

L.P. 08 - Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- Cinématique des fluides
- Diffusion
- Opérateurs mathématiques
- Cinétique des gaz
- Mécanique

Bibliographie

- Cap prépa PC, Renvoizé, *Pearson*
- Hydrodynamique physique, Guyon, *EDP*
- H prépa Mécanique des fluides, Brébec, *Hachette*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*

Introduction

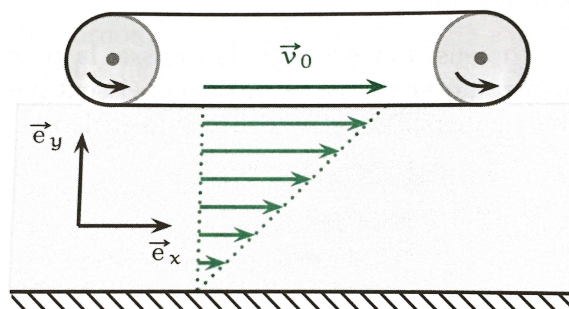
Jusqu'à présent, nous nous sommes limités au cas des fluides parfaits, soumis aux seules forces de pression. Ce modèle ne peut décrire de façon satisfaisante que certains types d'écoulements bien particuliers. En effet, il ne fait pas de différence entre l'huile et l'eau alors que ces deux fluides ne s'écoulent pas de la même manière dans un tuyau de petite section par exemple.

On sait que dans un fluide au repos, les actions de contact exercées par une particule mésoscopique de fluide sur une autre sont toujours orthogonales à la paroi (fictive) qui sépare les deux particules : ce sont les actions de pressions. Dans un écoulement, on constate expérimentalement qu'il existe, en plus des actions de pression, des actions tangentielles. Chaque particule de fluide a tendance à entraîner ses voisines dans son mouvement. Ces frottements internes au fluide sont les phénomènes de viscosité. C'est cette notion que nous allons aborder dans cette leçon en se limitant à des écoulements incompressibles.

1. Notion de viscosité

Manip : Vidange de burettes : une d'eau et une de glycerol, constater la différence et dire que la formule de Toricelli ne prévoit pas une différence selon la masse volumique.

1.1 Définition



Pour mesurer qualitativement les effets de la viscosité, on réalise le dispositif présenté sur la figure. Le liquide à étudier remplit l'espace entre deux parois horizontales parallèles. La paroi du bas est fixe dans le référentiel du laboratoire. La paroi du haut, initialement immobile est entraînée à partir de l'instant initial à la vitesse \vec{v} constante par un dispositif approprié.

La mise en mouvement de la paroi supérieure est suivie d'un régime transitoire durant lequel le profil de vitesse dans le fluide s'établit. Au bout d'un certain temps, le champ de vitesse devient indépendant du temps : le régime permanent est atteint. Des mesures expérimentales montrent alors les faits suivants :

- Le liquide adhère localement à chaque paroi : il a une vitesse nulle par rapport à la paroi avec laquelle il est en contact ;
- Le champ de vitesse entre les deux plaques, exprimée dans le référentiel du laboratoire, est de la forme $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$, où v_x est une fonction linéaire de y ;
- La plaque du bas subit, de la part du liquide, une force horizontale \vec{F} proportionnelle à $\partial v_x / \partial y$ et à l'aire S de la plaque :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{e}_x$$

Le coefficient de proportionnalité η dépend uniquement du liquide utilisé et s'appelle viscosité dynamique du liquide. Un fluide qui obéit à ce comportement est appelé fluide newtonien.

La force mesurée dans l'expérience est exercée par le fluide sur un solide (la plaque du bas). En postulant par extrapolation qu'une couche de fluide exerce le même type de force sur la couche de fluide voisine, on construit la loi de Newton.

