

L.P. 27 - Propagation guidée des ondes

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Optique géométrique
- Phys. des ondes
- Équation de Maxwell

Bibliographie

- Physique Tout en un PC-PC*, Sanz, *Dunod*
- H-prépa Ondes, *Hachette supérieur*
- Ondes EM dans les milieux diélectriques, Garing *Ellipse*
- Optique physique, Taillet *Deboeck*
- Quaranta IV

Introduction

On a pu voir dans des leçons précédentes comment se décrit la propagation des ondes à l'aide de l'équation de d'Alembert. Lorsqu'on parle on propage des ondes acoustiques qui se déplace dans un milieu... Mais comment faire pour concentrer en un point toute l'énergie des ondes ? Il faudrait les guider pour les forces et se "diriger" et canaliser l'énergie, pour pouvoir assurer le transport et l'utilisation de cette énergie.

Cette technologie de guidage dépend essentiellement des fréquences et des longueurs d'onde des ondes transporter. Par exemple, les fibres optiques utilisent les variations des indices de réfraction des matériaux isolants pour transporter la lumière dans le domaine du visible ou du spectre proche, tandis que les ondes de fréquence micro-ondes sont canalisées par des guides métalliques.

Le premier guide d'ondes fut proposé par Joseph John Thomson en 1893 et vérifié expérimentalement par Oliver Lodge en 1894.

On a déjà étudié les solutions en ondes planes de l'équation de d'Alembert, qui fait sortir une vitesse de propagation constante. Nous allons désormais étudier le cas d'un milieu dispersif, c'est-à-dire où la vitesse de propagation dépend de la fréquence (exemple introductif du prisme) à travers le guidage des ondes.

1. Guidage d'onde rectangulaire

1.1 Position du problème

Soit quatre plan métalliques parfaitement conducteurs en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$, de longueur infinie suivant Oz , de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide. On veut étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x \quad (1)$$

où $f(y)$ désigne une fonction réelle de la variable y , k_g est une constante positive. On pose $k_g = 2\pi/\lambda_g$ (λ_g est la "longueur d'onde guidée") et $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$.

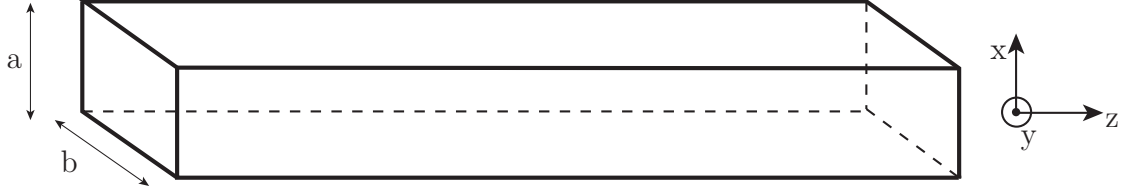


FIGURE 1 – Schéma du système considéré

Soit les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned}
 \text{(M-G)} \quad \operatorname{div}(\vec{E}(M, t)) &= 0 \\
 \text{(M-T)} \quad \operatorname{div}(\vec{B}(M, t)) &= 0 \\
 \text{(M-F)} \quad \operatorname{rot} \vec{E}(M, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \\
 \text{(M-A)} \quad \operatorname{rot} \vec{B}(M, t) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Avec \vec{E} et \vec{B} le champs électrique et magnétique. ε_0 est la permittivité du vide ($\varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$) et μ_0 la perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$).

L'objectif est de coupler \vec{E} et \vec{B} . Soit en prenant le rotationnel de l'équation (M-F) :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}(M, t))) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}\right) \tag{3}$$

L'opérateur rot et $\frac{\partial}{\partial t}$ portent sur des variables indépendante, donc ils se commutent et on obtient en utilisant l'équation (M-A) :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}(M, t))) = -\frac{\partial(\operatorname{rot}(\vec{B}(M, t)))}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} \tag{4}$$

De plus on sait que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$. Ainsi on peut finalement écrire :

$$-\Delta \vec{E}(M, t) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} \tag{5}$$

En posant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ on obtient l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} \tag{6}$$

De la même façon en prenant le rot et en l'appliquant à l'équation (M-A) on obtient :

$$\Delta \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2} \tag{7}$$

On a bien une relation de la forme :

$$f''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) f(y) = 0 \tag{8}$$

Ces ondes doivent être compatibles avec les conditions aux limites (C.L.) qui sont les relations de passage entre deux milieux de l'électromagnétisme. Le métal étant parfait (conductivité infinie), le champ électrique y est nul; par continuité de la composante tangentielle de \vec{E} (\vec{E} est suivant \vec{u}_x , il est donc tangentiel aux parois parallèles à Oxz), il faut $\vec{E}(y=0) = \vec{E}(y=b) = \vec{0}$, d'où $f(y=0) = f(y=b) = 0$. Une solution en exponentielles ne permet pas de satisfaire cette double condition et donc nécessairement $\omega^2/c^2 - k_g^2 > 0$, d'où :

$$f(y) = E^0 \sin \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot y + \phi \right] \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} f(y=0) = 0 &\implies \phi = 0 \\ f(y=b) = 0 &\implies \sin \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot b \right] = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \end{aligned}$$

D'où pour le mode n :

$$f_n(y) = E_0^n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad n \in \mathcal{N} \quad (10)$$

Le champ électrique s'écrit alors $E_0^n \sin(n\pi y/b) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$, ce qui lui confère un caractère hybride : propagatif suivant Oz et stationnaire suivant Oy .

