

# L.P. 49 - Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarité

Benjamin Marchetti

Niveau : L3

## Pré-requis

- Oscillateur harmonique
- Mécanique du point
- Électronique

## Bibliographie

- Mécanique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- BUP n.804 (1998)
- BUP n.744 (1992)
- H-prépa Mécanique I, Brébec, *Hachette*
- Expériences de phys. (Méca.), Bellier, *Dunod*
- Expériences de phys. (Elec.), Bellier, *Dunod*
- La physique par la pratique, Portelli, *HK*

## Introduction

Quoi de plus banal que le battement d'un cœur, la course des aiguilles d'une montre, la vibration d'une corde de violon ou encore les incessants allers-retours du balancier d'une horloge. Pourtant tous ces phénomènes ont un point commun des plus fondamentaux pour la physique : ce sont des oscillateurs.

Pour les étudier, des premiers modèles simples ont été développés qui rendent compte des petits mouvements d'un pendule ou d'un ressort. On entre ici dans le domaine de la physique des systèmes linéaires dont l'oscillateur harmonique constitue le modèle universel. Toutefois, les oscillateurs linéaires ne permettent pas d'expliquer la régulation du rythme cardiaque, l'entretien des oscillations d'une balançoire ou la convection de Rayleigh-Bénard. Il devient alors nécessaire de développer une physique non-linéaire dont le paradigme des oscillateurs est certainement l'oscillateur de Van der Pol.

Pour analyser les oscillateurs les physiciens utilisent le concept de portrait de phase. Dans cette leçon on va se restreindre à la description de systèmes à un seul degré de liberté. Pour un système dont l'évolution au cours du temps  $t$  décrit par la fonction à valeurs réelles  $x(t)$ , on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps  $t$  d'un point représentatif  $M$  d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $\dot{x} = dx/dt$ .

Une trajectoire de phase donnée est décrite à partir d'un point  $M_0(x_0, y_0)$  représentatif des conditions initiales de l'évolution considérée. L'ensemble des trajectoires de phase décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales réalisables est le portrait de phase de celui-ci.

# 1. Oscillateurs non amortis

## 1.1 L'oscillateur harmonique

Un pendule élastique (masse  $m$  à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$ ) a pour équation d'évolution :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

d'où, avec  $\omega^2 = k/m$ , l'équation différentielle du second ordre qui régit tout oscillateur harmonique (non amorti) :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

dont la solution générale peut s'écrire :

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \text{ et } \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

ce qui établit que les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique sont des ellipses centrées sur l'origine. Avec un choix convenable des unités adoptées sur les axes des coordonnées (en représentant  $\dot{x}/\omega$  en fonction de  $x$ , ce qui a du reste l'avantage de faire figurer en abscisse et en ordonnée des grandeurs de même dimension), ces trajectoires sont des cercles dont les rayons représentent l'amplitude  $A$  des oscillations :

- le portrait de phase d'un oscillateur harmonique est un ensemble de cercles concentriques centrés sur l'origine des coordonnées.

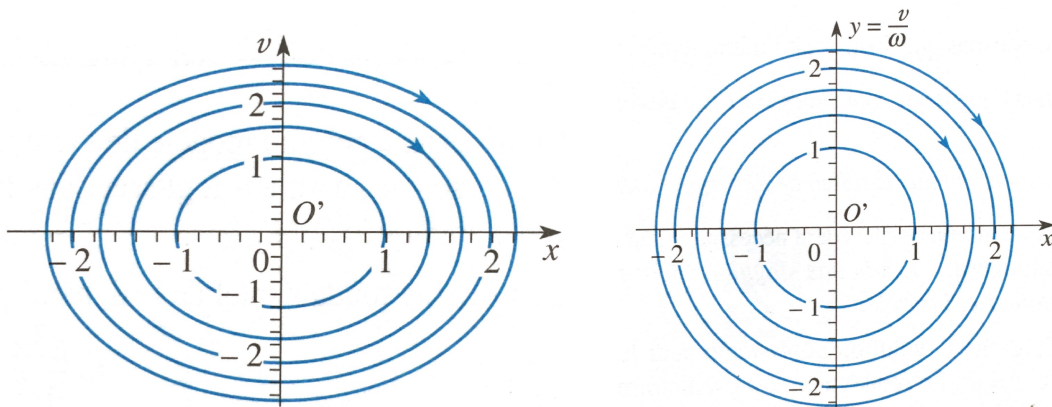
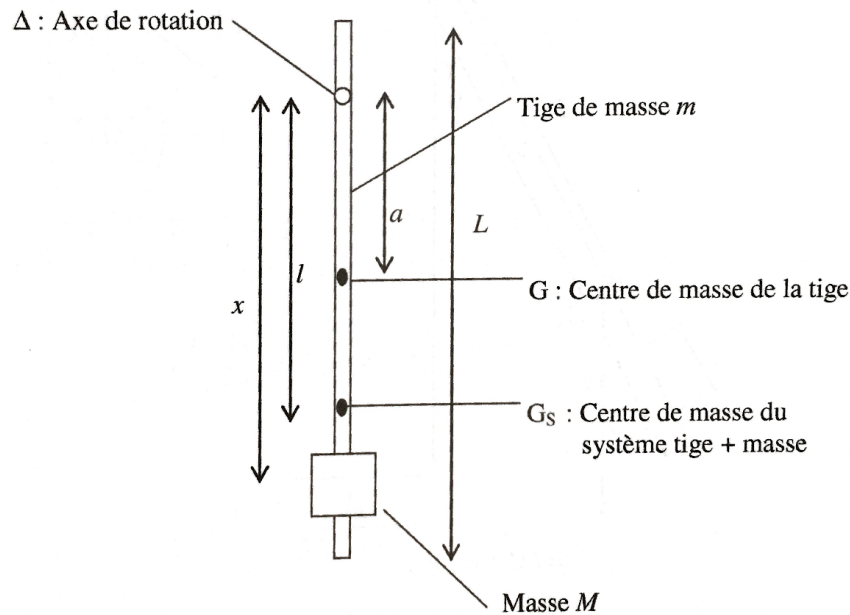


FIGURE 1 – (A gauche) Les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique non amorti sont des ellipses. (A droite) Dans le plan de phase  $(x, y = \dot{x}/\omega)$  les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique sont des cercles

Ce résultat très simple met en évidence un premier intérêt du portrait de phase : la représentation de celui-ci permet de tester avec précision le caractère sinusoïdal de l'évolution d'un oscillateur.