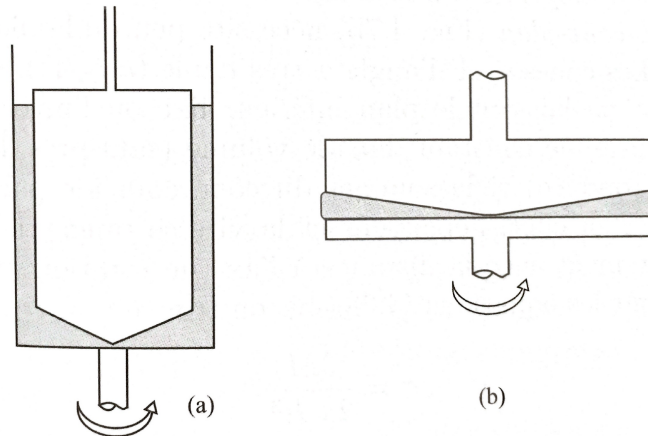
Ainsi soit un écoulement de cisaillement parallèle, de la forme $\vec{v} = v_x(y, t)\vec{e}_x$. Soit une surface élémentaire d fixe, orthogonale à l'axe y , placée par la pensée au sein de cet écoulement. En plus des actions normales de pression, la couche de fluide, située au-dessus de dS exerce sur celle qui est en dessous de dS une force tangentielle de cisaillement, appelé force de viscosité :

$$d\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS_M \vec{e}_x \quad (1)$$

Le coefficient η s'appelle la viscosité dynamique du fluide. Son unité est le pascal seconde *Pa.s* (anciennement poiseuille *PI*).

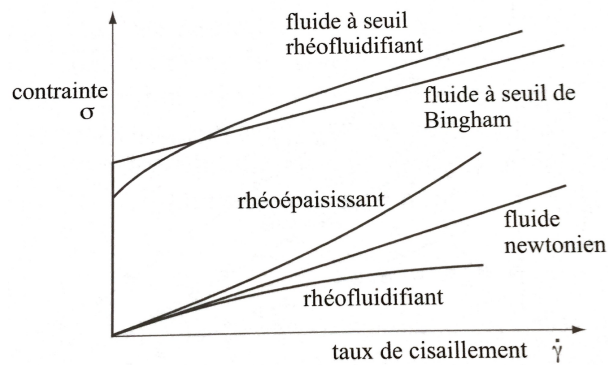
La quantité $\eta \partial v_x / \partial y$ s'appelle la contrainte de cisaillement pour les deux raisons suivantes : par définition une contrainte est une force par unité de surface ; cette contrainte ne prend naissance que si $\partial v_x / \partial y$ est non nul. Cela arrive si la couche de fluide située en $y + dy$ a une vitesse non nulle par rapport à la couche située en y (vitesse relative), c'est

à dire s'il y a localement cisaillement dans l'écoulement.



Pour mesurer la viscosité d'un fluide on utilise un viscosimètre ou rhéomètre. Le but est de mesurer le couple sur l'une des parois/cylindres en imposant une vitesse de rotation sur l'autre paroi/cylindre (cisaillement imposé) ou bien l'inverse (contrainte imposée). Il y a par exemple le rhéomètre de Couette cylindrique (a) ou le rhéomètre cône-plan (b) :

- Pour le Couette on a $\sigma = M/(2\pi R^2 h)$ et $\dot{\gamma} = (R/\Delta R)\omega_0$ avec M le moment du couple appliqué aux cylindres, ω_0 la vitesse angulaire de rotation et R la moyenne des rayons (**Calcul du moment page 350 de Sanz**) ;
- Pour le cône-plan on a $\sigma = 3M/(2\pi R^3)$ et $\dot{\gamma} = \omega_0/\alpha$ avec α angle entre les cônes ($\leq 4^\circ$).



Corps	Air	Eau	Huile d'olive	Glycérine	Miel
Viscosité (Pa.s)	10^{-7}	10^{-4}	0,1	0,1	100

Rq : Plus de détails sur les types de fluides voir dans le Guyon page 141-143.

1.2 Interprétation microscopique

Raisonnons sur un fluide constitué d'un seul type de molécules. Ce que l'on appelle "vitesse $\vec{v}(M, t)$ en un point " d'un écoulement est la vitesse du centre de masse de la particule mésoscopique centrée en M . Dans le référentielle barycentrique de cette particule mésoscopique, chaque molécule i possède une vitesse d'agitation thermique, notée $\vec{v}_{i,th}$. Ainsi dans le référentiel où l'écoulement est décrit, la molécule i a la vitesse :

$$\vec{v}_i = \vec{v}(M, t) + \vec{v}_{i,th}$$

Statistiquement, les $\vec{v}_{i,th}$ sont tous de même norme mais de directions différentes : la moyenne des vecteurs $\vec{v}_{i,th}$ sur toutes les molécules est donc nulle de telle sorte que :

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{v}(M, t)$$

La vitesse locale de l'écoulement n'est autre que la vitesse moyenne des molécules situées autour du point M .