Sur les parois $x=0$ et $x=a$ où le champ \vec{E} est normal, on constate une discontinuité du champ, d'où l'apparition d'une densité superficielle de charge σ .

Comme le champ électrique n'est pas celui d'une onde plane progressive, la relation $\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{E}/c$ n'est pas applicable (d'ailleurs de quel \vec{u} pourrait-il s'agir?). Il est indispensable de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & E(y,z) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ k_g E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \\ -\frac{n\pi}{b} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \end{vmatrix} \quad (11)$$

d'où le champs \vec{B} où les constantes d'intégration sont nulles (le système ne comporte pas de courants continus, il n'y a pas de champ magnétique statique).

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{k_g}{\omega} E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \\ \frac{n\pi}{b\omega} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \end{vmatrix} \quad (12)$$

$E = E_x$ est en phase avec B_z et en quadrature avec B_y . Alors que \vec{E} est polarisé rectilignement, \vec{B} est, "dans un plan $y = cste$, polarisé elliptiquement". Il possède une composante B_z sur la direction de propagation. De ce fait l'onde est bien transverse électrique, mais elle n'est pas transverse magnétique.

Comme \vec{E} , \vec{B} est nul dans le métal parfait. Sur les plans $y=0$ et $y=b$, B_y est composante normale donc continue et on a bien $B_y(y=0) = B_y(y=b) = 0$.

En revanche sur ces mêmes plans, B_z est composante tangentielle et non nulle; cette discontinuité est liée à des courants surfaciques. En $x=0$ et $x=a$, pas de composante normale ($B_x = 0$), donc continuité assurée, mais B_y et B_z sont toutes les deux tangentielles et non nulles, d'où courants surfaciques.

On remarque que \vec{B} n'est pas transverse : sa composante B_x n'est jamais nulle tant que $p \neq 0$.

1.2 Relation de dispersion

On remarque que nous avons la relation $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$. On peut alors écrire la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} k_g^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow k_g &= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega a}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \lambda_g &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

car $k_g = 2\pi/\lambda_g$ et $\omega/c = 2\pi/\lambda_0$.

Rq : λ_g , longueur d'onde guidée, dépend du mode p . Il n'y a plus de propagation pour $k_g = 0 \rightarrow \omega_c = n\pi c/a$.

Ainsi l'onde se propage uniquement si $\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 > 0$. Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes. On peut alors définir une fréquence de coupure :

$$\begin{aligned} \omega &\gtrsim \omega_c = \frac{n\pi c}{a} \\ f &\gtrsim f_c = \frac{nc}{2a} \end{aligned} \quad (14)$$

La fréquence la plus basse est obtenue pour $n = 1$ d'où le fait que l'on peut dimensionner le guide pour avoir $b = \frac{c}{2f_c}$.

1.3 Vitesse de phase et vitesse de groupe

La vitesse de phase d'une onde est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace. Elle est définie comme étant :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_g} \quad (15)$$

Ainsi en utilisant la relation de dispersion on trouve :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} > c \quad (16)$$

La vitesse de groupe caractérise le déplacement de l'ensemble du paquet, c'est si on veut une sorte de vitesse moyenne du groupe d'ondes planes qui définit le signal. Elle est définie par la relation :

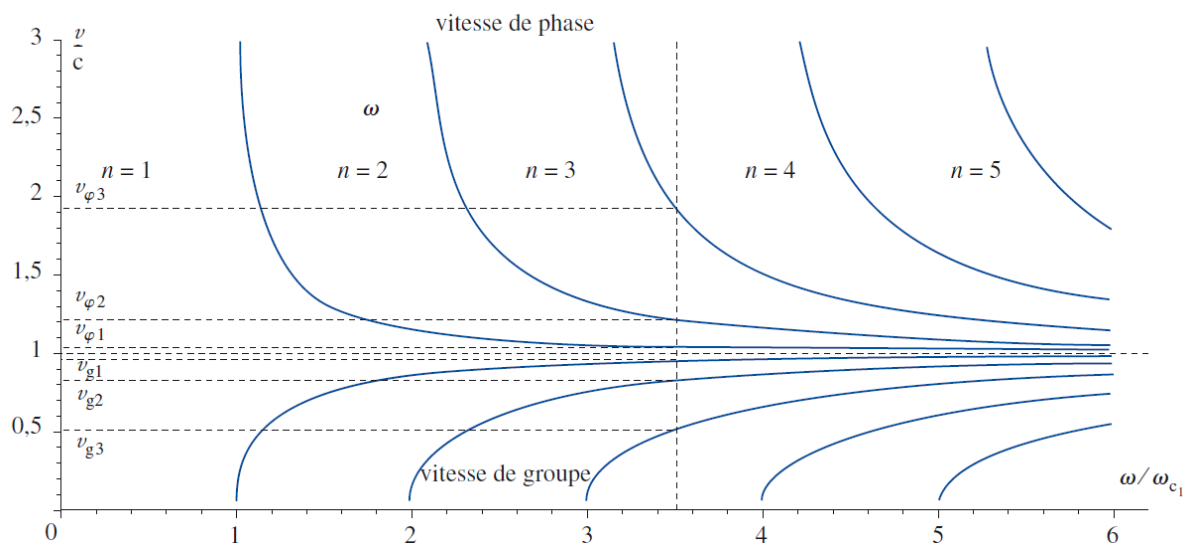
$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} \quad (17)$$

En utilisant la relation de dispersion et en utilisant la notation différentielle on trouve :

$$\begin{aligned} 2k_g dk_g &= \frac{2\omega d\omega}{c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dk_g} &= \frac{c^2 k_g}{\omega} \end{aligned} \quad (18)$$

Alors on obtient :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{k^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 1}} < c \quad (19)$$



Pour une valeur de ω donnée, il existe plusieurs modes de propagation possibles correspondant à des valeurs de k différentes et donc à des vitesses de phase et de groupe différentes.