## 1.2 Le pendule pesant

MANIP Pendule Pesant Bellier Mécanique p.351



Soit un pendule de masse  $M$ , supposée ponctuelle, placée sur une tige de longueur totale  $L$  et de masse  $m$ . Ce pendule oscille autour de l'axe de rotation  $\Delta$ . On nomme :

- $x$  : position du centre de masse de la masse  $M$  par rapport à l'axe de rotation ;
- $a$  : distance entre le centre de masse de la tige et l'axe de rotation ;
- $L$  : longueur totale de la tige ;
- $l$  : distance entre le centre de masse du système (tige + masse) et l'axe de rotation.

Déterminons le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$ . Il se décompose en deux parties. Une notée  $J_{\Delta/M}$  pour la masse  $M$  que l'on supposera ponctuelle et une notée  $J_{\Delta/m}$  pour la tige de masse  $m$  :

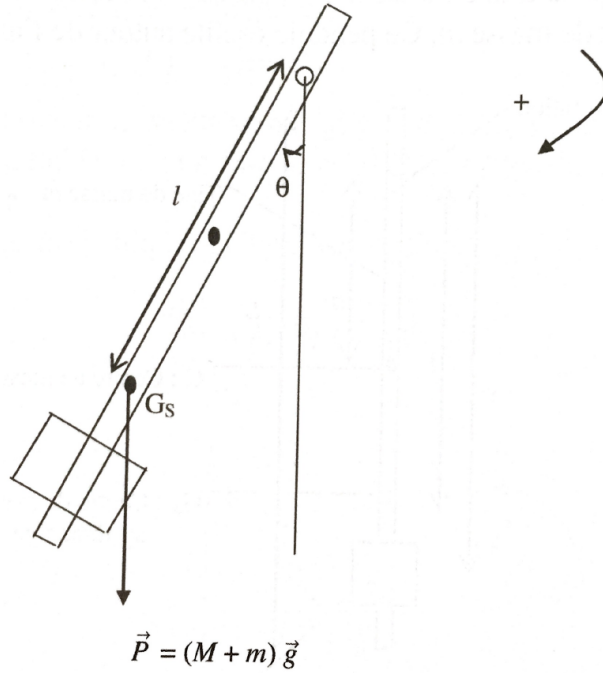
$$J_{\Delta/M} = Mx^2 \text{ et } J_{\Delta/m} = \frac{1}{12}mL^2 + ma^2$$

Donc  $J_{\Delta} = Mx^2 + \frac{1}{12}mL^2 + ma^2$ .

Déterminons maintenant le centre de masse  $G_S$  du système (tige+masse). Par définition on a :

$$\overline{\Delta G_S} = \frac{ma + Mx}{M + m} = l \quad (3)$$

Le système est écarté de sa position d'équilibre et on note  $\theta(t)$  l'angle de la tige avec la verticale.



Si on néglige toutes les autres forces, seul le poids a un moment non nul par rapport à  $\Delta$ . Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M + m)gl \sin(\theta) \quad (4)$$

Ainsi en posant  $\omega^2 = (M + m)gl/J_{\Delta}$  on a l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \quad (5)$$

La période propre de cet oscillateur est indépendante de l'amplitude, il y a isochronisme des petites oscillations :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{(m + M)gl}} \quad (6)$$

Ce résultat approximatif peut être amélioré en allant au second ordre au niveau du développement limité. Partons pour cela de la conservation de l'énergie mécanique du pendule pesant. Supposons, qu'à l'instant initial, on lâche le pendule d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale, son énergie mécanique à cet instant se réduit à l'énergie potentielle  $E_p = (M + m)gl(1 - \cos(\theta_0)) = E_m$ , en prenant comme référence l'énergie potentielle nulle en  $\theta = 0$ . A un instant quelconque, la vitesse du pendule est non nulle et son énergie mécanique est de la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + (m + M)gl(1 - \cos(\theta)) \quad (7)$$

En égalisant les relations, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + (M + m)gl(1 - \cos(\theta)) &= (M + m)gl(1 - \cos(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 &= (M + m)gl(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 &= 2\omega^2(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (8)$$

Sachant que  $\cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$ , alors :

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 = 2(M + m)gl(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)) \quad (9)$$

Donc,

$$dt = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{(M + m)gl}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \quad (10)$$

En intégrant sur un quart de période et connaissant la relation donné par  $T_0$ , il vient :

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \quad (11)$$

Posons le changement de variable suivant  $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2) \cdot \sin(u)$ . Si  $\theta = 0$  alors  $u = 0$  et si  $\theta = \theta_0$  alors  $u = \pi/2$ . De plus  $d\theta = 2 \frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)} \cos(u) \cdot du$  donc l'intégrale avec la nouvelle variable  $u$  devient :

$$T = 2 \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(u)}} \quad (12)$$

Si  $\theta_0$  est très faible alors, au premier ordre, l'intégrale devient :

$$T = 2 \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} du = T_0 \quad (13)$$

Si on va au second ordre en  $\theta_0$  alors

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(u)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(u) \quad (14)$$

et l'intégral devient  $T = T_0 + \frac{T_0}{\pi} \sin^2(\theta_0/2) \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$ . Or  $\sin^2(u) = (1/2)(1 - \cos(2u))$  donc  $T = T_0 + \frac{T_0}{2\pi} \sin^2(\theta_0/2) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2u)) du = T_0 + \frac{T_0}{4} \sin^2(\theta_0/2)$ . En assimilant de nouveau le sinus à l'angle il vient la formule de Bordas, qui montre que la non-linéarité modifie la période selon :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \quad (15)$$

**Voir Méthode plus rapide dans le Perez p.170**

**Rq :** Cette formule est importante ; elle montre la correction qu'il faut apporter à la période propre du pendule pour tenir compte de l'angle initial. En fait, cet angle doit toujours rester petit car dans la dernière étape du calcul, on a assimilé le sinus à l'angle. Si on souhaite une erreur relative inférieure à  $10^{-3}$  il faut que  $(T - T_0)/T_0 = \theta_0^2/16 \leq 10^{-3}$  donc  $\theta_0 \leq 7.4^\circ$ . Donc pour pouvoir approximer la période du pende à la période propre avec une précision de 0.1% il faut que l'angle de départ soit inférieur à  $7.4^\circ$ .