Considérons un écoulement unidimensionnel de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$. Soit dS un élément de surface parallèle au plan Oxy situé à l'ordonnée y . On note ℓ le libre parcours moyen des molécules et τ le temps de libre parcours moyen : $\ell = v_{th}$, où v_{th} est la norme de la vitesse d'agitation thermique. A cause de cette agitation, des molécules situées entre les ordonnées $(y - \ell)$ et $(y + \ell)$ de part et d'autre de dS sont susceptibles de traverser dS durant τ . Ces molécules se trouvent dans des cylindres de base dS et de hauteur ℓ . En notant n le nombre de particules par unité de volume, le nombre de molécules contenues dans un tel cylindre est $\delta N = n \cdot dS \cdot \ell$. Le nombre de molécules traversant dS de haut en bas est :

$$\delta N_{y>0} = \frac{1}{6}n \cdot dS \cdot \ell = \frac{1}{6}n \cdot dS \cdot v_{th}\tau$$

Le facteur $1/6$ vient du fait que chaque molécule du cylindre peut aller dans trois directions et qu'il y a deux sens pour chaque direction : statistiquement, seul un sixième des molécules traverse dS . Ces molécules possèdent statistiquement la quantité de mouvement $m\vec{v}(y + \ell)$. La quantité de mouvement qui a traversé dS du haut vers le bas durant τ est donc :

$$\delta \vec{p}_{y>0} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau mv(y + \ell)\vec{e}_x$$

De même, la quantité de mouvement qui a traversé dS du bas vers le haut est :

$$\delta \vec{p}_{y<0} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau mv(y - \ell)\vec{e}_x$$

La couche de fluide située sous dS a ainsi gagné $\delta \vec{p}_{y>0}$ et perdu $\delta \vec{p}_{y<0}$. Sa variation de quantité de mouvement durant le temps τ est donc :

$$d\vec{p} = \delta \vec{p}_{y>0} - \delta \vec{p}_{y<0} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau m[v(y + \ell) - v(y - \ell)]\vec{e}_x$$

Le libre parcours moyen ℓ étant très petit par rapport à l'échelle mésoscopique, on peut faire un DL des vitesses :

$$d\vec{p} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau m \cdot 2\ell \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x$$

En divisant par τ , on obtient la quantité de mouvement traversant dS , dans le sens des y décroissants, par unité de temps :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{3}ndSv_{th}\ell m \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x$$

Cette grandeur s'identifie à la variation de quantité de mouvement par unité de temps de la couche située sous dS , sous l'effet des échanges à travers dS . Cela s'interprète comme une force d'après le théorème de la quantité de mouvement : $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Ce théorème est valable seulement pour un système fermé. Or, notre étude a fait intervenir des transferts de particules à travers dS . Cependant, le nombre de particules montant durant dt est égal au

nombre de particules descendant. Du point de vue des échanges de matière, tout se passe comme si la paroi dS avait été fermée durant dt . Nous pouvons donc faire comme si seule la quantité de mouvement avait traversé dS et appliquer le théorème de la quantité de mouvement. L'expression représente donc la force $d\vec{F}_x$ tangentielle exercée par la couche au-dessus de dS sur la couche sous dS :

$$d\vec{F}_x = \frac{1}{3}ndSv_{th}m\ell\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_x$$

Dans cette expression, m est la masse d'une molécule et n le nombre de molécules par unité de volume. Le produit des deux est la masse volumique ρ :

$$\frac{d\vec{F}_x}{dS} = \frac{1}{3}\rho\ell v_{th}\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_x$$

Cette expression s'identifie à la loi de viscosité de Newton. Ce modèle simple prévoit que la viscosité dynamique du fluide est :

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\ell v_{th} \quad (2)$$

Elle ne dépend que des propriétés du fluide. Ce modèle confirme le fait que la viscosité est un phénomène diffusif. Il est dû à des mouvements de la matière au niveau microscopique.