1.4 Aspect énergétique

Le flux d'énergie sortant peut s'écrire à travers le vecteur de Poynting. Dans notre cas on peut écrire :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -EB_z \\ EB_y \end{vmatrix} \quad (20)$$

En développant on trouve :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{n\pi}{b\omega} E_0^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(k_g z - \omega t) \sin(k_g z - \omega t) \\ \frac{k_g}{\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(k_g z - \omega t) \end{vmatrix} \quad (21)$$

D'où la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \Pi \rangle = \frac{k_g}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_x \quad (22)$$

La composante stationnaire sur \vec{e}_z possède donc une contribution nulle (E et B_x sont en quadrature). Seule la composante propagative suivant les x croissants contribue au transport de l'énergie dans le sens de la propagation guidée (E et B_z en phase).

Une conséquence du théorème de Poynting est que la puissance électromagnétique traversant une surface Σ est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers cette

surface :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_S &= \iint_{\Sigma} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot (dxdy \vec{u}_z) = a \frac{k_g}{2\mu_0\omega} E_0^{n2} \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy \\ \implies \mathcal{P}_S &= \frac{abk_g E_0^{n2}}{4\mu_0\omega} \end{aligned} \quad (23)$$

Pour un guide rectangulaire de cotés égaux, a .

Rq : On peut aussi calculer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de la densité volumique de l'énergie électromagnétique :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ \langle u \rangle &= \frac{\varepsilon_0 E_0^{n2}}{4} \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Rq : L'énergie moyenne traversant la section droite du guide pendant le temps dt est :

$$dE = \mathcal{P} dt = \frac{a^2 k_g}{4\mu_0\omega} E_{0,p}^2 = \frac{a^2}{4\mu_0 v_\phi} E_{0,p}^2 dt \quad (25)$$

C'est aussi l'énergie moyenne localisée dans le volume dont la base est la section droite du guide et l'épaisseur $dz = v_e dt$ où v_e est la vitesse de propagation de l'énergie. Et comme $\langle u \rangle$ dépend de x , elle s'écrit :

$$v_e = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g \quad (26)$$

La vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de l'énergie (on a bien $v_e = v_g < c$)

2. La fibre optique à saut d'indice : approche géométrique

Les premières fibres optiques ont été utilisées en médecine, sur le principe de la réflexion totale. Grâce au laser, source de lumière à la fois puissante, cohérente et directionnelle, la fibre optique est devenue le canal de transmission privilégié en télécommunications.

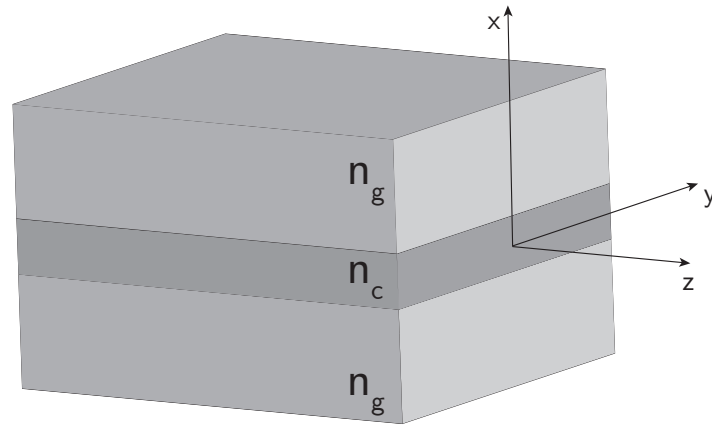
Ses principaux avantages :

- la faible atténuation permettant d'accroître la distance entre répéteurs ;
- l'insensibilité aux interférences électromagnétiques externes BF ;
- la large bande passante (débits importants) ;
- la réduction significative du nombre de stations d'amplification.

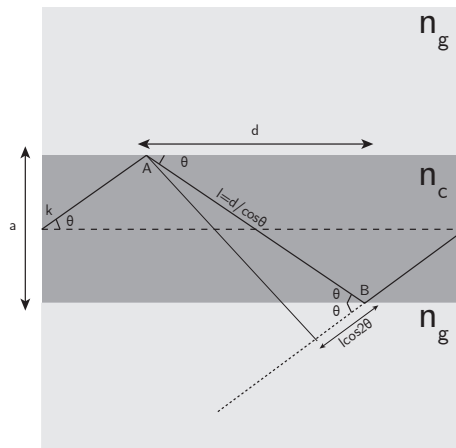
Deux inconvénients toutefois temporaires :

- le faible rendement dans les conversions optique \leftrightarrow électronique ;
- une certaine fragilité (mais actuelle).

