominateur} \leq 1$$

Cette condition équivaut à : $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ et $a_0 \neq 0$, soit $D(p) = a_0 + a_1 p$. Le régime libre $s_\ell(t)$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$a_1 \frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_0 s_\ell(t) = 0, \text{ soit } \frac{a_1}{a_0}\frac{ds_\ell(t)}{dt} + s_\ell(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont du type $s_\ell(t) = A\exp(-a_0 t/a_1)$. Lorsque t tend vers l'infini cette solution tend ers 0 si $a_0/a_1 > 0$ soit a_0 et a_1 de même signe.

Un système du premier ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type $a_1 p + a_0$ est stable si a_0 et a_1 sont du même signe.

Système du second ordre

Pour un système du second ordre nous avons :

$$a_2 \frac{d^2 s_\ell(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_0 s_\ell(t) = 0$$

En écrivant l'équation caractéristique on va trouver 3 cas selon la valeur du discriminant Δ. On en déduira que pour un système du second ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type $a_2 p^2 + a_1 p + a_0$ est stable si a_2, a_1 et a_0 sont de même signe. Si $a_1 = 0$ le système est à la limite de la stabilité et se comporte comme un oscillateur sinusoïdal.

Généralisation

Nous avons vu que l'étude de la stabilité se ramène à la recherche des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle du système. Les racines de cette équation caractéristique sont aussi les solutions de l'équation $D(p) = 0$. Elles sont appelées dans ce cas les "pôles de $H(p)$".

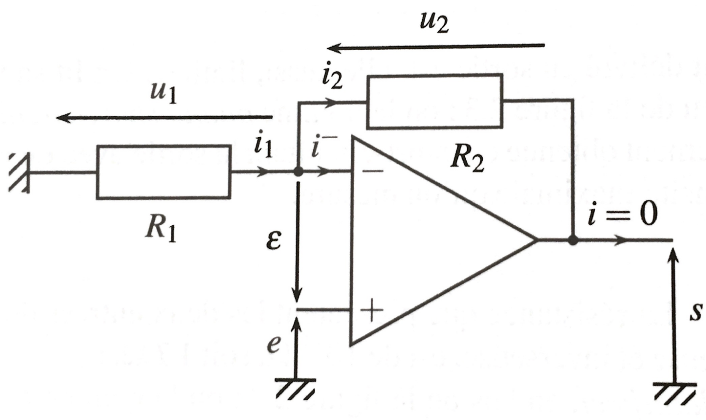
Un système linéaire est stable si les pôles de sa transmittance sont à partie réelles négatives.

D'autre part, comme la transmittance d'un système bouclé s'écrit $H(p) = A(p)/(1 + H_{BO}(p)$, rechercher la stabilité d'un système bouclé revient à recherche les parties réelles des racines du dénominateur : $1 + H_{BO}(p) = 0$.

Un système bouclé linéaire est stable si les parties réelles des solutions de l'équation $1 + H_{BO}(p) = 0$ sont négatives.

1.2 Amplificateur non inverseur

Le montage amplificateur non inverseur est conçu afin d'amplifier la tension d'entrée. L'amplificateur opérationnel est rétro-actionné sur sa borne inverseuse.



Un montage réalise avec un amplificateur opérationnel s'étudie avec deux équations :
- la fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel;
- une relation liant ε aux tensions d'entrée, de sortie et des impédances des dipôles du montage

Celle-ci est obtenue au moyen de la loi des nœuds, écrite sous forme de potentiels. A l'entrée inverseuse :

$$i_1 = i_2 + i^+$$

D'après la loi d'Ohm, en convention récepteur :

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} = \frac{0 - v^-}{R_1} \text{ et } i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{v^- - s}{R_2}$$

Attendu que $i^- = 0$, la loi des nœuds devient :

$$\frac{0 - v^-}{R_1} = \frac{v^- - s}{R_2} \text{ soit } v^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

