L.P. 24 - Ondes progressives. Ondes stationnaires

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis	**Bibliographie**
• Mécanique du point	• Physique Tout en un PC-PC*, Sanz, *Dunod*
• Signaux	• H-prépa Ondes, *Hachette supérieur*
	• Ondes mécaniques et diffusion, Garing *Ellipse*

Introduction

Dans la partie correspondant aux signaux physique du cours de première année de prépa, un certain nombre de phénomènes de propagation ont été étudiés, sans référence à l'équation d'onde (équation aux dérivées partielles) vérifiée par la grandeur physique considérée. Dans cette leçon nous allons établir sur deux exemples l'équation de propagation et relier celle-ci aux phénomènes rencontrés en première année de prépa.

Manip : Une ficelle, ont une extrémité est fixée à un mur, est maintenue tendue par un observateur. Lorsque l'expérimentateur imprime une secousse à l'extrémité de la corde, ce déplacement ne met pas brutalement en mouvement toute la corde : une onde, caractérise par le déplacement d'un point de la corde, se propage le long de celle-ci milieu de propagation matériel et continu.

Nous retrouvons un phénomène de propagation d'onde, présentant des similitudes avec la propagation des déformations le long d'une chaîne de mobiles couplés : la déformation imposée à la corde se propage le long de la corde.
Dans les deux cas, l'onde se propage dans la direction (Ox) de la corde ou de la chaîne de mobiles. Cependant :

- Le mouvement des mobiles considérés est parallèle à (Ox) ;
- Le déplacement de la corde est perpendiculaire à cette direction de propagation.

Dans le cas de la chaîne de mobiles, nous parlerons d'ondes longitudinales, alors que dans le cas de la corde il s'agit d'ondes transverses.

Observons plus attentivement la propagation le long de la corde en prenant des clichés de celle-ci aux instants successifs : $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, ...$ Nous constatons que la déformation de la corde est à chaque fois la même mais qu'elle se déplace pendant un intervalle de temps Δt, d'une longueur Δx proportionnelle à Δt :

$$\Delta x = c\Delta t \tag{1}$$

L'onde de déformation se propage ainsi à la vitesse c constante le long de la corde, dans le sens des x croissants : c'est une onde progressive.
Le déplacement $y(x,t)$ de la corde vérifie :

$$y(x + c\Delta t, t + \Delta t) = y(x,t) \tag{2}$$

Une telle fonction reste donc constante si $u = t - \frac{x}{c}$ est fixée. Elle ne dépend que de la seule variable u :

$$y(x,t) = f(u) = f(t - \frac{x}{c}) \tag{3}$$

Rq : Autrement dit soit en $t = 0$ on a $y(?,t) \rightarrow y(t - x/c, 0) = y(u)$ avec $u = t - x/c$.

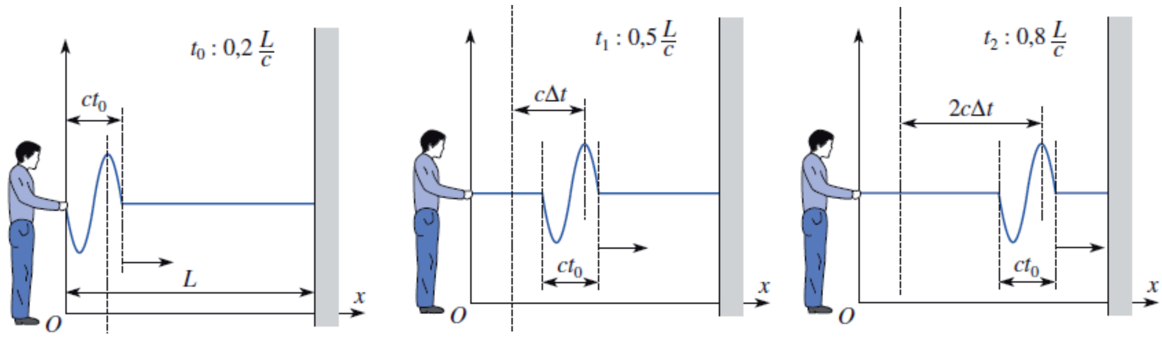
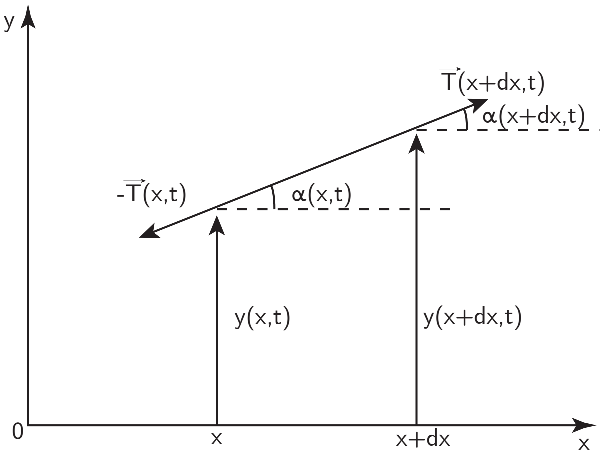