2.1 Réflexions successives - condition de réflexion totale



Une fibre optique est constituée d'un coeur d'épaisseur a et d'indice n_c entouré d'un gaine d'indice plus faible $n_g < n_c$.



Le rayon est guidé s'il atteint la surface coeur/gaine sous une incidence supérieure à l'angle de réfraction limite θ_l au delà duquel il y a réflexion totale :

$$n_c \sin \theta_l = n_g \implies \sin \theta_l = n_g/n_c \quad (27)$$

Il faut donc que l'angle d'incidence $\pi/2 - \theta$ sur les dioptries soit supérieur à l'angle critique, soit $\sin(\pi/2 - \theta) > n_g/n_c$, ce qui impose finalement que :

$$\cos(\theta) > \frac{n_g}{n_c} \quad (28)$$

Si l'angle d'incidence est trop grand la réflexion totale n'a pas lieu.

2.2 Superposition des ondes réfléchies - modes

Quand la condition précédente est remplie, la fibre contient une superposition d'ondes réfléchies. Ces ondes interfèrent entre elles, ce qui peut conduire à une atténuation si les interférences sont destructives. Les ondes qui se propagent sans diminution sont celles pour lesquelles les ondes réfléchies se superposent en phase. Il faut donc s'assurer que la différence de marche entre deux ondes réfléchies successives est un multiple de la longueur

d'onde.

L'onde réfléchié deux fois a parcouru le chemin optique : $l = n_c d / \cos \theta$ entre les points A et B , ce qui correspond à une phase :

$$\phi_2(d) = \frac{2\pi n_c}{\lambda} \frac{d}{\cos(\theta)} \quad (29)$$

La phase de la première onde plane sur l'axe z indiqué est donnée au bout de la distance d par :

$$\phi_0(d) = \frac{2\pi n_c}{\lambda} l \cos(2\theta) = \frac{2\pi n_c d \cos(2\theta)}{\lambda \cos(\theta)} \quad (30)$$

ce qui avec $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$ s'écrit aussi

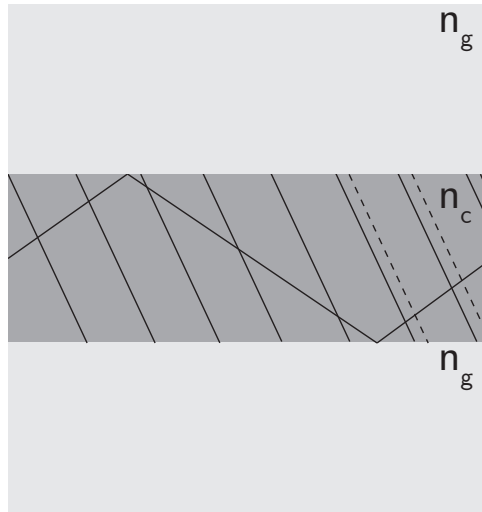
$$\phi_0(d) = \frac{2\pi n_c d}{\lambda} \left(\frac{2}{\cos(\theta)} - 2 \cos(\theta) \right) = \frac{4\pi n_c d \sin^2(\theta)}{\lambda \cos(\theta)} \quad (31)$$

La différence de phase est donc donnée par :

$$\Delta\phi = \phi_2(d) - \phi_0(d) = \frac{2\pi n_c d}{\lambda} \left(\frac{2}{\cos(\theta)} - 2 \cos(\theta) \right) = \frac{4\pi n_c d \sin^2 \theta}{\lambda \cos \theta} \quad (32)$$

Soit en remarquant que $\tan \theta = a/d$,

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_c a}{\lambda} \sin \theta \quad (33)$$



Finalement c'est un réseau infini de sources espacées de $2a$ qu'il faut considérer, pour tenir compte du nombre infini d'onde réfléchiés qui se superposent dans la fibre. Les ondes réfléchiés interfèrent constructivement à condition que $\Delta\phi$ soit un multiple entier de 2π , soit :

$$\frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda} = 2\pi p \quad (34)$$

Ce qui donne une condition sur les angles θ_p permis :

$$\sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a} \quad p \in \mathcal{N} \quad (35)$$

L'approche simplifiée nous indique donc que seuls certains angles d'incidence θ_p peuvent se propager dans la fibre, on parle alors de modes de la fibre.

2.3 Dispersion de mode

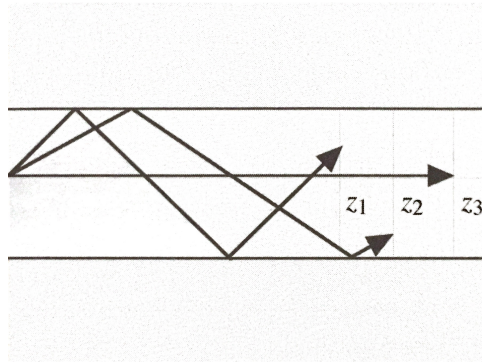
Le vecteur d'onde selon z est relié à la pulsation de manière différente selon les modes. Plus précisément en utilisant la relation précédente, on trouve

$$k_z^p = \frac{\omega}{c} \cos \theta_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{a^2}} \quad (36)$$

C'est une relation de dispersion, et le fait qu'elle dépende de p est appelé dispersion de mode. A cause de cette dispersion, les signaux se déforment au cours de la propagation dans la fibre, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.