En supposant que la théorie cinétique des gaz nous donne la vitesse thermique moyenne et le libre parcours moyen par :

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \text{ et } \ell \simeq \frac{1}{n\sigma}$$

avec σ la section efficace de collision des molécules et k_B la constante de Boltzmann. Alors on en déduit que :

$$\eta \propto \frac{\sqrt{mT}}{\sigma} \quad (3)$$

Pour les liquides on donne :

$$\eta \propto h \exp\left(\frac{\Delta g_0}{k_B T}\right) \quad (4)$$

avec Δg_0 l'énergie d'activation pour traverser la barrière de potentiel séparant deux sites, h la constante de Planck et α un coefficient. Cette formulation est similaire à la loi d'Arrhénius qui décrit le processus d'activation de saut à travers la barrière.

Rq : Plus de détails dans le Guyon page 24-25 et 68-72 (interprétation pour les liquides aussi).

1.3 Facteurs influençant la viscosité

On a pu voir à travers la façon de mesurer la viscosité et la formulation de la viscosité pour les fluides que cette dernière peut être influencé par différents facteurs :

- La nature de fluide considéré : on a vu que la contrainte en fonction du taux de cisaillement ne donnait pas la même forme selon la nature du fluide : **page 143 Guyon**.
- La température : on a pu voir que pour un gaz plus la température est importante plus la viscosité est grande. Pour les liquides on a un comportement opposé : plus la température augmente plus la viscosité diminue.

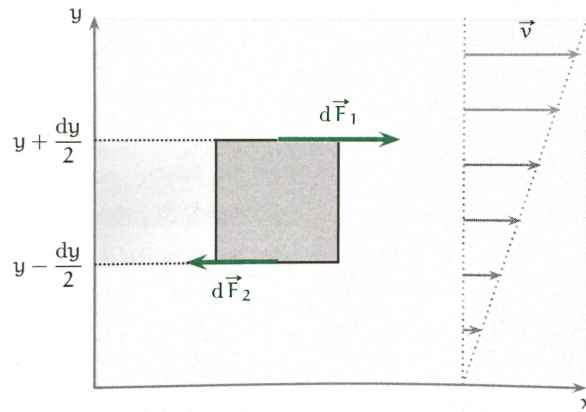
Il y a également la pression pour les liquides. En effet, la pression d'un liquide augmente, sa viscosité augmente également. La viscosité dynamique des liquides est pratiquement indépendante de la pression tant que celle-ci reste inférieure à 200 bars environ ; en raison de leur très faible compressibilité.

2. Dynamique des écoulements

2.1 Force volumique et équation de Naviers et Stokes

Force volumique

On cherche la résultante des actions de viscosité d'exerçant sur une particule dans un écoulement de cisaillement. Reprenons l'écoulement de cisaillement.



Au vu de la géométrie de l'écoulement, la particule est soumise à deux forces de cisaillement de la part du reste du fluide.

1 A l'altitude $y + dy/2$, la couche supérieure exerce $d\vec{F}_1 = \eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{e}_x$:

2 A l'altitude $y - dy/2$, la couche inférieure exerce $d\vec{F}_2 = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{e}_x$. Le signe moins provient de l'algébrisation de la loi de Newton.

La résultante de ces deux actions est :

$$d\vec{F}_{visc} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = \eta \underbrace{\left[\frac{\partial v}{\partial y} \left(y + \frac{dy}{2} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \left(y - \frac{dy}{2} \right) \right]}_{= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre}} dS \vec{e}_x$$

En coordonnées cartésiennes, l'aire dS s'écrit $dx dz$. Par conséquent, le volume élémentaire de la particule fluide $d\tau = dx dy dz$ se met en facteur, ce qui donne :

$$\vec{F}_{visc} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau \vec{e}_x \quad (5)$$

Cette expression de la résultante de viscosité concerne le cas particulier d'un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$. Pour un écoulement dépendant des trois variables (x, y, z) et ayant trois composantes (v_x, v_y, v_z) alors pour un écoulement incompressible, la résultante des actions de viscosité sur une particule mésoscopique de volume $d\tau$ s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \Delta \vec{v} d\tau \quad (6)$$

Pour un écoulement compressible il faudrait ajouter un terme proportionnel à $\text{div} \vec{v}$.