FIGURE *1 – Propagation d'une déformation imprimée à la corde* $c\Delta t = 0.3L$*, clichés à* t_0*, puis* $t_0 + \Delta t$*, puis* $t_0 + 2\Delta t$*...*

On va voir justement dans cette leçon que la fonction d'onde $y(x,t) = f(u(x,t))$ est solution de l'équation de propagation de d'Alembert.

1. La corde vibrante : équation de d'Alembert et ses solutions



Soit une corde sans raideur, inextensible, de masse linéique constante μ, est tendue par une tension $\overrightarrow{T}$. Au repos elle se confond avec l'axe Ox.

De part et d'autre de cette position d'équilibre, on étudie les petits mouvement transversaux de cette corde dans le plan xOy, en admettant qu'un élément de corde au repos (point M_0) reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse x à l'instant t (point M) est notée $y(x,t)$. La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x,t)$ qui reste petit, ce qui suppose que $|\frac{\partial y}{\partial x}| \ll 1$.

Rq :$\tan(\alpha) = \alpha = dy/dx$ et soit le triangle rectangle $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2(1 + dy^2/dx^2) = dx^2(1 + (dy/dx)^2) = dx^2(1 + \alpha^2)$.

Enfin, l'action du champ de pesanteur sur le mouvement, ainsi que toute cause d'amortissement sont négligées.

Soit la longueur de la corde varie très peu lorsqu'elle vibre. On appelle α l'angle que fait la tangent à la corde au point M_0, à l'instant t. L'élément de la corde est donné par pour des petits mouvements ($|y(x,t| \ll L$ et $|\alpha(x,t)| \ll 1$) :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \simeq dx^2(1+\alpha^2) \tag{4}$$

car $\tan(\alpha) = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ reste petit donc : $ds \simeq dx$.

Rq : On peut justifier, au même ordre d'approximation près, que la tension $\overrightarrow{T}$ reste tangent à la corde. En effet considérons le même élément de la corde. Son moment d'inertie par rapport à un axe passant par une des extrémités est en ds^2. D'après le théorème du moment cinétique en ce point, et toujours au même ordre d'approximation près, le moment de la tension à l'autre extrémité apparaît donc nul, ce qui suppose que cette tension reste tangente à la corde (il n'y a pas de couple de flexion car la corde est souple).

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour un élément de la corde de masse $\mu ds \simeq \mu dx$, compris entre x et $x + dx$. En considérant les hypothèses prises et en prenant $\overrightarrow{T}(x)$ la tension au point d'abscisse x exercée par la partie de droit sur la partie de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu dx \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{T}(x+dx) - \overrightarrow{T}(x) = \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial x} dx \\ \Rightarrow \mu \overrightarrow{a} &= \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial x} \end{aligned} \tag{5}$$

En projection sur Ox : $0 = \dfrac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow T_x = T\cos(\alpha) = Cste$.
Soit puisque $\alpha \ll 1$, $T = |\overrightarrow{T}| = Cste$.

En projection sur Oy : $\mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial T_y}{\partial x} = \dfrac{\partial (T\sin(\alpha))}{\partial x} = (T\cos(\alpha))\dfrac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x} \simeq T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

D'où l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

avec $v = \sqrt{T/\mu}$ la célérité de l'onde.

2. Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

2.1 Ondes planes progressives

On a vu à l'introduction que pour une déformation identique au cours du temps le long de la corde on pouvait écrire la déformation comme étant $y(u) = y(t - x/v)$ pour une propagation vers les x croissants.