On remarque aussi que pour une pulsation ω donnée, un nombre fini de modes peuvent se propager dans la fibre, ceux pour lesquels $\pi p c/a < \omega$.

2.4 Modes et bande passante



Les ondes associées à chacun des modes de propagation diffèrent dans la fibre. Du fait des incidences différentes, les fronts d'onde avancent à des vitesses différentes le long de la direction z . En effet, le temps t que met un front d'onde pour parcourir une distance z le long de la fibre est donné par (**vérifier formule car faute dans le Taillet**) :

$$t = \frac{z n_c}{c \cos \theta_p} \quad (37)$$

Si un signal est émis à l'entrée de la fibre, et se propage suivant deux modes différents θ_p et θ_q , il sera reçu au bout de la fibre de longueur ℓ avec un décalage temporel

$$\Delta t_{pq} = \frac{\ell n_c}{c} \left(\frac{1}{\cos \theta_p} - \frac{1}{\cos \theta_q} \right) \quad (38)$$

Si ce temps est plus grand que le temps qui sépare deux informations dans le signal, alors les informations se mélangent au bout de la fibre et le signal est dégradé, à cause de la dispersion de mode.

La bande passante est définie par la fréquence maximale à laquelle on peut transmettre des informations sur la fibre. Elle est limitée par le décalage temporel Δt entre les modes extrêmes, $\theta = 0$ et θ_p où p est l'entier immédiatement inférieur à p_{max} :

$$\Delta t = \frac{\ell n_c}{c} \left(\frac{1}{\cos \theta_p} - 1 \right) \quad (39)$$

où l'on a utilisé la relation (28). C'est la condition de réflexion totale qui fixe le mode le plus grand qui peut se propager. Si on transmet des données séparées par un temps T inférieur à Δt , celles-ci seront brouillées au bout de la fibre à cause de la dispersion.

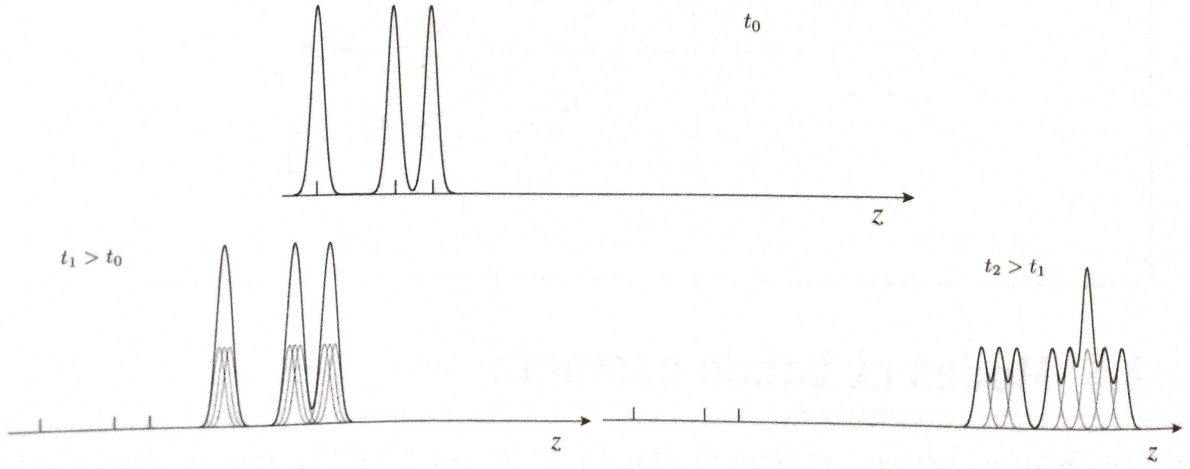


FIGURE 2 – Illustration schématique de la dispersion. À gauche les 3 signaux initiaux qu'on veut propager dans la fibre. Ce signal se propage selon plusieurs modes, ici 3. Sur les figures du milieu et de droite, les signaux sont représentés à des temps ultérieurs. L'effet de la dispersion est illustré pour une distance parcourue modérée et importante, respectivement. Sur la dernière figure le signal est trop déformé pour être exploitable.

La fréquence maximale à laquelle on peut transmettre les données est donc donnée par :

$$f_{max} = \frac{c}{\ell} \frac{n_c n_g}{n_c - n_g} \quad (40)$$

Plus les indices n_c et n_g sont proches, plus les angles d'incidence permis sont petits et plus la dispersion est faible. En limitant la longueur ℓ de la fibre, on ne permet pas à un éventuel décalage de se développer pleinement et on peut augmenter la fréquence maximale. Pour transmettre le signal sur de longues distances, il faut remettre le signal en forme à intervalles réguliers pour le renvoyer sur une nouvelle portion de fibre, grâce à des répéteurs. L'expression qui précède, obtenue en ne considérant que la limite imposée par la condition de réflexion totale, donne une limite inférieure sur f_{max} . Il est possible d'obtenir des fréquences f_{max} plus importantes en utilisant le fait que les modes de propagation sont discrets et en s'arrangeant pour que l'onde ne se propage que selon un mode, comme nous allons le voir maintenant.

