

L.P. 09 - Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- Cinématique des fluides
- Équation de Navier-Stokes
- Opérateurs mathématiques
- Viscosité
- Nombre de Reynolds

Bibliographie

- Cap prépa PC, Renvoizé, *Pearson*
- Hydrodynamique physique, Guyon, *EDP*
- H prépa Mécanique des fluides, Brébec, *Hachette*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- Expériences de physique (Fluides), Bellier, *Dunod*

Essayer de faire quelques manips : quantitative on peut faire le Pitot ou bien le Venturi si possible.

Introduction

Dans une leçon précédente, nous avons étudié la dynamique des fluides visqueux, nous avons pu constater que le formalisme était lourd, bien que capable de décrire complètement les phénomènes dans le fluide. Dans cette leçon nous allons, au prix de quelques approximations, alléger l'équation de Navier-Stokes. Ceci est nécessaire, car résoudre les grands systèmes complexes avec l'équation originale est pratiquement impossible du fait de sa non-linéarité. Ceci nous permettra aussi de traiter le cas des écoulements parfaits compressibles.

1. Écoulement parfait

1.1 Définition

Un écoulement est dit parfait si on peut y négliger les phénomènes de diffusion (viscosité, diffusion thermique).

Un écoulement parfait est une approximation dans les cas où les effets visqueux sont négligeables. Un fluide parfait est un fluide possédant une viscosité rigoureusement nulle. Il n'y a implication que dans un sens :

fluide parfait \implies écoulement parfait

Les fluides parfaits sont également appelés superfluides. Par exemple, l'hélium IV devient superfluide en dessous de la température de 2,17K : on constate expérimentalement l'absence totale de perte de charge lors de son écoulement. Cette propriété, découverte en 1937, est due à des effets quantiques qui dépassent largement le cadre de la leçon.

L'approximation d'écoulement parfait consiste également à négliger les échanges thermiques au sein du fluide. En négligeant ainsi la diffusion thermique et la diffusion de la quantité de mouvement (viscosité), on supprime tout phénomène irréversible dans l'écoulement. Les écoulements parfaits sont donc réversibles au sens thermodynamiquement. Une particule de fluide garde donc une entropie constante au cours de son mouvement. L'écoulement est dit isentropique : $DS/Dt = 0$.

1.2 Limites

Hormis quelques cas marginaux du superfluides, tous les fluides possèdent une viscosité. Assimiler un fluide réel à un fluide parfait mène à des paradoxes.

Pour un fluide parfait, $\eta = 0$, et donc Re est infini. Si nous extrapolons sans précaution les résultats précédents, un écoulement de fluide parfait devrait être toujours turbulent. Ce paradoxe tient au fait que le modèle du fluide parfait n'est pas une extrapolation d'un fluide réel de faible viscosité. La vitesse d'un fluide réel, même de très faible viscosité, est nulle au contact du solide, alors que celle d'un fluide parfait est non nulle et tangente à la surface du solide.

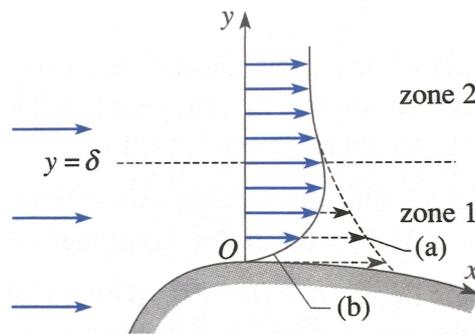


FIGURE 1 – (a) profil qui existerait avec un fluide parfait ; (b) profil réel.

Au voisinage d'un obstacle, les profils de vitesse sont très différents si l'on considère le modèle du fluide parfait ou le fluide visqueux, donc réel. Alors que la vitesse est non nulle avec le modèle du fluide parfait, elle est nulle pour le fluide réel. On peut ainsi observer deux zones sur la figure :

- La zone 1 $y < \delta$ les deux profils sont très différents. Dans cette zone la vitesse varie rapidement suivant y , mais peu suivant x on a : $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$. Les forces de viscosité, donc les transferts de quantité de mouvement par diffusion, sont prédominants ;
- La zone 2 $y > \delta$ les deux profils sont quasi identiques. La vitesse varie très peu en fonction des grandeurs de l'espace, on a : $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$. Il est parfois utile de modéliser le profil des vitesses par une loi linéaire ou parabolique ou exponentielle.