On introduit les grandeurs $p = t - \frac{x}{v}$ et $q = t + \frac{x}{c}$. Soit donc le changement de variable suivant :

$$p = t - \frac{x}{v} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = 1 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{v}$$
$$q = t + \frac{x}{v} \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = 1 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{v}$$

Considérant les anciennes variables en fonction des nouvelles,

$$x = x(p,q) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{v}\left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)$$
$$t = t(p,q) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Sous forme de composition d'opérateurs (il s'agit de trouver le noyau de l'opérateur d'Alembertien), on écrit $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) y = 0$, soit :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v}\left[-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\cdot\frac{1}{v}\left[-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right] y = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial q}\right) y = \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

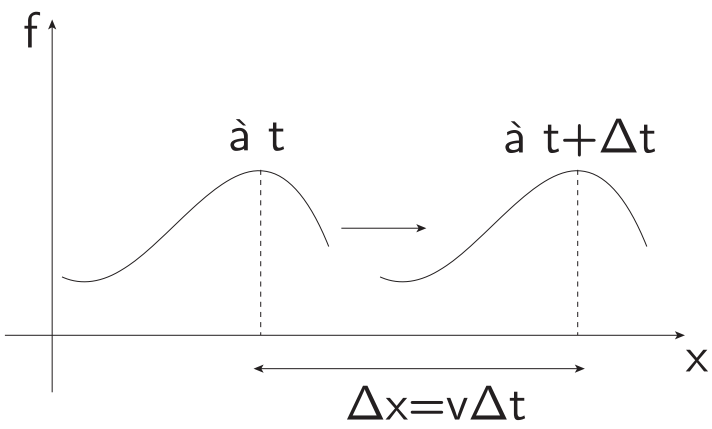
Après intégration par rapport à p, il vient $\frac{\partial y}{\partial q} = G(q)$, et après intégration par rapport à q, $y(p,q) = f(p) + g(q)$ où g est une primitive de G. La solution générale s'écrit donc :

$$y(x,t) = f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v}) \tag{8}$$

f et g étant deux fonctions quelconques (au niveau de l'expression analytique pourvu qu'elles soient continues et deux fois dérivables.

Comment interpréter ces solutions ?

Considérons le cas $y_1(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$, en notant que $t - \frac{x}{v} = t\Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}$ si $\Delta x = v\Delta t$, il vient alors $y_1(x,t) = y_1(x + \Delta x, t + \Delta t)$.
Cela signifie que le signal y_1 apparait en $x + \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$ exactement comme il état en x à l'instant t ; il s'est donc propagé, identique à lui même , pendant l'intervalle de temps Δt sur une distance $\Delta x = v\Delta t$.
La constante v représente ainsi la vitesse de propagation du signal y_1 (célérité).



$f(t-\frac{x}{v})$ est une onde progressive se propageant à la vitesse v dans la direction des x croissants. A l'instant t, dans tout le plan $x = Cste$, f a la même valeur : l'onde progressive est dire plane.
La solution $y(x,t) = f(t-\frac{x}{v}) + g(t+\frac{x}{v})$ représente ainsi la superposition de deux ondes planes progressives se propageant à la même vitesse suivant l'axe Ox, mais en sens opposé.

Def onde plane : La déformation subit par la corde est la même/constante dans un seul plan. L'amplitude de déformation est constante.

2.2 Ondes progressives harmoniques

Rq : L'intérêt d'utiliser une notation complexe pour décrire la propagation des ondes résides dans le fait tout d'abord d'avoir une aisance dans les calculs liés aux équations de d'Alembert, mais aussi dans le fait que l'on fait apparaitre une seule fréquence. De plus cette notation est plus pratique pour reconstruire un paquet d'onde par exemple.

Constatant que les ondes que nous avons étudiées jusqu'à présent correspondent à des mouvements vibratoires de systèmes stables, nous pouvons rechercher des solutions de l'équation de d'Alembert à dépendance sinusoïdale vis à vis du temps ; c'est à dire tel que :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t) \tag{9}$$

avec ω la pulsation de l'onde.
Cherchons donc, en notation complexe, une solution de la forme :

$$\underline{y}(x,t) = \underline{A}(x)\exp(j\omega t) \tag{10}$$

L'équation de propagation vérifiée pour tout t, impose :

$$\frac{d^2\underline{A}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\underline{A}(x) = 0 \tag{11}$$

Dont la solution générale est de la forme :

$$\underline{A}(x) = \underline{y}_{01}\exp(-jkx) + \underline{y}_{02}\exp(jkx) \tag{12}$$

avec $\underline{y}_{01} = y_{01}\exp(j\phi_{01})$ et $\underline{y}_{02} = y_{02}\exp(j\phi_{02})$.