2.5 Nombre de modes

Deux conditions, exprimées par les expressions (28) et (35) sont nécessaires pour que l'onde puisse se propager. On doit en effet avoir :

$$\cos \theta_p = \sqrt{1 - \frac{p^2 \lambda^2}{a^2}} > \frac{n_g}{n_c} \quad (41)$$

soit en réarrangeant,

$$p < p_{max} = \frac{a}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} \quad (42)$$

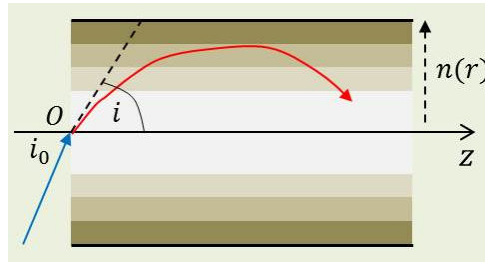
Le nombre de modes permis est limité et l'expression précédente permet d'évaluer comment les différents paramètres de la fibre interviennent sur le nombre de modes qui peuvent se propager dans la fibre. Nous avons vu plus haut que l'on a intérêt à limiter le nombre de mode permis. Ceci est réalisé en prenant des indices n_c et n_g très proches, ainsi qu'une taille a petite. La gaine joue donc un rôle très important dans les performances des fibres optiques : elle fournit un milieu d'indice très proche de celui du cœur, permettant de limiter fortement le nombre de mode permis.

Dans le meilleur des cas, seul le mode $p = 0$ se propage, quand $p_{max} < 1$, soit

$$\frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2} a}{n_c \lambda} < 1 \quad (43)$$

On parle alors de fibre monomode. La quantité $2\pi a \sqrt{n_c^2 - n_g^2} / \lambda$ est souvent notée V dans le contexte des fibres optiques.

2.6 Quelques mots sur fibre à gradient d'indice



Ce sont des fibres optiques qui possèdent un cœur d'indice variable (milieu inhomogène) suivant la formule, pour une loi parabolique ($g = 2$) :

$$n^2(r) = n_0^2(1 - \Delta r^g / a^g) = n_0^2(1 - \Delta r^2 / a^2) \quad (44)$$

pour $r \leq a/2$ et $n = n_g$ pour $r \geq a$. Dans ce cas là le temps de propagation est de :

$$t = \frac{\ell n_c}{c \cos \theta} \left(1 - \frac{2 - P}{2 + g} \sin^2 \theta\right) \quad (45)$$

avec P le paramètre de dispersion de profil (dépend du matériau et de la longueur d'onde).

3. Un exemple naturel : le canal SOFAR

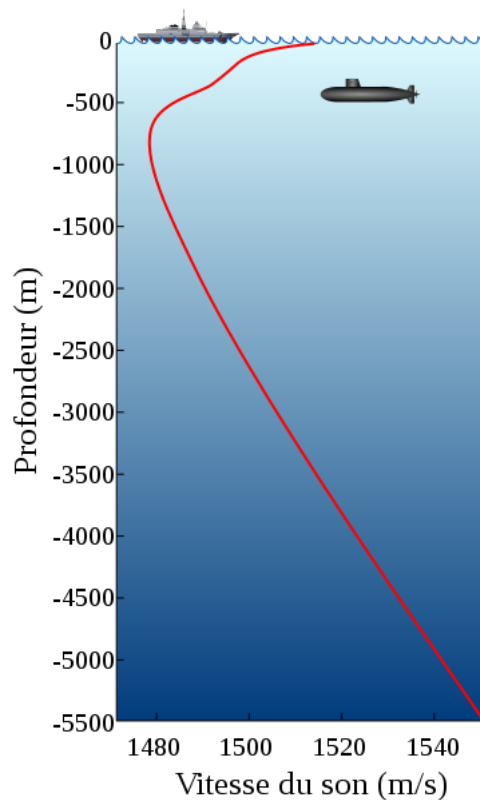


FIGURE 3 – Variation de la vitesse du son en fonction de la profondeur à une position au nord d’Hawaï, d’après le *World Ocean Atlas 2005*. Ici, l’axe du canal SOFAR est à une profondeur d’environ 750 m

Le canal SOFAR, pour Sound Fixing and Ranging, ou deep sound channel (DSC, canal sonore profond, est une couche d’eau horizontale dans la mer, à la profondeur de laquelle la vitesse du son est à son minimum. Le canal SOFAR agit comme un guide d’ondes pour le son, et les ondes sonores de basse fréquence qui s’y trouvent peuvent voyager sur plusieurs milliers de kilomètres avant de se dissiper. Ce phénomène constitue un facteur important dans la lutte anti-sous-marine. Ce canal sonore profond a été découvert et décrit indépendamment par Maurice Ewing, Stanley Wong et Leonid Brekhovskikh dans les années 1940.

Le canal SOFAR est centré sur la profondeur où la cumulation des effets de la température et de la pression de l’eau (et, à un moindre degré, de la salinité), se combinent pour créer une région où la vitesse du son est minimale dans la colonne d’eau. En mer, la pression augmente de façon linéaire avec la profondeur, mais la température est plus variable, chutant en général rapidement dans la thermocline principale depuis la surface jusqu’à une profondeur d’un millier de mètres, puis restant pratiquement inchangée de là jusqu’au plancher océanique dans les abysses. Près de la surface, la chute rapide de température cause une diminution de la vitesse du son, ou gradient de vitesse du son négatif. Lorsque la profondeur augmente, l’accroissement de la pression cause une augmentation de la vitesse du son, ou gradient de vitesse du son positif. La profondeur à laquelle la vitesse du son est minimale est appelée axe du canal sonore.