Cette non-linéarité peut être observée en traçant le portrait de phase comme un réseau de courbes en utilisant la relation finale de l'équation (8) :

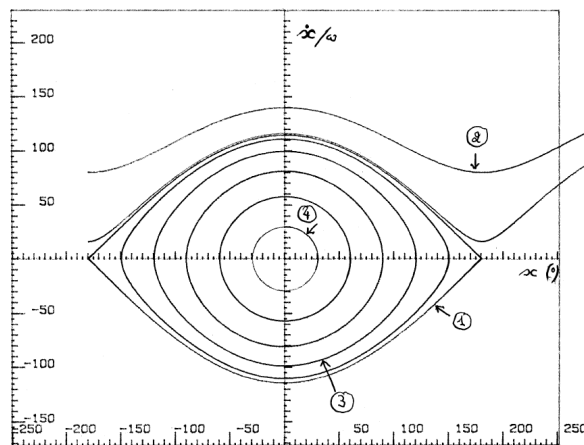


FIGURE 2 – Portrait de phase d'un pendule pesant non amorti.

On voit apparaître le rôle critique de la trajectoire de phase (1) qui correspond à la valeur  $\theta_0 = \theta$ . Cette trajectoire est appelée séparatrice car elle délimite deux domaines du portrait de phase :

- pour  $\cos(\theta) > \cos(\theta_0)$ ,  $\dot{x}$  ne s'annule jamais et  $x$  peut prendre des valeurs quelconques. Une trajectoire telle que (2) de ce type caractérise un mouvement révolutif;
- pour  $\cos(\theta) < \cos(\theta_0)$ ,  $x$  évolue entre  $-\theta$  et  $\theta$ , valeurs pour lesquelles  $\dot{x}$  s'annule. Une trajectoire, telle que (3) ou (4), de ce type caractérise un mouvement oscillatoire d'amplitude  $\theta$ .

Ce portrait illustre tout d'abord très simplement un fait bien connu : les trajectoires quasi-circulaires telles que (4) correspondent à des oscillations de faible amplitude ; le caractère non sinusoïdal des oscillations de forte amplitude apparaît tout de suite en examinant une trajectoire telle que (3).

Nous venons de mettre en évidence une propriété qui suffirait à elle seule à justifier l'intérêt pratique du portrait de phase : en vérifiant sur un graphe le caractère cyclique d'une trajectoire de phase, on dispose d'un test du caractère périodique de l'évolution beaucoup plus précis que l'observation de l'allure de la représentation  $x(t)$ .

## 2. Oscillateurs amortis

Dans la nature, il n'existe aucun système physique dont l'évolution puisse être modélisée par l'équation (2). Les oscillations finissent toujours par s'amortir. C'est pourquoi il est nécessaire de la modifier au profit d'une autre qui rende compte de ces amortissements.

### 2.1 Oscillateur harmonique amorti (par frottement fluide)

Ajoutant un terme de frottement fluide dans l'équation (1) du mouvement du pendule élastique, il vient :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \quad (16)$$

d'où en posant  $\omega^2 = k/m$  et en introduisant le facteur de qualité  $Q = m\omega/h$ , l'équation normalisée de tout oscillateur harmonique amorti :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

avec  $\xi = 1/(2Q)$ .

Cette dernière équation est encore invariante par dilatation mais n'est plus invariante par renversement du temps. Elle décrit donc un phénomène irréversible. Cette irréversibilité due à la présence du terme en  $\dot{x}$  est étroitement liée à une dissipation d'énergie. En effet, nous pouvons déduire l'expression :

$$\frac{de}{dt} = -2\xi\omega\dot{x} \quad (18)$$

avec,

$$e = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} \right) \quad (19)$$

Ce résultat nous précise que le sens de variation de l'énergie dépend directement du signe du coefficient  $\xi$  :

- si  $\xi > 0$ , l'énergie décroît inéluctablement vers 0 ;
- si  $\xi < 0$ , l'énergie croît.

Dans ce dernier cas, la croissance de l'énergie ne pouvant s'opérer indéfiniment, le système ainsi décrit n'est pas physique. En revanche, le premier cas est celui que l'on retrouve dans l'étude traditionnelle de l'oscillateur amorti. Notons que pour  $\xi = 0$ , nous retrouvons notre oscillateur harmonique, système conservatif.

La conséquence de cette discussion est qu'irréversibilité des phénomènes physiques et dissipation de l'énergie sont des notions étroitement liées. Ce résultat est général et fondamental en physique.

Les solutions de l'équation (17) dépendent du signe de  $\xi$  (oscillateur amorti ou amplifié) et du signé de  $\xi^2 - 1$ .

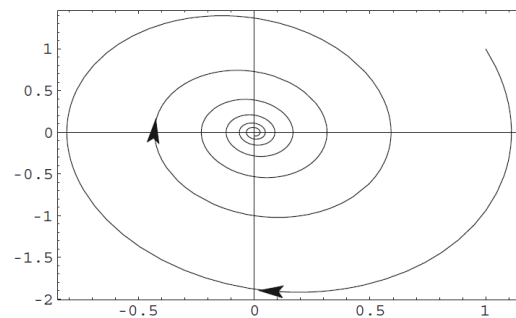
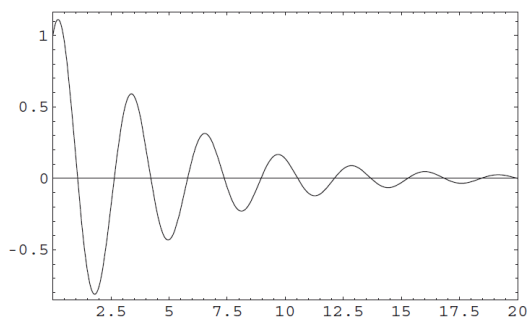
Si l'on se place dans une situation de faible amortissement ( $\xi^2 - 1 < 0$ ), les solutions obtenues sont de la forme :

$$x(t) = X_0 \exp(-\xi\omega t) \sin(\Omega t + \phi) \quad (20)$$

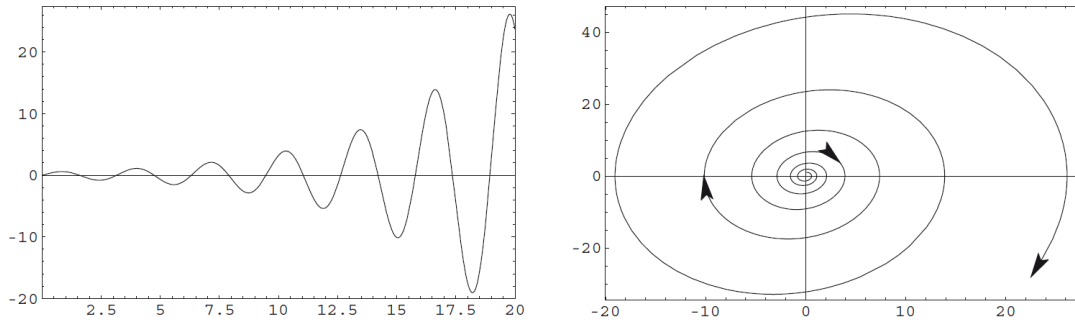
avec  $\Omega = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ .

Nous pouvons facilement calculer  $\dot{x}(t)$  puis tracer le portrait de phase de l'oscillateur :

- si  $\xi > 0$ , il y a amortissement



- si  $\xi < 0$ , il y a amplification



Les courbes de l'espace de phase ne sont plus des courbes fermées mais des spirales. Ceci nous permet immédiatement de conclure que les oscillations ne sont plus périodiques (ici elles sont pseudo-périodique). D'autre part, l'irréversibilité est clairement présente puisque parcourir une spirale dans un sens n'est pas identique à la parcourir dans l'autre sens.

Ajoutons que l'origine de l'espace de phase est un point d'équilibre. Toutefois, s'il est stable pour  $\xi > 0$ , il est instable pour  $\xi < 0$ . Dans le premier cas, le point d'équilibre porte le nom d'attracteur.

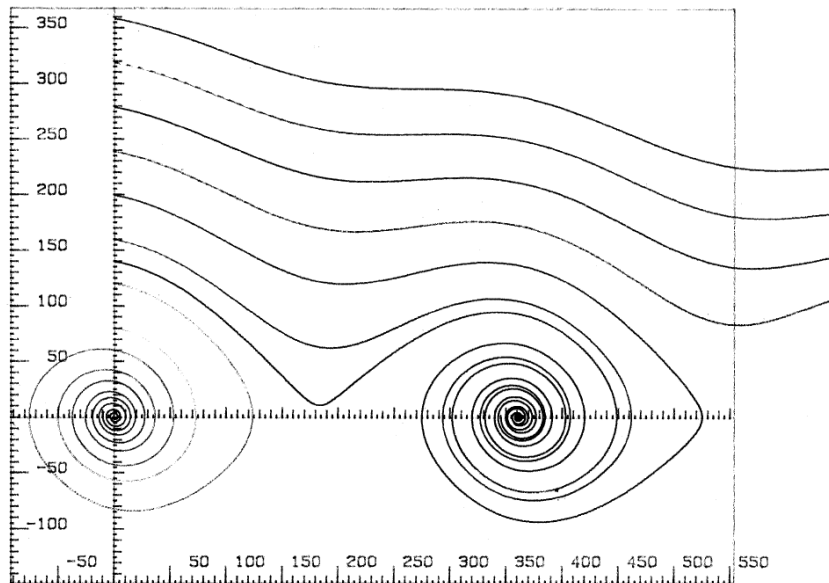
**Rq :** Le facteur de qualité  $Q$  donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations pratiquement observables avant la relaxation vers l'état d'équilibre.

## 2.2 Le pendule pesant

L'équation d'évolution se déduit immédiatement :

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0 \quad (21)$$

On peut alors représenter le portrait de phase :



On constate l'existence d'une infinité d'attracteurs ponctuels de positions  $(2n\pi, 0)$ . Ces attracteurs correspondent à la position d'équilibre stable du pendule :  $x = 0$  à  $2n\pi$  près. A partir de tout point  $M_0$  situé dans le bassin d'attraction d'un attracteur de rang



$n$ , la trajectoire de phase spirale vers le point  $(2n\pi, 0)$ . Qualitativement, ceci correspond à la possibilité d'observer un mouvement oscillatoire amorti précédé d'une phase révolutive pendant  $n$  tours.

**Rq :** les trajectoires de phase ne se recoupent pas. Cette propriété est une conséquence du déterminisme mécanique : deux trajectoires issues d'un point d'intersection  $M_0$  correspondraient à deux évolutions différentes possibles à partir d'un même jeu  $(x_0, \dot{x}_0)$  de conditions initiales, ce qui est exclu.

### 3. Oscillateurs forcés

#### facultatif

Considérons un oscillateur linéaire soumis à une force excitatrice sinusoïdale  $f(t) = F \cos(\omega t)$ . Son équation s'obtient en ajoutant ainsi ce terme source :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F \cos(\omega t) \quad (22)$$

Posons  $\omega^2 = k/m$  et  $2\xi = h/m$ . Avec ces notations, l'équation d'évolution du système s'écrivent :

$$\dot{x} = v, \text{ et } \dot{v} = -\omega^2 x - 2\xi v + \frac{F}{m} \cos(\omega t)$$

L'examen du portrait de phase de cet oscillateur (figure de gauche) conduit aux remarques suivantes :

- En présence d'une excitation extérieure, les trajectoires de phase peuvent se couper. Cette situation n'est nullement en contradiction avec le principe du déterminisme mécanique. En effet, au point d'intersection les deux points de phase ne correspondent pas à la même date et les excitations appliquées au système ne sont pas les mêmes. Bien que le système se retrouve au point d'intersection avec le même état dynamique, il peut, sous des excitations extérieures distinctes, avoir des évolutions ultérieures différentes.
- Les trajectoires de phase tendent vers un cycle limite dont les caractéristiques sont indépendantes des conditions initiales. Ce cycle limite correspond au régime forcé de l'oscillateur et sa géométrie n'est déterminée que par les propriétés du système et celles de l'excitation. C'est un nouveau type d'attracteur.

Le portrait de phase de la figure du milieu, est le portrait de phase d'un oscillateur linéaire d'équation :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F \cos^2(\omega t) \quad (23)$$

Soumis à une force excitatrice différente, on vérifie que le cycle limite n'a pas la même géométrie.

Le portrait de phase de la figure de droite est celui d'un oscillateur non linéaire excité sinusoïdalement :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)^3 - h\dot{x} + F \cos(\omega t) \quad (24)$$

Le cycle limite est différent de celui de l'excitateur linéaire sous la même excitation.