On note que $k = \frac{\omega}{v}$ le vecteur d'onde dirigé dans le sens de propagation de l'onde.

Les solutions sinusoïdales recherchées sont donc de la forme :

$$\underline{y}(x,t) = \underline{y}_{01}\exp(j(\omega t - kx)) + \underline{y}_{02}\exp(j(\omega t + kx)) \tag{13}$$

Soit en notation réelle :

$$y(x,t) = y_{01}\cos(\omega t - kx + \phi_{01}) + y_{02}\cos(\omega t + kx + \phi_{02}) \tag{14}$$

Nous reconnaissons ici la forme générale obtenue précédemment, avec :

$$\begin{aligned} f\left(t - \frac{x}{v}\right) &= y_{01}\cos(\omega t - kx + \phi_{01}) \\ g\left(t + \frac{x}{v}\right) &= y_{02}\cos(\omega t + kx + \phi_{02}) \end{aligned} \tag{15}$$

Chaque terme de la solution caractérise une onde plane progressive harmonique. Ainsi l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :

– du temps avec une pulsation temporelle ω
– de la variable spatiale x, avec une pulsation spatiale k

On parle de la double périodicité spatio-temporelle de l'onde.

De même que la période temporelle $T = 2\pi/\omega$, la période spatiale est la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.
La fréquence spatiale est le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$.
Le lien entre les deux aspects se fait par l'intermédiaire de l'équation de d'Alembert, qui donne la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{16}$$

3. Solution en ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert

A présent la corde de longueur l est fixée en ses extrémités, deux points de l'axe Ox d'abscisse $x = 0$ et $x = l$. Prenons $y(x,t)$ de la forme : $y(x,t) = F_1(t - \frac{x}{v}) + F_2(t + \frac{x}{v})$.
Traduisant les conditions aux limites, à savoir l'immobilité de la corde aux deux bouts :

$$\forall t,\ y(0,t) = F_1(t) + F_2(t) = 0 \implies F_1 = -F_2 \text{ fonction unique notée } F$$
$$\text{d'où } y(x,t) = F(t - \frac{x}{v}) - F(t + \frac{x}{v})$$
$$\forall t, y(l,t) = F(t - \frac{l}{v}) - F(t + \frac{l}{v}) = 0 \implies F(t - \frac{l}{v}) = F(t + \frac{l}{v})$$

et avec le changement de variable $t' = t - \frac{l}{v}$, $F(t') = F(t' + \frac{2l}{v})$. Il apparait donc que F et par conséquence y est "doublement périodique", en t (à x fixé) de période $2l/v$ et en x (à t fixé) de période $2l$.

On cherche des solutions de l'équation sous la forme de variables séparées :

$$y(x,t) = f(x) \cdot g(t) \tag{17}$$

caractéristiques des ondes stationnaires.

En remplaçant $y(x,t) = f(x)g(t)$ dans l'équation de d'Alembert on trouve :

$$\begin{gathered} g\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2g}{dt^2} = 0 \\ \frac{1}{g}\frac{d^2g}{dt^2} = \frac{v^2}{f}\frac{d^2f}{dx^2} \end{gathered} \tag{18}$$

Chaque membre de l'égalité est une fonction d'une variable différent ; les deux membres de l'égalité sont donc égaux à une constante :

– si elle est positive, les solutions sont exponentielles, fonctions incapables de satisfaire les deux conditions aux limites $f(x = 0) = f(x = l) = 0$.
– si elle est nulle, $f(x) = Ax + B = 0$ pour que $f(x = 0) = f(x = l) = 0$
– elle doit être négative, d'où les solutions sinusoïdales :

$$\begin{gathered} \frac{1}{g}\frac{d^2g}{dt^2} = -\omega^2 \Longrightarrow g(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \\ \frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} = -k^2 \Longrightarrow f(x) = \alpha'\cos(kx) + \beta'\sin(kx) \end{gathered} \tag{19}$$

On connait les conditions initiales :

- $f(x=0)=0$ soit $\alpha'=0$
- $f(x=l)=0$ soit $k_n l = n\pi \Longrightarrow k_n = \dfrac{n\pi}{l}$ et $\omega_n = v k_n = \dfrac{n\pi v}{l}$, $n \in \mathcal{N}^*$

Par définition (la longueur d'onde λ est la période spatiale de $y(x,t)$), $k = 2\pi/\lambda$ soit ici :

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l} \\ \Longrightarrow l &= n\frac{\lambda_n}{2} \\ \Longrightarrow f &= \frac{nv}{2l} \end{aligned} \tag{20}$$

La longueur de la corde est un multiple entier de demi-longueurs d'onde.