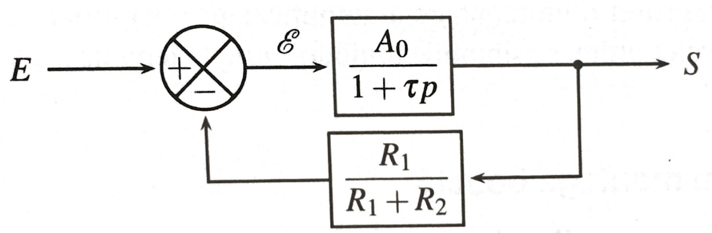
avec $v^+ = e$, on forme alors :

$$\varepsilon = v^+ - v^- = e - \tfrac{R_1}{R_1+R_2} s$$

On aboutit donc finalement aux deux équations, écrites dans le formalisme de Laplace :

$$\begin{cases} S(p) = \frac{A_0}{1+\tau p}\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - \frac{R_1}{R_1+R_2} S(p) \end{cases} \tag{12}$$

qui décrivent le schéma bloc suivant :



En effet le signe "-" de ε(p) est obtenu grâce au signe dans le comparateur.

Un montage à amplificateur opérationnel se met sous la forme d'un système bouclé, avec comparateur, chaîne direct et chaîne retour.

Fonction de transfert

L'expression de la fonction de transfert du montage s'opère :
– soit en éliminant $\varepsilon(p)$ dans les deux équations du montage ;
– soit en utilisant la formule dans dans le cours de SII :

$$H(p) = \frac{\frac{A_0}{1+\tau p}}{1 + \frac{A_0}{1+\tau p}\frac{R_1}{R_1+R_2}} \tag{13}$$

Par exemple avec la première méthode :

$$(1+\tau p)S(p) = A_0\varepsilon(p) = A_0\left(E(p) - \frac{R_1}{R_1+R_2}S(p)\right)$$

soit en multipliant par $R_1 + R_2$:

$$(R_1+R_2)(1+\tau p)S(p) = A_0[(R_1+R_2)E(p) - R_1 S(p)]$$

au final :

$$(R_1 + A_0 R_1 + R_2 + (R_1+R_2)\tau p)S(p) = A_0(R_1+R_2)E(p)$$

Ce résultat se simplifie grandement avec $A_0 \gg 1$. En effet $R_1 + A_0R_1 \approx A_0R_1$. De plus R_1 et R_2 sont du même ordre de grandeur, ainsi $R_2 \ll A_0R_1$. On trouve ainsi un passe bas du premier ordre, écrit sous forme canonique en divisant par A_0R_1 :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\tau}{A_0}p}$$

La fonction de transfert d'un montage à amplificateur opérationnel, modélisé par un passe-bas du premier ordre, se simplifie toujours compte tenu de $A_0 \gg 1$.

Stabilité du montage bouclé

Le premier enseignement que l'on tire de cette fonction de transfert, est la stabilité du montage. En effet les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe : le système est donc stable.

La rétroaction sur la borne inverseuse, nommée rétroaction négative, est stabilisatrice.

2. Oscillateurs quasi sinusoïdaux

Il existe plusieurs grands types de montages électroniques qui délivrent des oscillations, sinusoïdales pour la génération de fréquences, rectangulaires pour les signaux d'horloge des ordinateurs par exemple. Nous allons dans cette partie étudier les oscillateurs quasi sinusoïdaux.

Un oscillateur quasi-sinusoïdal est un oscillateur qui génère un signal comprenant un harmonique principal et des harmoniques secondaires à faible effet sur le signal sinusoïdal. La forme du signal est alors proche d'une sinusoïde (dite quasi sinusoïde).