Équation de Navier-Stokes

Dans le référentiel d'un laboratoire, supposé galiléen, une particule mésoscopique de fluide de volume $d\tau$ et de masse volumique ρ , isolée par la pensée au sein d'un écoulement, est soumise à :

- son poids $\rho d\tau \vec{g}$;
- la résultantes des actions du fluide ambiant, qui se décompose en actions de pression et de viscosité ($-\text{grad}P d\tau + \eta \Delta \vec{v} d\tau$)

On néglige tout autre force (force d'Archimède par exemple). On rappelle que l'accélération d'une particule de fluide est la dérivée particulaire de la vitesse. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel du laboratoire :

$$\rho d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau + \rho d\tau \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

Les volumes élémentaires se simplifient, ce qui laisse l'équation de Naviers-Stokes pour un écoulement incompressible :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad (7)$$

Tous les termes de cette équation sont homogènes à des forces volumiques. Le terme en $\eta \Delta \vec{v}$ est l'équivalent des actions de viscosité. Si l'écoulement est compressible il faut ajouter une force volumique supplémentaire dite de seconde viscosité proportionnelle à $\text{div} \vec{v}$. Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut faire intervenir en plus des forces volumiques d'inertie.

2.2 Nombre de Reynolds

Si on analyse la dernière équation on voit apparaître deux termes importants :

- Un terme advectif : $\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$. Si $\rho D\vec{v}/Dt = \vec{0}$, alors il y a conservation de la quantité de mouvement lors de l'écoulement, c'est à dire il y a transport de la quantité de mouvement. L'advection est le transport d'une quantité (souvent l'énergie) dû à son entraînement par le mouvement d'un milieu, quelque soit l'origine de ce mouvement (gravitaire ou entraînement forcé). Exemple : goutte d'encre dans un fluide en écoulement (il y a advection + diffusion).
- Un terme diffusif dû à la viscosité : $\eta \Delta \vec{v}$. Si $\rho \partial \vec{v} / \partial t = \eta \Delta \vec{v}$ alors on a une équation de diffusion, avec le coefficient de diffusion $\nu = \eta / \rho$, la viscosité cinématique en $m^2.s^{-1}$.

A partir de ces paramètres qui ont la même dimension on peut construire un nombre : le nombre de Reynolds. Ce nombre compare les normes du terme de transport advectif et du terme de transport diffusif de quantité de mouvement :

$$\text{Re} = \frac{\text{terme advectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \quad (8)$$

On a bien un paramètre sans dimension. Soit L la longueur caractéristique de l'écoulement (par exemple la taille d'un vortex, ou la taille d'un objet en écoulement). Soit U la vitesse moyenne du fluide. Alors on peut estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes :

$$\text{Re} = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \approx \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$$

avec $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique en $m^2.s^{-1}$. Si on analyse ce paramètre on peut en déduire que :

- Si $Re \ll 1$ alors la viscosité joue un rôle prépondérant à l'échelle L de l'écoulement : l'écoulement est dit laminaire ;
- Si $Re \gg 1$ alors la viscosité joue un rôle négligeable à l'échelle L de l'écoulement : l'écoulement est dit turbulent.

Rq : C'est aussi le rapport entre deux temps caractéristiques, page 164 Brébec.

2.3 Écoulement à bas nombre de Reynolds

Montrer la vidéo de Taylor sur la goutte dans le cylindre en régime visqueux¹ pour montrer la réversibilité des équations à ce régime.

Les écoulements à petit nombre de Reynolds, parfois appelés écoulements rampants, sont des écoulements dominés par la viscosité où les effets inertiels sont négligeables. Ces écoulements peuvent avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre est obtenu par combinaison de trois facteurs différents :

- La faible taille d'objets en mouvement ou de canaux d'écoulement : mouvements de bactéries ($Re \approx 10^{-5}$), écoulements dans les milieux poreux ou fissurés ou dans le domaine de la microfluidique ;
- Fluides très visqueux et/ou de vitesse faible : mouvements lents du manteau terrestre ($Re \approx 10^{-20}$), déplacement des glaciers ($Re \approx 10^{-17}$), écoulement de fluide visqueux comme le miel.