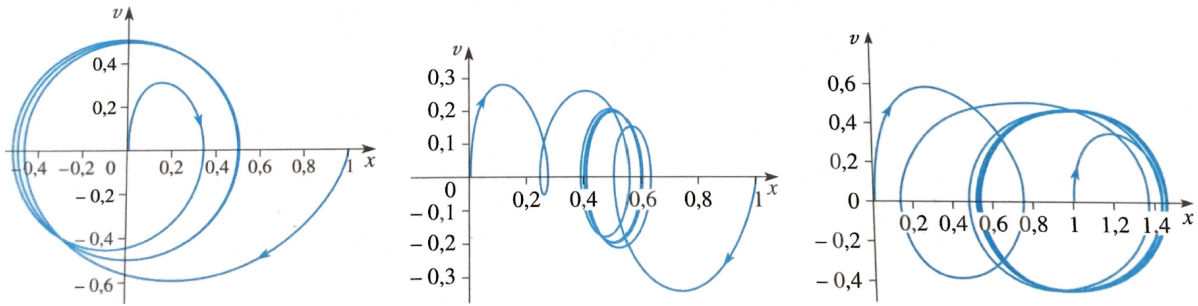


FIGURE 3 – Portrait de phase d'un oscillateur : linéaire excité sinusoidalement (gauche), linéaire excité non sinusoidalement (milieu) et non linéaire excité sinusoidalement (droite).

## 4. Oscillateurs auto-entretenus

Un système qui, tel une horloge, évolue indéfiniment de façon périodique doit recevoir de l'énergie pour compenser les phénomènes dissipatifs inévitables qui accompagnent son fonctionnement. Un tel système est appelé oscillateur entretenu.

### 4.1 Le modèle de Van der Pol

Tentons de proposer un modèle mathématique, le plus simplement possible, décrivant un oscillateur entretenu. Il est tout d'abord évident que ce modèle ne saurait être linéaire : la trajectoire de la phase souhaitée doit être un cycle  $C$  bien défini ; si le système était décrit par une équation différentielle linéaire, tout cycle homothétique  $\lambda C$  serait également solution. Au cours de l'étude de l'oscillateur harmonique amorti, nous avons vu que, dans l'équation différentielle (17), c'est le signe du coefficient de  $\dot{x}$  qui régit le sens des échanges énergétiques de l'oscillateur. Le modèle le plus simple consiste à remplacer ce coefficient constant par une expression parabolique :

$$\xi = -\xi_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right]$$

et l'équation dynamique de l'oscillateur est :

$$\ddot{x} - \xi_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (25)$$

appelée équation de Van der Pol.

Il est possible de lui donner une autre forme en introduisant des variables adimensionnées :

$$x \rightarrow \frac{x}{x_0} \sqrt{\xi_0} \text{ et } t \rightarrow \omega t$$

D'où la forme :

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (26)$$

avec  $\epsilon = \xi_0 > 0$ .

Bien qu'il ne soit pas possible d'intégrer cette équation autrement que par des méthodes numériques, on peut prévoir qualitativement le comportement des solutions : si la valeur initiale  $x_0$  de  $x$  est faible, le coefficient de  $\dot{x}$  est négatif ce qui correspond à une tendance à l'amplification des oscillations ; inversement quand  $x$  prend des valeurs importantes, ce coefficient devient positif ce qui doit tendre à réduire l'amplitude des oscillations.

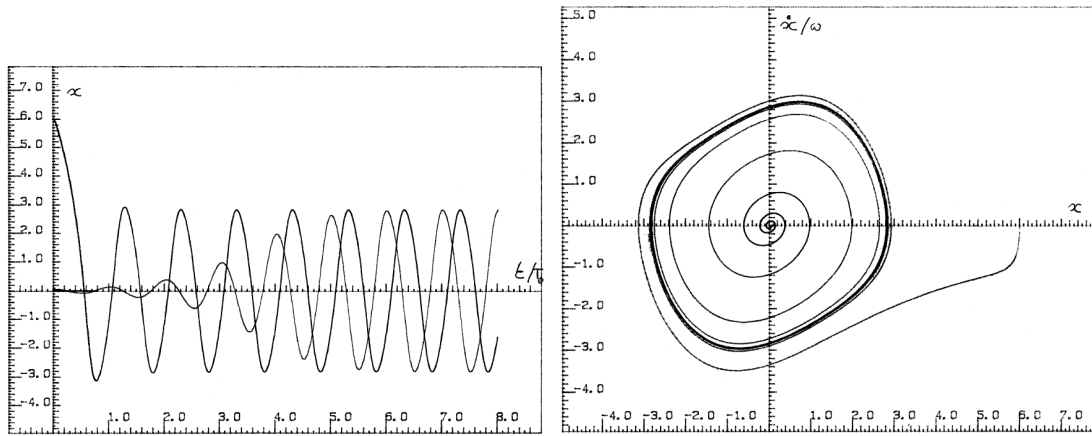


FIGURE 4 – Oscillateur de Van der Pol pour  $\epsilon = 2$ .

L'effet de régularisation des oscillations qui était souhaité est bien obtenu : quelles que soient les conditions initiales, on tend vers un régime permanent d'amplitude bien définie. Un tel diagramme  $x(t)$  ne permet pas toutefois de constater avec précision si ce régime est ou non périodique ( et encore moins s'il est sinusoïdal : il est très difficile de distinguer "à vue" une sinusoïde d'une autre courbe oscillante). Pour conclure, il faut tracer le portrait de phase.

On vérifie cette fois avec une excellent précision l'existence d'un cycle limite (nouveau cas particulier de l'attracteur) ce qui atteste le caractère périodique du régime permanent. Ce cycle n'étant visiblement pas circulaire (sauf pour  $\epsilon \ll 1$ ), on peut affirmer que le régime permanent de l'oscillateur de Van der Pol est non-sinusoïdal (ce caractère accrue lorsqu'on augmente  $\epsilon$ ).

**Rq :** Ce cycle est le même pour toutes trajectoires de phase, il est indépendant des conditions initiales. L'attracteur est entièrement déterminé par la nature de l'oscillateur (c.a.d ici par le choix de  $\epsilon$ ).

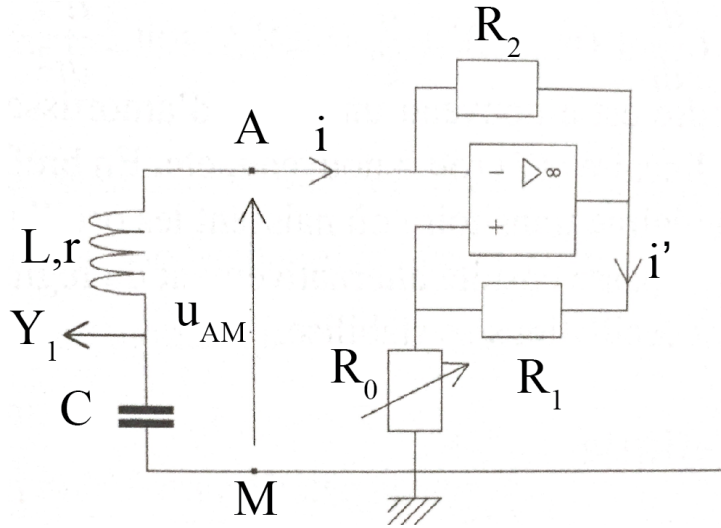
## 4.2 L'oscillateur à résistance négative

**MANIP Oscillateur à résistance négative Bellier Elect p.326 et Portelli p.245**

**Manipuler en même temps que la présentation**

Dans ce type d'oscillateurs, il faut parvenir à compenser les pertes dues aux amortissements. Pour cela on utilise une compensation par une résistance négative.