2.1 Éléments structurels d'un oscillateur quasi sinusoïdal

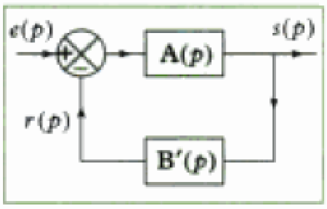
Afin d'obtenir un système quasi sinusoïdal plusieurs critères doivent être respecté :
- Nécessité d'une instabilité d'un système linéaire comme source d'oscillations ;
- Nécessité d'un filtre : la fréquence du signal ne peut être ajustée de manière précise que grâce à une sélection par filtrage ;
- Nécessité d'une amplification : la présence d'un filtre passif et, de manière générale, la présence de composants résistifs, conduit à une atténuation du signal. Il y a donc nécessité d'amplifier le signal. Ce rôle est assuré par le composant actif, dont le plus simple est qu'il soit linéaire : l'AOP ;

Structure d'un oscillateur quasi sinusoïdal

Un oscillateur quasi sinusoïdal est donc un système instable. En électronique, l'instabilité est obtenu par bouclage à partir des fonctions stables amplification et et filtrage. Le filtre, qui a pour rôle de sélectionner la fréquence d'oscillation , est généralement passif. Aussi, l'amplificateur compense les pertes d'énergie, et de niveau de signal, dues au filtre. D'autres critères entrent en ligne de compte de manière indirect pour déterminer la structure finale qui doit être :
- minimale ;
- limitée en coût et en mise en œuvre.

Pour cela, l'électronique spécialise les chaines, c'est à dire confie un nombre limité de fonctions à une chaine, ce que nous faisons en choisissant une fonction d'amplification et une fonction de filtrage.

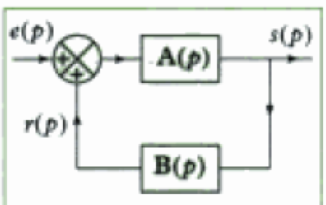
Critère de fonctionnement



Fonction de transfert d'un système linéaire à réaction négative
A partir de la figure, nous reprenons les résultats concernant la théorie des système linéaires bouclés. La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B'(p)} \tag{14}$$

Dans le cas où le dénominateur s'annule, la fonction de transfert devient infinie, ceci quel que soit le signal d'entrée, ce qui fait que la sortie devrait devenir infinie.
Dans la pratique, cette conséquence entrainera la saturation de l'élément actif.



Fonction de transfert d'un système linéaire à réaction positive
Dans ce cas là on a $B(p) = -B'(p)$, d'où :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)} \tag{15}$$

Structure de boucle fermé
Dans le car particulier où l'entrée est nulle, cas qui nous intéresse, le schéma se simplifie encore et l'obtient une boucle dont les équations de fonctionnement sont :

$$s(p) = A(p)r(p) \text{ et } r(p) = B(p)s(p)$$

Nous obtenons alors : $s(p) = A(p)B(p)s(p)$, donc $A(p)B(p) = 1$.

Une structure de boucle (A,B) fermée avec $A(p)B(p) = 1$ permet de réaliser un oscillateur.

Condition d'existence des oscillations
Pour obtenir des oscillations, l'ordre de la boucle est au minimum égal à 2 et donnent des solutions du type $s(t) = S_m \exp(-m\omega_0 t)\cos(\omega t + \phi)$.

En réalité, l'entrée n'est jamais nulle, bien qu'aucune tension n'y soit appliquée par l'expérimentateur. Pour autant, nous ne connaissons jamais cette tension car elle est constituée du bruit électronique. De la sorte, le schéma fonctionnel à considérer lors du démarrage est la dernière figure avec $H(p) = s(p)/e(p) = A(p)/(1 - A(p)B(p)$.

Si le système est stable ($m > 0$), le signal d'entrée génère un signal transitoire amortie en sortie, donnée par la solution type, signal qui disparait au bout d'une durée liée à la valeur de la constante d'amortissement m.

Pour que des oscillations naissent en sortie, elles doivent augmenter d'amplitude, et bien au delà de celle du bruit. Il est donc nécessaire que le facteur d'amortissement soit négatif ($m < 0$), ou autrement dit la partie réelle des racines de l'équation $A(p)B(p) = 1$ doit être positive. On voit bien l'importance de la notion de transmittance ($T(p) = A(p)B(p)$).

Un oscillateur est donc un système bouclé instable à réaction , composé d'un amplificateur et d'un filtre (généralement passif), qui, placé à la limite de stabilité, délivre un signal de sortie sans être excité par un signal extérieur périodique.