Il existe une transition située à la distance δ de l'obstacle : on vient de mettre en évidence la couche limite, correspondant à la zone dans laquelle les profils des vitesses sont très différents. Cette quantité, δ , est souvent appelée épaisseur de couche limite. A l'aide de l'équation de Navier-Stokes et sachant que dans la couche limite nous avons un écoulement parallèle, le terme d'accélération advective est nul :

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$$

Par ailleurs, l'invariance par translation dans les directions x et z impose que la pression ne dépende que de y . Par conséquent $-\overrightarrow{\text{grad}}P$ a une composante nulle sur x . L'équation de Navier-Stokes, en projection sur la direction x s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \implies \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (1)$$

On obtient ainsi l'équation de diffusion à une dimension selon l'axe y . Elle caractérise le fait que les couches de fluides sont progressivement entraînées en mouvement (évolution de v_x), les une après les autres, en partant de la paroi. Le coefficient de diffusion est la viscosité cinématique : $\nu = \eta/\rho$.

A partir de cette équation on peut évaluer le temps typique τ nécessaire pour que la couche initialement immobile, située à une distance δ de la paroi, soit affectée par le mouvement. Estimons l'ordre de grandeur :

$$\frac{v}{\tau} \sim \frac{\eta}{\rho} \frac{v}{\delta^2} \implies \delta \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \tau}$$

Or on peut dire que $\tau \sim L/v$ avec L la longueur caractéristique du système et v la vitesse de l'écoulement. Alors :

$$\delta = \sqrt{\frac{\eta L}{\rho v}} = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (2)$$

1.3 Équation d'Euler

Dans les zones où l'écoulement peut être considéré comme parfait, on peut négliger le terme $\eta \Delta \vec{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci prend alors le nom d'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} \quad (3)$$

Cette équation est valable pour les écoulements compressibles. Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter des forces volumiques d'inertie.

L'équation d'Euler, comme l'équation de Navier-Stokes, est établie à partir d'un bilan d'actions mécaniques sur une particule mésoscopique au sein du fluide.

Rq : Démo bilan des forces sur un fluide en mouvement page 293 Sanz.

L'équation de Navier-Stokes a une validité limitée aux écoulements incompressibles uniquement à cause du terme de viscosité $\eta \Delta \vec{v}$. L'équation d'Euler n'est pas limitée aux écoulements incompressible.

L'accélération particulaire peut être décrite sous trois formes :

- Dans la base de Frenet (trajectoire planes des particules) :

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

- Accélérations locale et advective :

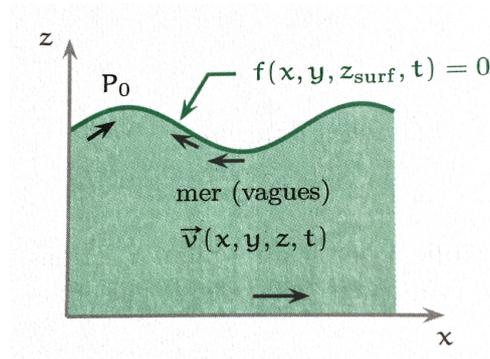
$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

- Pour faire apparaître le terme d'énergie cinétique volumique :

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2}$$

avec $\vec{\Omega} = (1/2)\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$ le vecteur tourbillon.