On prend  $R_1 = R_2 = 1000\Omega$  ;  $L = 16mH$ ,  $r = 20\Omega$  et  $C = 100nF$ .  $R_0$  est une résistance variable initialement nulle.



### Régime linéaire

En régime linéaire, on a  $\epsilon = V^+ - V^- = 0$  d'où  $R_2 i + R_1 i' = 0$ , soit :

$$i' = -i \frac{R_2}{R_1} \text{ et } u_{AM} = -i \frac{R_0 R_1}{R_2}$$

On suppose par la suite que  $R_1 = R_2$ , d'où  $u_{AM} = -R_0 i$ .

La loi des mailles donne :

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + r i + \frac{q}{C} + u_{AM} &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + (r - R_0) i + \frac{q}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Par dérivation on obtient :

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 i}{dt^2} + (r - R_0) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\lambda \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

avec  $2\lambda = (r - R_0)/L$  et  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

La résolution de cette équation conduit à une solution du type :

$$i(t) = I_{max} \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \phi)$$

où  $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ .

On constate que, si l'on ajuste  $R_0$  pour obtenir  $R_0 = r$ , alors le terme d'amortissement  $\lambda$  s'annule et des oscillations sinusoïdales apparaissent dans le circuit avec  $\omega^2 = \omega_0^2 = 1/LC$ . Ces oscillations naissent des petits courants de polarisation de l'amplificateur opérationnel qui ne sont pas tout à fait nuls.

En pratique, la condition  $R_0 = r$  est difficile à réaliser et le montage commence à osciller si  $R_0$  est légèrement supérieure à  $r$  ( $\lambda < 0$ ). Dans ce cas, on a un accroissement exponentiel de l'amplitude du courant avec le temps. Mais, l'amplitude du courant ne peut décroître indéfiniment, car lorsque  $i$  atteint sa valeur limite alors l'A.O. sature en tension et le montage ne joue plus alors son rôle de résistance négative :

$$i_{lim} = \frac{V_{sat}}{(R_0 + R_1)} \quad (29)$$

Pour des amplitudes telles que  $|i| > i_{lim}$ , l'A.O. fonctionne en régime saturé

## Régime saturé

En régime saturé, on a :

$$- u_{AM} = R_1 i + V_{sat} \text{ pour } i < -i_{lim}$$

$$- u_{AM} = R_1 i - V_{sat} \text{ pour } i > -i_{lim}$$

Ainsi la loi des mailles donne :

$$L \frac{di}{dt} + (r + R_1)i + \frac{q}{C} = \pm V_{sat} \quad (30)$$

Par dérivation on obtient :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + (r + R_1) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (31)$$

Le terme du premier ordre est à nouveau un terme d'amortissement et  $i$  décroît, on repasse alors en régime linéaire et  $i$  croît à nouveau, etc... En bref, si  $R_0$  est légèrement supérieur à  $r$ , après un régime transitoire où naissent les oscillations (l'A.O. est alors en régime linéaire, l'A.O. passe ensuite alternativement du régime linéaire au régime saturé et l'amplitude des oscillations se stabilise.

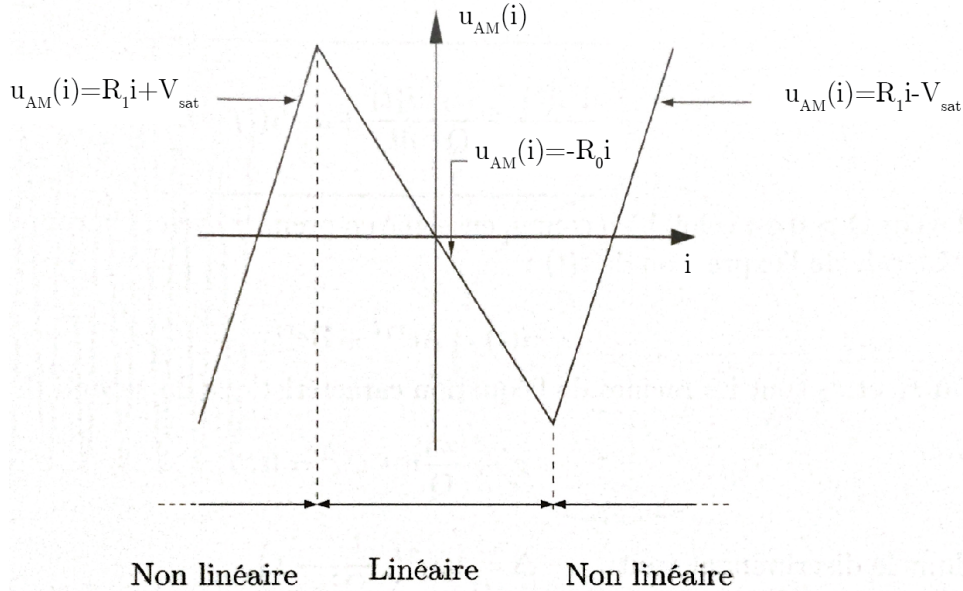


FIGURE 5 – Caractéristique  $u_{AM}$  du dipôle à résistance négative.

La caractéristique  $u_{AM}$  montre qu'il est légitime de modéliser celle-ci par une équation cubique de la forme  $u_{AM}^{test}(i) = -R_0 i + \alpha i^3$  ; le paramètre  $\alpha$  est ajusté de telle façon que les extrema de  $u_{AM}^{test}(i)$  coïncident avec ceux de  $v(i)$ .

$$\frac{du_{AM}}{di} = 0 \implies \alpha = \frac{R_0}{3i^2}$$

Les extrema coïncident lorsque  $i = i_{lim} = V_{sat}/(R_0 + R_2)^2$ , donc

$$\alpha(R_0) = \frac{R_0}{3V_{sat}^2} (R_0 + R_2)^2$$

## Équation différentielle dans le régime non-linéaire

Ainsi pour obtenir l'équation différentielle de  $i(t)$  dans le régime non linéaire, il suffit de remplacer  $u_{AM} = -R_0i$  par  $u_{AM}(i) = -R_0i + \alpha i^3$  dans la loi des mailles. Il vient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} \frac{1}{L} (3\alpha i^2 - (R - R_0)) \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (32)$$

soit encore :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \epsilon \left[ \left( \frac{i}{i_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (33)$$

où  $\epsilon = (R_0 - r)/L = -\omega_0/|Q|$  et  $i_0 = \sqrt{(R_0 - r)/3\alpha}$ .