On veut maintenant l'expression d'une solution $y_n(x,t)$ correspondant au mode de vibration d'indice n. Pour cela on sait que :

$$y_n(x,t) = f_n(x)\cdot g_n(t) = [\beta'_n \sin(k_n x)]\,[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)] \tag{21}$$

Notons $\alpha_n\beta'_n = a_n$ et $\beta_n\beta'_n = b_n$, il vient alors :

$$y_n(x,t) = \left(a_n \cos(\frac{n\pi v t}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi v t}{l})\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{22}$$

ou de manière équivalente $y_n(x,t) = A_n \sin(\omega_n t + \phi_n)\sin(k_n x)$.
On sait que l'équation de d'Alembert est à coefficients constants, homogène et linéaire par rapport aux dérivées. Une expression générale de la solution est donc obtenue par combinaison linéaire sur tous les modes soit$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$; c'est le principe de superposition des petits mouvements.

Le mode n s'écrit sous la forme $y_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t + \phi_n)$.
Le premier facteur peut être interprété comme une amplitude qui dépend de x, le second, le facteur de phase en est alors indépendant et ne dépend que de t ; il n'y a donc plus propagation de la phase : l'onde fait du "surplace" ; la phase de l'onde est dite stationnaire.

MANIP : corde de Melde ! !

Rq : Pourquoi en $x=0$ on a une condition de déformation nulle ? Même sil en $x=0$ il y a l'excitateur la superposition des ondes qui se propage suivant les x croissants et décroissants font que en $x=0$ la déformation de la corde est nulle.

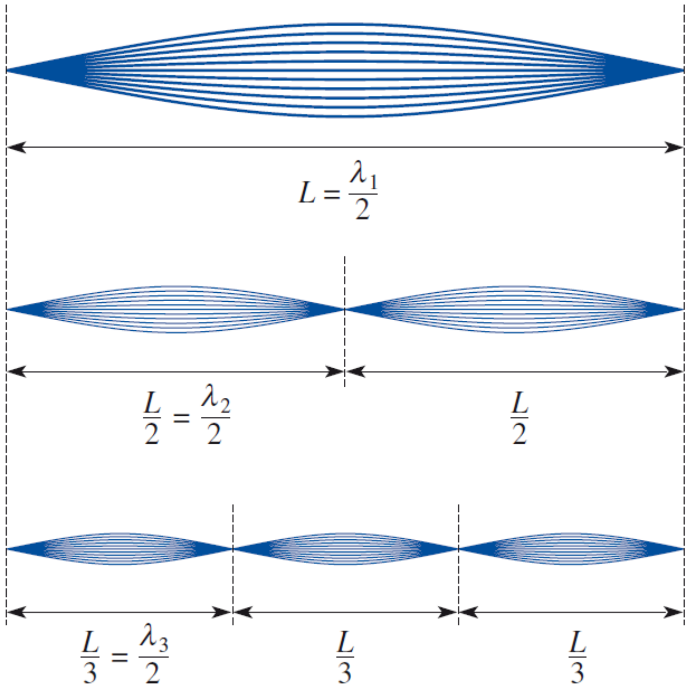


FIGURE 2 – *La corde de Melde en résonance* ($n = 1$, $n = 2$, $n = 3$)

Les points d'amplitude nulle $\forall t$ sont des nœuds de vibration ; ils sont donnés par $\sin(\frac{n\pi x}{l}) = 0$, soit $n+1$ positions : $0, l/n, 2l/n, ..., l$, séparées par $\lambda_n/2$, extrémités comprises. Entre les nœuds, des ventres, c'est à dire des points qui au cours du temps, vibrent avec une amplitude maximale.

4. Aspect énergétique d'une corde vibrante

On a pu voir lors de l'expérience que la déformation se propage avec une certaine vitesse. Cette déformation est permise de part la propagation de l'énergie le long de la corde. Ainsi on va essayer de déterminer l'énergie mise en jeu.

La densité linéique d'énergie $e(x,t)$ de la corde en mouvement est une grandeur telle que l'énergie de la corde à l'instant t s'écrive $E(t) = \int_0^t e(x,t)dx$.