Condition de Barkhausen
Le régime harmonique est le plus adapté pour étudier la transmittance de chaque élément de la boucle, ou de la boucle ouverte. Cependant, ce régime harmonique ne correspond pas au régime exact de fonctionnement écrit précédemment, lié à l'instabilité. Mais il reste une bonne approximation du régime réel. L'examen des condition d'oscillation en régime harmonique est donc particulièrement intéressant.
Ce cas correspond à la réponse libre du système, avec $m = 0$; les pôles sont alors imaginaires conjuguées ($\pm j\omega_0$). En posant $p = j\omega$, nous avons alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 - \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} \tag{16}$$

$A(p)B(p) = 1$, conduit à :

$$\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1$$

Cette condition est appelée condition de Barkhausen et porte à la fois :

– sur les modules :

$$|\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| = \underline{A}(j\omega)||\underline{B}(j\omega)| = 1\,;$$

– sur les arguments :

$$arg|\underline{A}(j\omega)| = -arg|\underline{B}(j\omega)| \text{ (modulo } 2\pi)$$

Rq : Dans tous les systèmes que nous étudierons, la fréquence des oscillations est fixée par la fréquence f_0 unique qui vérifie la relation entre les arguments. L'équation sur les modules impose la condition d'amplification. L'oscillateur doit osciller dés sa mise sous tension alors qu'aucune entrée ne lui est appliquée. Or le bruit électronique est composée de signaux de fréquences diverses dont une au moins se confond avec la fréquence d'oscillation. Ce signal est amplifié, renvoyé et filtré par la chaine de retour, amplifié, et ainsi de suite...

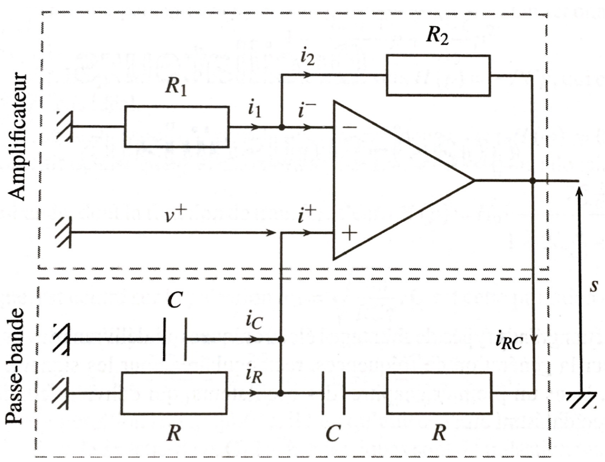
2.2 Oscillateur de Wien

MANIP Bellier, p332 oscillateur de Wien.

Rq : À l'époque de sa création, le montage en pont était un mode de mesure d'un composant par comparaison avec ceux dont les caractéristiques étaient connues. La technique consistait alors à mettre le composant inconnu sur l'une des branches du pont, puis la tension centrale était réduite à zéro en ajustant les autres branches ou en changeant la fréquence de l'alimentation. Un autre exemple typique de cette technique est le pont de Wheatstone. Le pont de Wien permet, lui, de mesurer avec précision la capacité C_x d'un composant et sa résistance R_x. (cf Wikipédia)

Les notions sont ici introduites sur un exemple expérimental l'oscillateur de Wien. Les deux blocs, amplificateur et passe bande, sont clairement identifiés sur le schéma du montage bouclé :

– la tension d'entrée de l'amplificateur est v^+, sa tension de sortie est s, tension de sortie de l'amplificateur opérationnel ;
– la tension d'entrée du passe-bande est s, celle de sortie v^+.



La tension s n'est pas la tension de sortie du montage. En effet, ce circuit bouclé n'a ni entrée, ni sortie définie. L'observation expérimentale montre que lorsqu'il oscille, tous les points du circuit oscillent à la même pulsation. Le signal peut être prélevé en tout point du circuit ; une étude ultérieure montre que la tension v^+ est "plus sinusoïdale" que la tension s. Étudions chaque bloc séparément.