Nous avons ainsi montré que le montage à résistance négative, couplé à un circuit RLC, permet d'obtenir des oscillations dont l'amplitude évolue dans une bonne approximation suivant l'équation différentielle non linéaire de Van der Pol.

**Rq :** Soit le facteur de dilatation  $\lambda$  qui permet de réécrire l'équation de Van der Pol sous la forme canonique. L'éq. différentielle satisfait par la variable  $x(t) = \lambda i(t)$  s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + \epsilon \left( \frac{x^2}{i_0^2 \lambda^2} - 1 \right) \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Ainsi pour que  $x(t)$  soit solution de

$$\ddot{x}(t) + (x^2 - \epsilon) \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

il faut que  $\lambda = \frac{\sqrt{\epsilon}}{i_0}$ .

## Étude des diagrammes de phase

Si on réécrit les équations obtenues pour le régime linéaire et saturé avec  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $(r - R_0)/L = \omega_0/Q$  et  $(r + R_1)/L = 1/\tau$ . Introduisant la variable réduite  $x = i/i_{lim}$ , on obtient les formes normalisées des équations précédentes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 ; |x| < 1 \quad (34)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 ; |x| > 1 \quad (35)$$

Il est facile de prévoir le comportement du système :  $x = 0$  est une position d'équilibre instable ; partant d'une valeur de  $x_0$  même très faible, il effectue des oscillations amplifiées (34) jusqu'à ce que  $x$  dépasse la valeur 1. Pour  $x > 1$ , le système a un comportement d'oscillateur amorti (35) qui fait redescendre rapidement au-dessous de la valeur de saturation... Le système passant ainsi, tel l'oscillateur de Van der Pol, alternativement par des phases d'amplification et d'amortissement, on conçoit que son comportement soit analogue.

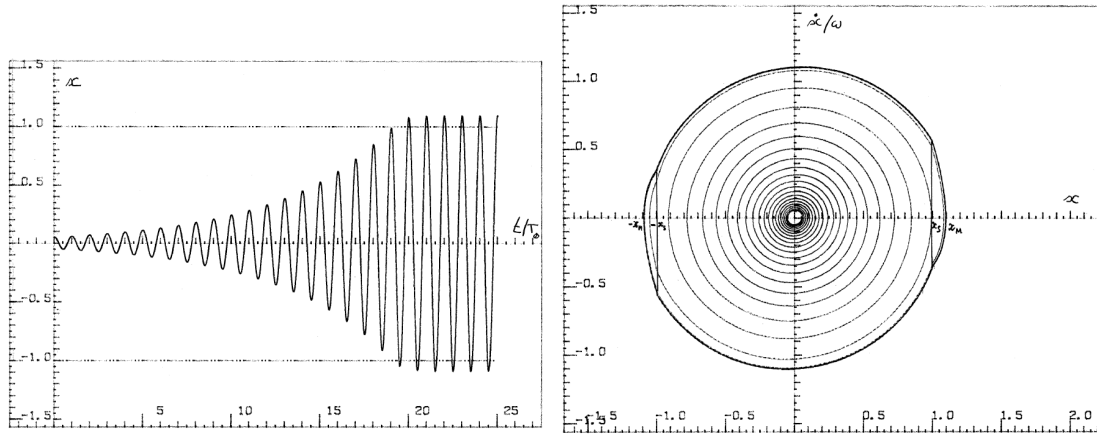


FIGURE 6 – Oscillateur à résistance négative  $Q = -20$  et  $\tau = 0.2$

Cette analyse est confirmée par les figures obtenues par simulation numérique (avec  $Q = -20$ ,  $\tau = 0.2$ ,  $x_0 = 0.05$ ). A la seule vue de la représentation  $x(t)$  de la figure on serait tenté d'affirmer le caractère sinusoïdale des oscillations entretenues (régime permanent). Le portrait de phase correspondant montre que l'on obtient bien des oscillations périodiques (existence d'un cycle limite) mais que celles-ci ne sont pas exactement sinusoïdales (caractère légèrement non circulaire du cycle).

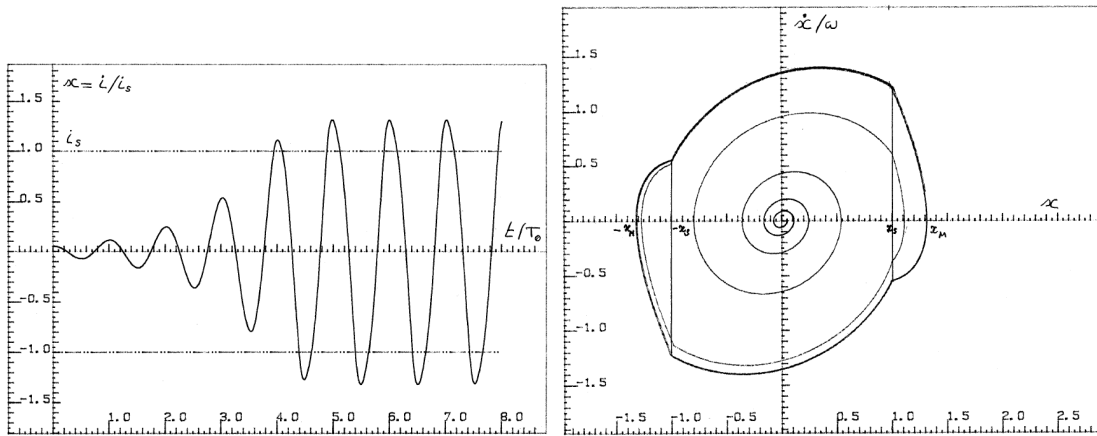


FIGURE 7 – Oscillateur à résistance négative  $Q = -4$  et  $\tau = 0.2$

On vérifie toutefois que, s'il est légitime, dans les conditions expérimentales usuelles ( $Q$  de module grand devant 1), de qualifier les oscillations entretenues de quasi-sinusoïdales, les figures (réalisées avec  $Q = -4$ ) montrent que le caractère non-sinusoïdal peut devenir très net pour des valeurs de  $Q$  de module plus faible.