4.1 Notion d'impédance

On a vu dans la première partie que lorsqu'on projetait suivant Oy on avait :

$$\begin{aligned} T_y = T_0\frac{\partial y}{\partial x} \\ \longrightarrow \partial/\partial t \longrightarrow \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0\frac{\partial V_y}{\partial x} \end{aligned} \tag{23}$$

Si on écrit l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit en projetant suivant Oy :

$$\mu dx\frac{\partial V_y}{\partial t} = -T_y(x,t) + T_y(x+dy,t) = \frac{\partial T_y}{\partial x} \Longrightarrow \mu\frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \tag{24}$$

Si on suppose que la tension suivant y est de la forme $T_y = f_T(t - x/v)$ et la vitesse $V_y = f_V(t - x/v)$, alors on peut re-écrire l'équation (23) :

$$T_0.f_V' = -vf_T' \tag{25}$$

Si on intègre équation on obtient :

$$\begin{aligned} -vT_y &= T_0V_y \\ T_y &= -\frac{T_0}{v}V_y \\ T_y &= Z^+V_y \end{aligned} \tag{26}$$

Avec $Z^+ = -\sqrt{T_0\mu}$ l'impédance de la corde pour les x croissants.
En utilisant l'équation (24) on aurait pu trouver la même chose et en procédant à la même démarche pour les x décroissants on obtiendrai une relation similaire avec cette fois ci $Z^- = \sqrt{T_0\mu}$.

4.2 Densité d'énergie linéique de la corde

Soit la puissance est définie par la relation :

$$\mathcal{P} = -\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{u} = -T_yV_y \tag{27}$$

Si on fait un bilan énergétique sur un élément de la corde on va avoir :

$$\begin{aligned} [e(x,t+dt) - e(x,t)]dx &= [\mathcal{P}(x,t)dt - \mathcal{P}(x+dx,t)]dt \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{\partial (T_yV_y)}{\partial x} \\ \Leftrightarrow &= \frac{\partial T_y}{\partial x}V_y + T_y\frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \Leftrightarrow &= \mu\frac{\partial V_y}{\partial t}V_y + \frac{1}{T_0}T_y\frac{\partial T_y}{\partial t} \\ \Leftrightarrow &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu V_y^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{T_0}T_y^2\right) \end{aligned} \tag{28}$$

On retrouve bien :

- la densité d'énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2}\mu V_y^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$
- la densité d'énergie potentielle $e_p = \frac{1}{2}\frac{1}{T_0}T_y^2 = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

A quelle vitesse se déplace cette énergie ?
Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial (T_yV_y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}T_yV_y + \frac{1}{2}T_yV_y\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{T_0\mu})V_y^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{-\sqrt{T_0\mu}}T_y^2\right) \\ &= -\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\mu V_y^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{T_0}T_y^2\right) \\ &= -v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\mu V_y^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{T_0}T_y^2\right) \end{aligned} \tag{29}$$

On voit alors que l'énergie se déplace à la vitesse de la célérité de l'onde v.

4.3 Autre méthode

Densité d'énergie cinétique

Soit l'élément de masse $dm = \mu dx$, de vitesse $\partial y/\partial t$ possède une quantité d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2}\mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow e_c &= \frac{\Delta E_c}{dx} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \end{aligned} \tag{30}$$

avec e_c la densité d'énergie cinétique.

Densité d'énergie potentielle

On considère la corde tout à fait inextensible, pendant le mouvement. Alors sa longueur serait L supérieur à sa longueur de repos l.
Posons :

$$L = \int ds \tag{31}$$

avec $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Alors :

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \simeq \int_0^l \left(1 + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) dx \tag{32}$$

car $|\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1|$, d'où :

$$L = l + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{33}$$

Le travail de l'opérateur (on rappelle que par hypothèse, T reste constant) pendant cet allongement est $W_{0p} = T(L - l) = \frac{T}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$.
En effet, T est le module de la force que devrait exercer un opérateur extérieur à la corde pour obtenir son allongement. Son travail (positif) s'identifie donc à la variation d'énergie potentielle de la corde. E_p étant prise nulle pour la corde au repos, il vient :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{T}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \\ \Longleftrightarrow e_p &= \frac{dE_p}{dx} = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \end{aligned} \tag{34}$$