Amplificateur

La loi des nœuds, $i_1 = i_2 + i^-$, exprimée en terme de potentiels mène à :

$$\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - S}{R_2} + i^- \text{ donc avec } i^- = 0,\ V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} S$$

En considérant que l'amplificateur opérationnel a un gain statique infini et qu'il fonctionne en régime lin"aire, $v^+ = v^-$. Ce bloc est alors décrit par sa fonction de transfert, notée A :

$$\frac{S}{V^+} = 1 + \frac{R_1}{R_2} = A \tag{17}$$

Attendu que $A = 1 + R_2/R_1 > 1$, il s'agit bien d'un amplificateur.

Passe-bande

La loi des nœuds, $i_C + i_R + i_{RC} = i^+ = 0$, exprimée en terme de potentiels, mène à :

$$(0 - V^+)Cp + \frac{0 - V^+}{R} + \frac{S - V^+}{R + \frac{1}{Cp}} = 0 \tag{18}$$

D'où,

$$\frac{Cp}{1 + RCp} S = \left(Cp + \frac{1}{R} + \frac{Cp}{1 + RCp} \right) V^+, \text{ soit } \frac{RCp}{1 + RCp} S = \left(RCp + 1 + \frac{RCp}{1 + RCp} \right) V^+$$

ainsi,

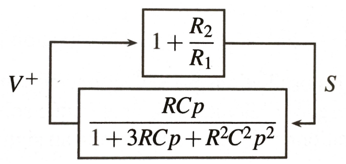
$$RCpS = \left((1 + RCp)^2 + RCp \right) V^+, \text{ soit } \frac{V^+}{S} = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2}$$

On reconnait ici un passe-bande, dont la forme canonique est :

$$\frac{V^+}{S} = H_0 \frac{2\xi \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega}\right)^2},\ \text{avec } \omega = \frac{1}{RC},\ \xi = \frac{3}{2},\ H_0 = \frac{1}{3}$$

Montage bouclé

Le montage se met sous la forme d'un schéma-bloc :



Conditions théorique d'auto-oscillation

On observe expérimentalement que le montage oscille à une certaine fréquence, pour un certain choix de R_1 et de R_2, que l'on cherche théoriquement.
On suppose que le montage oscille. Alors, en notation complexe, où $p = j\omega$, les deux transmittance impliquent :

$$\frac{\underline{v}^+}{\underline{s}} = H_0 \frac{2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{A} \tag{19}$$

On en déduit :

$$2H_0Aj\xi\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Soit en ordonnant partie réelle et partie imaginaire :

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)^2 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}(1 - H_0A) = 0$$

Le complexe est nul, donc sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles. on tire de la nullité de la partie réelle :

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 0, \text{ donc } \omega = \omega_0 = \tfrac{1}{RC}$$

Le montage oscille à la pulsation caractéristique du passe-bande. C'est en effet la pulsation la moins atténuée par le passe bande. Il est donc normal que cette pulsation caractéristique émerge. Quant à la partie imaginaire, avec $\omega \neq 0$:

$$H_0A = 1, \text{ soit } \frac{1}{3}\left(1 + \frac{R_2}{R_1} = 1\right) \text{ donc } R_2 = 2R_1$$

La condition d'oscillation $R_2 = 2R_1$ est celle qui autorise les oscillations à la pulsation ω_0.

Un oscillateur quasi-sinusoïdale, constitué d'un passe-bande bouclé avec un amplificateur, oscille à la pulsation caractéristique du passe-bande, lorsque la condition d'oscillation est assurée.