Pour ce type d'écoulement on peut réécrire l'équation de Naviers Stokes en négligeant l'inertie :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad (9)$$

La condition de faible nombre de Reynolds n'impose pas la condition de stationnarité de l'écoulement. Néanmoins on va considérer que l'écoulement généré est quasi stationnaire. Il vient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \eta \Delta \vec{v} - \rho \vec{g} \quad (10)$$

Qui peut s'écrire simplement en prenant $\overrightarrow{\text{grad}}-\rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(P - P_0)$ avec $\overrightarrow{\text{grad}}P_0$ le gradient hydrostatique. En pratique, on ne fait pas intervenir ces forces de volume lorsqu'elles n'échangent pas d'énergie avec l'écoulement. Ainsi $\rho \vec{g}$ peut être directement pris en compte implicitement dans $\overrightarrow{\text{grad}}P$. Il vient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \eta \Delta \vec{v} \quad (11)$$

On obtient ainsi une équation linéaire que l'on appelle équation de Stokes. Cette équation possède de nombreuses propriétés :

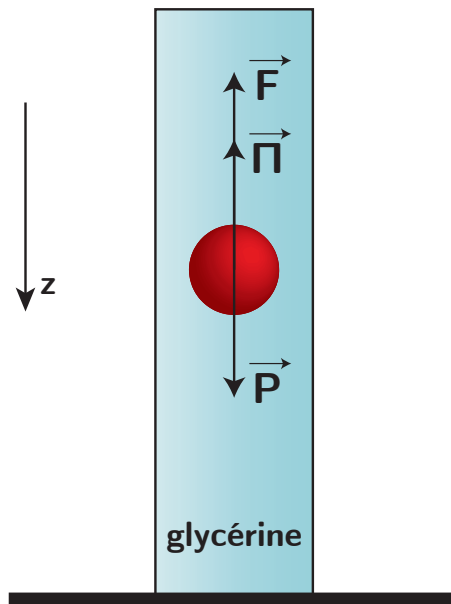
- Sa **linéarité** que l'on peut exprimer par le principe de superposition. Si \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont deux solutions de l'équation, alors $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$ est du coup solution de l'équation de Stokes. Le gradient p correspondant s'écrit $\mathbf{grad} p = \lambda_1 \mathbf{grad} p_1 + \lambda_2 \mathbf{grad} p_2$.
- Son **unicité** : l'équation de Stokes a une unique solution pour un écoulement et des conditions aux limites donnés.
- Sa **réversibilité** : si on inverse le sens de l'écoulement les particules fluides vont refaire en sens inverse le même chemin. Cette propriété est bien mise en évidence dans l'expérience de Taylor où une goutte de colorant est placée dans un fluide très

1. <https://youtu.be/CMuKNWGxw9c>

visqueux entre deux cylindres coaxiaux. Après mise en rotation du cylindre interne la tache de colorant se répartit dans la zone entre les deux cylindres. Si on inverse le sens de rotation du cylindre interne, les particules de colorant refont en sens inverse le même trajet et la tâche de colorant se reforme.

3. Application à la sédimentation à bas nombre de Reynolds

MANIP : Sédimentation d'une sphère dans une colonne de glycérine.



Considérons une particule sphérique en acier de diamètre D et de masse volumique ρ_p qui sédimente dans un fluide visqueux, de masse volumique ρ_f et de viscosité dynamique η_f , à la vitesse U . Les forces qui s'appliquent à cette particules sont :

- Son poids : $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi(D/2)^3\rho_p\vec{g}$;
- La force d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi(D/2)^3\rho_f\vec{g}$;
- La force de frottement ou force de traînée : \vec{F} .

En appliquant le PFD on trouve :

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_p\vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3\rho_f\vec{g} + \vec{F} = m\frac{d\vec{U}}{dt} \quad (12)$$

On a à notre disposition 5 paramètres : F, D, U, η_f et ρ_f , caractérisés par trois dimensions différentes : MLT^{-2} , L , LT^{-1} , $ML^{-1}T^{-2}$ et ML^{-3} . On peut utiliser le théorème Pi qui stipule alors que l'on peut construire : $5-3=2$ nombres sans dimensions :

$$\frac{F}{\rho_f D^2 U^2} \text{ et } \frac{\rho_f U D}{\eta_f}$$

Le deuxième nombre est le nombre de Reynolds. Ainsi par analyse dimensionnelle on peut écrire que :