4.4 Densité d'énergie mécanique

On a la densité d'énergie mécanique :

$$e = e_c + e_p = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{35}$$

avec $v^2 = T/\mu$.
Alors on peut écrire :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right) \tag{36}$$

On reconnait dans le crochet l'équation de d'Alembert qui est nulle. On a alors l'équation local de la conservation de l'énergie (analogue à celle de l'électromagnétisme avec $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} = 0$) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial e}{\partial t} + div(S) = 0 \qquad (3D) \end{aligned} \tag{37}$$

avec $S = -T\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$.
Le terme $\partial S/\partial x$ est la réduction sur l'axe Ox de $div(\overrightarrow{S})$ avec $\overrightarrow{S} = S\overrightarrow{u}_x$, S représentant le flux d'énergie à travers la corde en un point et un instant données (ou plus exactement la puissance puisqu'il n'y a pas de surface ici).
$\partial e/\partial t \neq 0$; l'énergie se propage le long de la corde, mais sa densité n'est pas constante.

4.5 Cas de l'onde stationnaire

On sait qu'une onde stationnaire s'écrit : $y_n(x,t) = A_n\sin(\omega_n t + \phi_n)\sin(k_n x)$. Alors en utilisant l'expression des énergies on peut obtenir les énergies cinétique, potentielle et mécanique :

$$\begin{aligned} E_c^n &= \frac{\mu}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{T}{4}A_n^2k_n^2 l\cos^2(\omega_n t + \phi_n) \\ E_p^n &= \frac{T}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{T}{4}A_n^2k_n^2 l\sin^2(\omega_n t + \phi_n) \\ \Longrightarrow E_n &= \frac{T}{4}A_n^2k_n^2 l = \frac{\pi^2 T}{4l}n^2A_n^2 \end{aligned} \tag{38}$$

Rq : En considérant la corde comme un assemblage de petits éléments (de longueurs dx) qui effectuent chacun autour de sa position de repos respective sur l'axe Ox un mouvement sinusoïdale d'amplitude $A_n\sin(k_n x)$, on aurait la même énergie mécanique.

On veut maintenant calculer l'énergie totale E d'une corde fixée aux deux bouts, en tenant compte de tous les modes :

$$E = \int_0^l\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{39}$$

Avec $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_n A_n\sin(\omega_n t + \phi_n)\sin(k_n x)$; $k_n = \pi n/l$.
Profitant du fait que E ne dépend pas du temps, effectuons le calcul en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}(x) &= \sum_n A_n\omega_n\cos(\phi_n)\sin(k_n x) \\ \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{t=0}(x) &= \sum_n A_n k_n\sin(\phi_n)\cos(k_n x) \end{aligned} \tag{40}$$

On voit bien que l'expression de l'énergie totale va être composée de produit de somme et son expression est trop longue. Pour nous faciliter la démarche on va utilisé l'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus :

$$\int_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m)xdx = \frac{l}{2}\delta_{n,m} \tag{41}$$

avec $\delta_{n,m}$ le symbole de Kroenecker. Pour le cosinus on a la même expression.
Ainsi on peut exprimer facilement E :

$$\begin{aligned} E &= \frac{Tl}{4}\sum_n A_n^2 k_n^2 = \frac{\pi^2 T}{4l}\sum_n n^2 A_n^2 \\ E &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \end{aligned} \tag{42}$$

Il s'agit là d'une illustration du théorème de Parseval, lié à l'orthogonalité des fonctions $\sin(k_n x)$ et $\cos(k_n x)$.
Physiquement il apparait donc que l'énergie totale de la corde vibrante est la somme est énergies de chaque mode ou composante harmonique. Cela n'a rien d'évident a priori puisque l'énergie est une grandeur quadratique par rapport à l'élongation et non linéaire.

Conclusion

On a pu voir dans cette leçon, à travers l'exemple de la corde vibrante comment on pouvait décrire la propagation d'une onde grâce à l'équation de d'Alembert. On a pu voir dans quelles conditions on pouvait obtenir des solutions correspondant à des ondes progressives puis stationnaire. Enfin on a pu faire une étude de l'aspect énergétique, toujours pour le cas de la corde vibrante, on a pu voir qu'une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie (elle la stocke) alors que les ondes progressives ne la stocke pas.
Bien entendu le domaine de la physique des ondes ne s'arrête pas à la corde vibrante mais concerne la propagation des ondes EM, de l'acoustique, des phénomènes de dispersion ou absorption... et cela sera aborder dans d'autres leçon.