Condition de démarrage des oscillation

Afin d'étudier l'apparition des oscillations, on cherche une équation différentielle à laquelle obéit une tension du montage. On part de la fonction de transfert du passe-bande :

$$\frac{V^+}{S} = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2} \text{ donc } (R^2C^2p^2 + 3RCp + 1)V^+ = RCpS$$

qui correspond à l'équation différentielle :

$$(RC)^2\frac{d^2v^+}{dt^2} + 3RC\frac{dv^+}{dt} + v^+ = RC\frac{ds}{dt} \tag{20}$$

Puis on utilise le lien entre v^+ et s qu'impose l'amplificateur $s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v^+(t)$.
Alors :

$$(RC)^2\frac{d^2v^+}{dt^2} + 3RC\frac{dv^+}{dt} + v^+(t) = RC\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dv^+}{dt} \tag{21}$$

soit finalement,

$$(RC)^2\frac{d^2v}{dt^2} + RC\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dv^+}{dt} + v^+(t) = 0 \tag{22}$$

s et v^+ sont proportionnelles via l'amplificateur, s obéit à la même équation différentielle.

Avant la mise sous tension de l'amplificateur opérationnel, tous les points du circuit présentent une tension nulle par rapport à la masse. Après la mise sous tension, si le montage bouclé est stable, attendu qu'il n'y a aucune entrée, le montage reste à la tension nulle. Il n'oscille donc pas.
Les oscillations ne naissent donc que si le montage est instable $\rightarrow$ un oscillateur quasi sinusoïdal n'oscille que si le montage bouclé est instable.

En appliquant le critère nécessaire et suffisant d'instabilité au système bouclé décrit par l'équation différentielle sur v^+, le montage est instable si :

$$2 - \frac{R_2}{R_1} < 0 \text{ soit } R_2 > 2R_1$$

La condition d'oscillation $R_2 = 2R_1$ apparait donc être une condition limite.

Ainsi on observe expérimentalement que le montage oscille pour $R_2 > 2R_1$. Mais plus on s'éloigne de la condition limite d'oscillation $R_2 = 2R_1$, moins les oscillations sont harmoniques et d'une période plus grande que $T_0 = 2\pi/\omega_0$, comme le montrent les relevés sur l'oscilloscope.

Rq : Plus on s'éloigne de la condition limite, moins les oscillations sont harmonique et si on fait la FFT du signal de sortie on observera plusieurs harmonique. On aura uniquement les harmoniques impaires, car la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale carré ne donne que les fréquences impaire du fait que la fonction sinus est une fonction impaire.

Amplitude des oscillations

Lorsque la condition de démarrage des oscillations est vérifiée, $R_2 > 2R_1$ l'amplitude des oscillations croit exponentiellement, jusqu'à la saturation de l'amplificateur opérationnel. C'est pourquoi la tension s de sortie de l'amplificateur opérationnel est limitée à V_{sat} $\rightarrow$ l'amplitude des oscillations est limitée par la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel.

Ainsi les oscillations en sortie de l'amplificateur opérationnel sont légèrement aplaties à cause de la saturation. Elles ne sont donc plus rigoureusement sinusoïdales, ce qui génère des harmoniques, de pulsation multiple du fondamentale ω_0.

Ces harmoniques supplémentaires sont filtrées par le passe-bande, centré sur ω_0. La tension prélevée à l'entrée non-inverseuse, v^+, apparait donc "plus sinusoïdale" que celle en sortie de l'amplificateur opérationnel, car moins riche en harmonique.

Rq : On peut également regarder le portait de phase en ajoutant un filtre passe haut tel que $\omega = 1/RC = \omega/10$. (voir Bréal p.245)