À proximité des Bermudes, l’axe du canal sonore se situe à une profondeur d’environ 1 000 m. En eaux tempérées, l’axe est moins profond, et à des latitudes plus élevées (au-dessus de 60°N , ou en dessous de 60°S), il atteint la surface.

Le son se propage dans ce canal par réfraction, ce qui fait que le son voyage à proximité de la profondeur de plus basse vitesse. Si une onde sonore se propage au-delà de ce canal horizontal, la partie de l'onde située le plus loin de l'axe du canal voyage plus vite, donc l'onde retourne vers l'axe du canal. Ceci a pour résultat que l'onde sonore trace un chemin qui oscille le long de l'axe du canal SOFAR. Ce principe est similaire à la transmission de la lumière à longue distance le long d'une fibre optique.

Les sons à basse fréquence, attribués au rorqual commun, se trouvent fréquemment dans le canal. Les scientifiques croient que les rorquals plongent jusqu'à ce canal et chantent pour communiquer avec d'autres rorquals situés à grande distance.

Durant la Seconde Guerre mondiale, Maurice Ewing a proposé de larguer en mer une sphère métallique intitulée bombe SOFAR, ou disque SOFAR, qui, spécifiquement prévue pour imploser dans le canal SOFAR, pourrait être utilisée comme signal de détresse par les pilotes abattus.

Le roman *Octobre rouge* décrit l'utilisation du canal SOFAR pour la détection de sous-marins.

La supposition de l'existence d'un canal similaire dans la haute atmosphère, proposée par Maurice Ewing, a conduit à l'expérimentation intitulée projet Mogul, organisée entre 1947 et fin 1948.

Conclusion

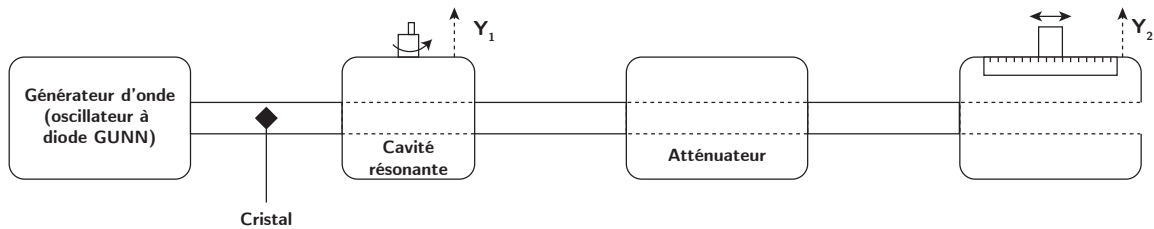
Nous avons pu voir à travers différents exemple comment on peut guider une onde. On a compris que le terme "guider" définissait le fait que l'on donne un direction particulière à l'onde tout en conservant son énergie, à l'image d'une conduite dans laquelle de l'eau passe on dirige le fluide tout en conservant le même débit.

Des guides d'ondes sont utilisés dans de nombreux domaines, de la recherche en physique, à l'électronique en passant par les radars ou les pinces optiques utilisées pour déplacer des particules ou des objets biologiques tels que des cellules.

Manipulation : guide d'onde rectangulaire

Quelques indications sur le Quaranta IV p5.

Guide d'onde électromagnétique rectangulaire (section $axb=23\times 10\text{mm}^2$)



Tout le système est un guide d'onde sur lequel il y a un ensemble d'appareillage qui permet de faire des mesures. Le système est composé de plusieurs organes :

- Oscillateur à diode GUNN qui permet de générer une onde électromagnétique sinusoïdale ;
- Un cristal qui permet d'absorber les ondes réfléchies dans la cavité afin d'éviter les multiples réflexions ;
- Une cavité résonante qui permet de mesurer la fréquence f_0 de l'onde générée ;
- Un atténuateur qui permet de faire abstraction du comportement non linéaire de la diode pour les mesures ;
- Un bloc terminal où l'onde se propage et se "jette" dans un autre milieu (ici l'air). On peut également boucher la sortie avec une plaque métallique.

Le but de cette manipulation va être de déterminer les caractéristiques de l'onde générée, puis de déterminer les caractéristiques de l'onde guidée et enfin de déterminer un coefficient de réflexion entre les deux interfaces défini par la frontière entre le guide et l'extérieur.

Caractérisation de l'onde générée

Pour mesurer la fréquence de l'onde générée f_0 il faut brancher l'oscilloscope sur Y_1 , puis tourner la manivelle et observer la fréquence pour laquelle l'amplitude de la tension observée par l'oscilloscope est maximale. Cette fréquence correspond à f_0 (ici $f_0 = 9.39\text{GHz}$). On peut ainsi définir la longueur d'onde sans guide de l'onde :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 0.032\text{m}$$

Une fois que cette mesure est effectuée, il faut penser à dérégler la manivelle, car la cavité est à sa fréquence de résonance et ainsi absorbe le maximum d'énergie. Pour ne pas être gêné pour les futures mesures il vaut mieux dérégler la manivelle.

Caractérisation de l'onde guidée

Le guide d'onde est caractérisé par deux longueurs : a et b . Ainsi pour ce type de guide on a deux fréquences de coupure du fait de la présence de deux longueurs :

$$f_{c1} = \frac{c}{2a} = 6.5\text{GHz}$$
$$f_{c2} = \frac{c}{2b} = 15\text{GHz}$$

On a bien $f_{c1} < f_0 < f_{c2}$.