$$\frac{F}{\rho_f D^2 U^2} = f(\text{Re})$$

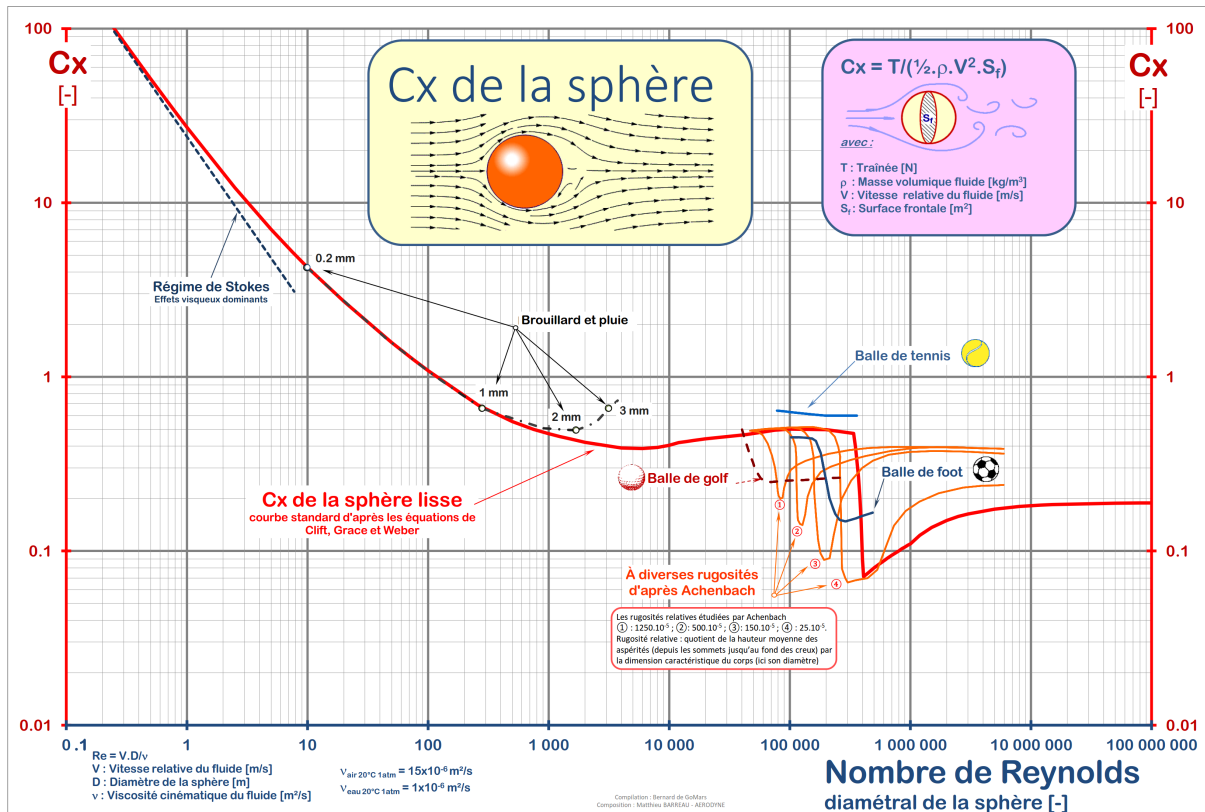
où f est inconnue. Cette relation est usuellement exprimée sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} C_x(\text{Re}) \rho_f \pi D^2 U^2 \quad (13)$$

avec le coefficient de traînée qui s'exprime selon :

$$C_x(\text{Re}) = \frac{8F}{2\rho_f \pi D^4 U^2} \quad (14)$$

Ainsi on peut représenter ce coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds :



On remarque que pour un faible nombre de Reynolds une dépendance linéaire de C_x en fonction de Re en échelle logarithmique : c'est la signature d'une loi de puissance de la forme $C_x = A\text{Re}^\alpha$. En effet en prenant le logarithme il vient : $\log(C_x) = \alpha \log(\text{Re}) + \log(A)$. La pente de la droite donne la valeur de la puissance α . En analysant le graphe on trouve pour un faible nombre de Reynolds :

$$C_x = 24\text{Re}^{-1}$$

La force de traînée s'en déduit sachant que \vec{F} opposé au sens de la chute :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{24}{\text{Re}} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} \vec{U}^2 = -\frac{12\eta_f}{\rho_f D U} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} U^2 = -6\pi\eta_f R \vec{U}$$

Rq : Autre façon de trouver la force de traînée page 157 du H-prépa exo6.