### Propriétés communes des oscillateurs entretenus

Il est possible de donner aux équations de Van der Pol et (34)-(35) la forme commune :

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (36)$$

- pour l'oscillateur de Van der Pol :  $A(x) = x^2 - \epsilon$ , expression qui change de signe pour  $x = \pm x_S = \pm\sqrt{\epsilon}$
- pour l'oscillateur à résistance négative :  $A(x) = \omega/Q < 0$  pour  $|x| < x_S = 1$  et  $A(x) = 1/\tau > 0$  pour  $|x| \geq 1$ .

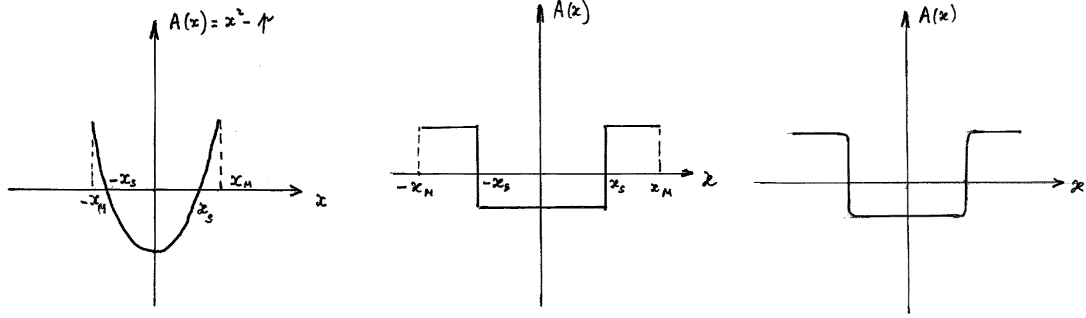


FIGURE 8 – (A gauche) Oscillateur de Van der Pol. (Au centre) Oscillateur à résistance négative. (A droite)  $A(x)$

Les figures donnent l'allure de la fonction  $A(x)$ . En fait, dans le cas de l'oscillateur à résistance négative, nous avons utilisé une caractéristique idéalisée pour l'amplificateur opérationnel ; dans la pratique la fonction  $A(x)$  ne présente pas de discontinuités de pente.

L'analogie des profils est évidente : sur les cycles limites, on distingue des phases alternées d'amplification dominante ( $|x| < x_S$ ) et d'amortissement dominant ( $|x| > x_S$ ). Sur la figure on peut repérer aisément ces phases successives grâce aux discontinuités de pente (bosses) pour  $|x| = x_S$  introduites par les discontinuités du modèle adopté.

En multipliant (36) par  $\dot{x}dt$  et en intégrant sur une période il vient :

$$\int_0^T d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + \int_0^T A(x)\dot{x}^2 dt + \int_0^T \left(\frac{\omega_0^2 x^2}{2}\right) = 0 \quad (37)$$

le premier terme et le troisième sont nuls, de sorte que :

$$\int_0^T A(x)\dot{x}^2 dt = 0 \quad (38)$$

relation qui exprime la compensation sur un cycle des phases d'amortissement et des phases d'amplification dominante. La relation va nous servir à estimer la valeur de l'amplitude  $x_M$  des oscillations de Van der Pol. Dans ce cas, pour  $\epsilon$  petit, les oscillations sont quasi-sinusoidales :

$$x = x_M \cos(\omega_0 t)$$

et, en reportant dans l'équation on obtient :

$$x_M = 2\sqrt{\epsilon} = 2x_S$$

Finalement on constate que sur les cycles limites obtenus pour différentes valeurs de  $\epsilon$  que cette propriété demeure très bien vérifiée, même pour  $\xi$  grand, c'est à dire pour des oscillateurs fortement non-linéaires engendrant des oscillations nettement non-sinusoidales.

Enfin soulignons à nouveau que les cycles limites, ou attracteurs, sont indépendants des conditions initiales. Ce comportement est propre à tout système dissipatif non chaotique dont on montre qu'il évolue nécessairement vers un état indépendant des conditions initiales. Si on considère, par exemple, un ensemble de conditions initiales représentées sur le diagramme de phase par des points voisins occupant un domaine continu d'air  $dA$ , on établit qu'à des dates  $t$  successives l'aire du domaine occupé par les points représentatifs



correspondants va en décroissant jusqu'à s'annuler lorsqu'on atteint précisément le cycle limite.

**Rq :** Calcul de la période dans le cadre d'un régime fortement non linéaire. Si on analyse l'ordre de grandeur de l'équation de Van der Pol pour l'oscillateur à résistance négative (p.260 Portelli) on peut en première approximation négliger le terme  $\ddot{x}$ . Nous calculons la période des oscillations dans ce cadre :

$$(x^2 - \epsilon)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \dot{x} = f(x) = \frac{\omega_0 x}{\epsilon - x^2}$$

d'où le calcul de la période des oscillations :

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0^2} \int_{x_M}^{x_S} dx \left( \frac{\epsilon}{x} - x \right)$$

soit :

$$T = \frac{2}{\omega_0^2} \left( \epsilon \ln \left( \frac{x_M}{x_S} \right) - \frac{1}{2} (x_M^2 - x_S^2) \right)$$

Si l'on admet que l'on a  $x_M \approx 2x_S = 2\sqrt{\epsilon}$ , alors :

$$T \approx \frac{\epsilon}{\omega_0^2} (3 - 2 \ln(2)) \quad (39)$$

Cette période augmente avec  $\epsilon$  de façon linéaire dans le régime  $\epsilon \gg 1$ .

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon la richesse en terme de connaissance que peut nous apporter le portrait de phase dans le cadre d'oscillateur. En régime linéaire et non-linéaire il s'avère que cet outils reste fiable et efficace afin de caractériser notre système. Nous avons finis cette leçon par l'oscillateur de Van der Pol qui peut constituer une illustration plus réaliste de certains phénomènes physique. Bien entendu le but ultime serait de se rapprocher le plus près des phénomènes chaotiques qui sont présents autour de nous comme dans le domaine météorologique où les écoulements turbulents qui occupent les hautes couches atmosphérique sont caractérisés par des phénomènes stochastiques. Ainsi par cette leçon la question de l'impossibilité de prévoir le temps à moyen ou long terme peut recevoir une réponse partielle. Enfin, la sensibilité aux conditions initiales peut expliquer ce qu'Edward Lorenz a poétiquement appelé l'effet papillon.