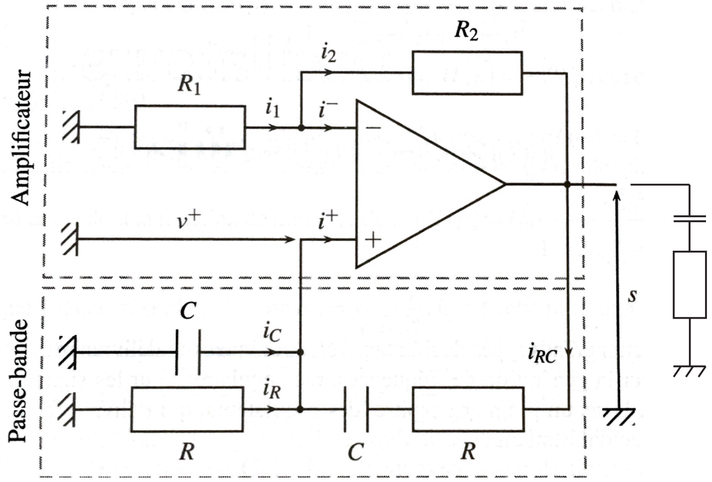


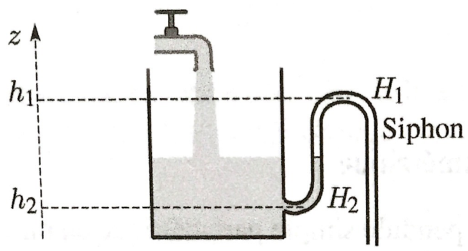
FIGURE *1 – Oscillateur de Wien avec filtre passe haut pour portrait de phase*

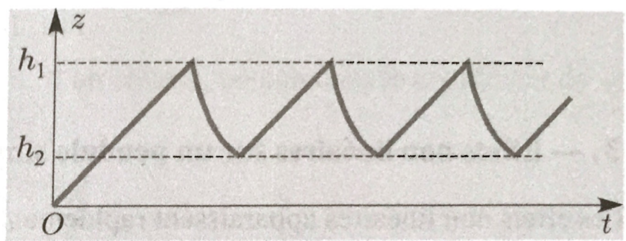
3. Oscillateurs à relaxation

Des oscillateurs peuvent également être aperçu dans d'autre domaine de la physique et ce que l'on va voir avec un oscillateur à relaxation.

Les oscillateurs de relaxation sont des systèmes qui évoluent périodiquement entre deux état de fonctionnement d'énergies différentes, grâce à une source extérieure d'énergie. on les appelle ainsi en raison du retour périodique du système vers un état de plus faible énergie.

3.1 Le vase de Tantale





L'exemple mécanique d'oscillateur de relaxation est la fontaine intermittente. On la représente par un vase que l'on remplit d'eau, avec un débit q_v constant, jusqu'à ce que le niveau atteigne le sommet H_1 du siphon. on distingue deux phases cinématique :

- Phase 1 : le vase se remplit
  L'équation à laquelle satisfait la cote z du niveau de l'eau est fournie par le bilan de masse du fluide supposé incompressible. Il vient, en désignant $\mathcal{S}$ la section du vase de remplissage :

$$\mathcal{S}dz = q_v dt \text{ soit } \frac{dz}{dt} = \frac{q_v}{\mathcal{S}} = Cste$$

- Phase 2 : le vase se vide
  Le bilan de masse donne, s étant la section à l'extrémité du siphon et v la vitesse d'écoulement en ce point :

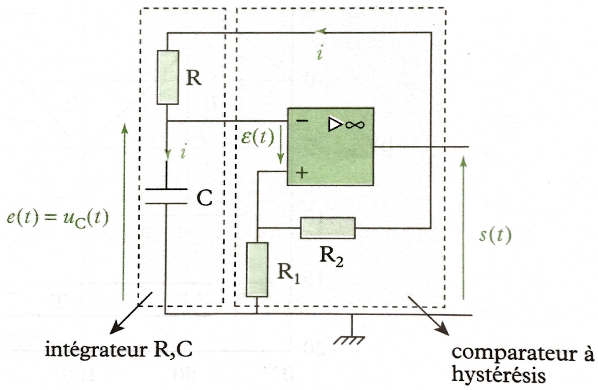
$$\mathcal{S}dz = q_v dt - svdt \text{ soit } \frac{dz}{dt} = \frac{q_v}{\mathcal{S}} - \frac{s}{\mathcal{S}}(2gz)^{1/2}, \text{ car } v = (2gz)^{1/2}$$

d'après le théorème de Torricelli. Cette phase cesse lorsque le siphon se désamorce puis le cycle recommence. Sur la figure, on a représenté le graphe de la fonction $z(t)$ qui reproduit périodiquement une partie rectiligne et une partie parabolique.