On va ensuite mesurer la longueur d'onde guidée, λ_g . Pour cela on ferme le guide en sortie à l'aide d'une plaque métallique : l'onde est réfléchiée. La superposition de l'onde qui va dans le sens des x croissants et de l'onde qui va dans le sens des x décroissants provoque la génération d'une onde stationnaire, caractérisée par des ventres et des noeuds. En se branchant sur Y_2 on peut observer sur l'oscilloscope la distance entre deux ventres à l'aide de la règle graduée. Ainsi on trouve entre deux ventres, c'est à dire deux positions pour lesquels l'amplitude du signal est maximale :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_g}{2} &= \Delta x = 23mm \\ \Leftrightarrow \lambda_g &= 46mm \end{aligned}$$

On sait que théoriquement on a la relation pour un guide d'onde :

$$\lambda_g^{theo} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} \quad (46)$$

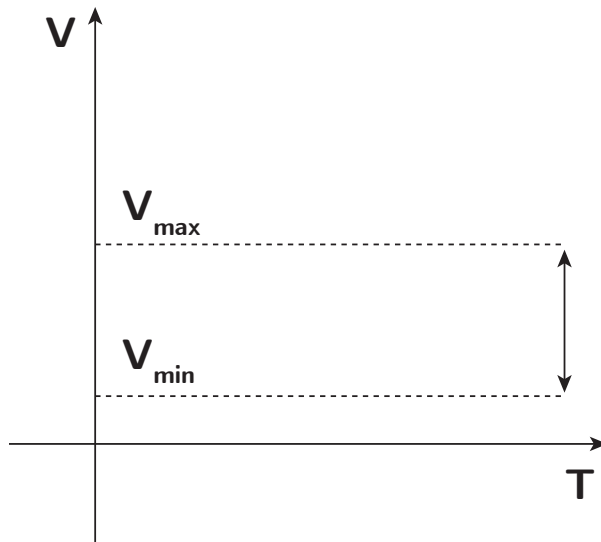
avec $f_c = f_{c1}$, car sinon la racine serait négative.

Mesure du coefficient de réflexion

On sait que le coefficient de réflexion est de la forme :

$$r = |r| \exp(j\phi)$$

Dans un premier temps on va mesurer le module de r . Pour cela on ouvre le guide et on mesure la valeur de V_{min} , en déplaçant Y_2 sur la graduation ,c'est à dire la valeur de l'amplitude minimale. Puis on déplace de nouveau Y_2 jusqu'à atteindre un maximum. A partir de ce point on va noter la valeur inscrite sur l'atténuateur, A_1 , puis on va régler l'atténuateur jusqu'à ce que la valeur de l'amplitude retourne sur la valeur V_{min} obtenue dans un premier temps. On note alors la valeur lue sur l'atténuateur A_2 . Cette amplitude est mesurée à grâce à une diode. On sait qu'une diode a un comportement non linéaire, surtout pour de faible tension comme ici. L'utilisation de l'atténuateur nous permet de nous dispenser de la non linéarité de la diode de détection.



On trouve ainsi $V_{min} = 17.5mV$ avec $A_1 = 1dB$. On modifie l'atténuateur à V_{max} pour retrouver V_{min} . On a $A_2 = 5.4dB$, soit $\Delta A = 4.4dB$. Alors :

$$\begin{aligned} 10 \log(X_{lim} = X_{dB}) \\ \Leftrightarrow X_{lim} = 10^{\frac{X_{dB}}{10}} \\ \Leftrightarrow X_{lim} = 10^{0.44} = 2.75 \end{aligned}$$

On a ainsi définie le ROS qui est le rapport d'onde stationnaire :

$$ROS = \frac{V_{min}}{V_{max}} = 2.75$$

Le module du coefficient de réflexion $|r|$ est définie comme étant :

$$|r| = \frac{ROS - 1}{ROS + 1} \quad (47)$$

On trouve alors $|r| = 0.42$. A titre d'exemple lors d'une réflexion totale on a $ROS \rightarrow \infty$ et $|r| = 1$. Lors d'une adaptation totale on a $ROS = 1$ et $|r| = 0$.

Il ne nous reste plus qu'à mesurer le déphasage induite par la réflexion. Pour cela on ferme le guide et on cherche la position, via la règle graduée, où l'on a V_{min} . Puis on ouvre le guide et on déplace vers la gauche Y_2 , jusqu'à ce qu'on retrouve le minimum d'amplitude, V_{min} . Entre ces deux positions on a $\Delta x'$. On trouve $\Delta x = 52 - 44.5 = 7.5mm$.

On sait que le déphasage induit par une réflexion s'écrit :

$$\phi = \pi + \frac{4\pi\Delta x'}{\lambda_g} \quad (48)$$

Le π induit par la réflexion, c'est à dire le fait de forcer l'onde à faire chemin inverse et le facteur 2 correspondant à l'aller retour dans la cavité. On trouve finalement $\phi = 5.2rad$.

On a donc trouver le coefficient de réflexion $r = 0.42 \exp(5.2j)$ induit par la différence d'impédance entre les deux milieux que sont le guide d'onde et le milieu extérieur (l'air).