Ainsi en reprenant l'équation issue de la PFD on a lorsque la sphère a atteint sa vitesse finale constante :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f \vec{g} - 6\pi\eta_f R \vec{U} = \vec{0} \quad (15)$$

On peut alors en déduire la valeur de la vitesse finale de la sphère :

$$\vec{U} = \vec{U}_{St} = \frac{2(\rho_p - \rho_f)R^2}{9\eta_f} \vec{g} \quad (16)$$

Dans le cas où le nombre de Reynolds est faible on est dans le régime faiblement inertiel ou régime visqueux : cela implique alors que, dans ces conditions, la bille lors de sa chute va adopter très rapidement sa vitesse finale, appelé également vitesse de Stokes \vec{U}_{St} . Ainsi on peut alors retrouver le profil de vitesse dans les premiers instants de la chute de la sphère et il vient :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{U}}{dt} &= \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_p - \rho_f) \vec{g} - 6\pi R\eta_f \vec{U} \\ \frac{d\vec{U}}{dt} &= \frac{(\rho_p - \rho_f)}{\rho_p} \vec{g} - 6\pi R\eta_f \vec{U} \\ \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\frac{\vec{U} - \vec{U}_{St}}{\tau} \end{aligned} \quad (17)$$

avec $\tau = \frac{2R^2\rho_p}{9\eta_f}$. La solution s'écrit alors :

$$U(t) = U_{St} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (18)$$

A l'aide d'un logiciel on peut mesurer expérimentalement U_{St} et τ . Connaissant τ on peut alors déduire la viscosité du fluide : on a fait un viscosimètre à bille, appareil créé par Stokes durant le XIXème siècle et qui peut être utilisé pour mesurer la viscosité de certain fluide si on reste dans le régime visqueux. On alors aussi comparer la valeur de U_{St} avec la valeur donnée par la théorie en utilisant la viscosité mesurée ou connue concernant le produit.

On peut donner le calcul d'erreur sur U_{St}

$$\frac{\Delta U_{St}}{U_{St}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta_f}{\eta_f}\right)^2} \quad (19)$$

et sur η_f :

$$\frac{\Delta\eta_f}{\eta_f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2} \quad (20)$$

L'incertitude sur τ est donnée par le logiciel qui traite l'expérience.

La puissance dissipé au cours de la chute s'écrit :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{U} = -6\pi\eta_f R U^2 \quad (21)$$

Rq : On aurait pu aller plus loin en supposant que finalement la valeur du nombre de Reynolds est finie et de l'ordre de 1-2 du coup on est plus parfaitement en régime visqueux. On peut alors recourir à l'approximation d'Oseen qui donne (**page 319 de Sanz**) :

$$C_x = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{16}\text{Re} \right)$$

Rq : Écoulement autour d'un obstacle p519 Perez et p444 Guyon.

Écoulement de Couette ou Poiseuille

Si il reste du temps même si cela serait étonnant on peut traiter soit :

1. L'écoulement de Couette (page 349 de Sanz ou page 262 Renvoizé) ;
2. L'écoulement de Poiseuille (page 351 de Sanz ou page 263 Renvoizé).

Pour la partie concernant la puissance volumique dissipé voir page 262 du H-prépa.

Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment nous pouvions définir la notion de viscosité pour un fluide. Nous avons vu quelles en étaient les interprétations microscopiques de la viscosité et les méthodes pour la mesurer. Nous avons appris ensuite comment écrire le fondamentale de la dynamique lorsqu'on prend en compte la viscosité, pour finalement obtenir l'équation de Navier Stokes. Cette équation fait apparaître deux termes qui peuvent définir le nombre de Reynolds. Enfin on a pu voir une application des écoulements à bas nombre de Reynolds pour mesurer la viscosité d'un fluide. On aurait pu citer d'autres types d'écoulement comme celui de Poiseuille ou de Couette. Enfin la théorie développée dans cette leçon est utilisée dans les micro-mélangeurs. Ils utilisent des écoulements rampants et sont utilisés lors de la préparation de produits pharmaceutiques à partir d'une faible quantité de matière.