3.2 Multivibrateur avec amplificateur opérationnel

MANIP : Bellier p.334

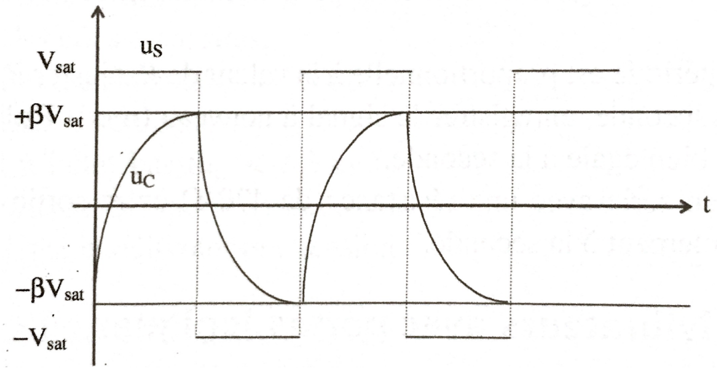
Les différentes horloges des ordinateurs, des montres, des multimètres numériques utilisent des dispositifs électroniques de type multivibrateur astable. C'est un montage électronique dans lequel la charge et la décharge d'un condensateur à travers une résistance sont commandées, par exemple, par un basculement de la tension de sortie d'un amplificateur opérationnel monté en comparateur à hystérésis.



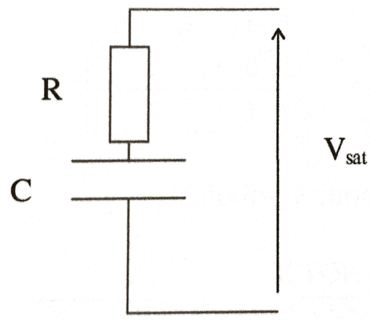
Détail du calcul p.308 Bréal.
L'amplificateur opérationnel, est ici, utilisé en comparateur à hystérésis. $s(t)$ ne peut donc prendre que deux valeurs :$\pm V_{sat}$.
Supposons que $s(t) = +V_{sat}$:

- Le condensateur C se charge alors à travers la résistance R. La tension u_c augmente, s reste égale à $+V_{sat}$ tant que ϵ reste positif, soit tant que u_c reste inférieur à $U_+ = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$.
- Quand $_c$ atteint la valeur $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$, le système bascule et $s = -V_{sat}$. Le condensateur se décharge et se recharge sous la tension $-V_{sat}$, u_c décroit de $\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ à $-\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ avant le basculement suivant.

Posons $\beta = \frac{R_1}{R_1+R_2}$. Si on représente u_c et s :



A $t = 0$, $u_c = -\beta V_{sat}$, l'A.O bascule et la tension de sortie passe à $+V_{sat}$. Le condensateur se charge à travers la résistance R sous la tension V_{sat}. Le montage est alors équivalent à :



La loi des mailles implique que $V_{sat} = u_c + Ri$. Or i est de la forme $I_{max}\exp(-t/\tau)$ donc $u_c = V_{sat} - K\exp(-t/\tau)$. Pour déterminer la valeur de K écrivons qu'à $t = 0$, $u_c(0) = -\beta V_{sat}$. On obtient

$$K = (1+\beta)V_{sat}$$

D'où,

$$u_c = V_{sat} - (1+\beta)V_{sat}\exp(-t/\tau)$$

Écrivons maintenant que $u_c(T/2) = \beta V_{sat}$. On obtient :

$$\beta V_{sat} = V_{sat} - (1+\beta)V_{sat}\exp(-T/2\tau)$$

On tire de cette relation :

$$T = 2RC\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

Conclusion

On a pu voir à travers cette leçon comme pouvait on asservir un système linéaire, c'est à dire comment respecter une consigne en sortie. On a également pu voir différents type d'oscillateur et leur utilité. Il y en a bien d'autre comme par exemple le laser qui est un oscillateur quasi sinusoïdale.