Conditions aux limites



En utilisant ce que l'on a vu sur les limites de l'écoulement parfait et l'équation de Navier-Stokes on peut imposer certaines conditions aux limites. Soit un écoulement parfait dont la surface a pour équation :

$$f(x, y, z_{surf}, t) = 0$$

On distingue deux types de conditions aux limites :

- Si on néglige les phénomènes de tension superficielle, la pression est continue à la traversée d'une interface entre deux fluides :

$$\forall(x, y, t) P(x, y, z_{surf}, t) = P_0$$

- La fluide ne peut pas pénétrer à l'intérieur d'une surface solide :

$$\forall(x, y, t) v(x, y, 0, t) = 0$$

Aspect thermodynamique

A priori dans un problème de mécanique des fluides nous avons cinq inconnues : trois composantes de la vitesse \vec{v} , la pression P et la masse volumique ρ . Il faut donc cinq équations pour fermer le problème :

- L'équation d'Euler donne trois équations scalaire ;
- L'équation de la conservation de la masse m :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- L'équation d'état du fluide (sous forme locale) est une équation scalaire faisant intervenir la pression, mais elle contient aussi la température T qui est alors une inconnue supplémentaire. Par exemple pour un gaz parfait $P = (\rho RT)/M$, avec M la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits. L'équation sous forme $PV = nRT$ n'a aucun intérêt car le volume V n'est pas un champ eulérien. Notons que le mot "parfait" n'a pas le même sens dans "gaz parfait" (particules ponctuelles sans interactions entre elles) et "écoulement parfait".

Un écoulement parfait étant isentropique, la connaissance de la compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \quad (4)$$

donne une équation supplémentaire. Pour un gaz parfait en écoulement isentropique on vérifie la loi de Laplace $P\rho^{-\gamma} = cst$, où la constante est donnée par les conditions de

départ du gaz. Cela permet d'exprimer la compressibilité isentropique.

Rq : Écoulement autour d'un obstacle voir page 73 H-prépa.

Rq : Si besoin approfondir les notions thermodynamiques avec un livre de thermodynamique comme celui de Bernard Diu Thermodynamique, *Hermann*.

1.4 Exemple d'application : l'effet Coanda

MANIP : Montrer avec une cuillère et un robinet l'effet Coanda.

Un jet de fluide a tendance à entrainer avec lui le fluide environnant. Lorsqu'un solide convexe vient toucher le jet, l'aspiration du fluide environnant est rendue dissymétrique, ce qui plaque le jet contre le solide. Cette effet, déjà décrit par Thomas Young au début du XIXème siècle, a été utilisé en aéronautique par l'ingénieur roumain Henri Coanda.

Ainsi l'effet Coanda peut se décrire comme cela : **Lorsqu'un solide convexe est placé contre un jet de fluide, les lignes de courant s'incurvent et le jet a tendance à longer le solide.**

Sur une échelle assez petite, la pesanteur joue un rôle négligeable devant l'effet du solide convexe sur la géométrie des lignes de courant. Plaçons-nous dans le cas où les lignes de courant sont planes et écrivons l'équation d'Euler en exprimant l'accélération dans la base de Frenet :

$$\rho \left[\frac{Dv}{Dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}P \quad (\rho \vec{g} \text{ est négligé})$$

où \vec{e}_n est dirigé vers le centre de courbure des lignes de courant et R est le rayon de courbure local des lignes de courant. La projection de cette équation sur \vec{e}_n s'écrit :

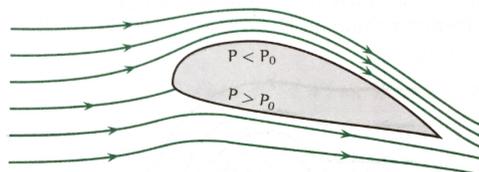
$$\frac{v^2}{R} = -(\overrightarrow{\text{grad}}P) \cdot \vec{e}_n$$

Pour revenir à des notations habituelles, introduisons le vecteur unitaire $\vec{e}_x = \vec{e}_n$. La dernière égalité s'écrit alors :

$$\frac{v^2}{R} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Donc $\partial P/\partial x$ est négative, ce qui montre que plus on va vers l'intérieur du virage, plus la pression décroît. On peut dire que la pression vers le centre de courbure des lignes de courant est plus faible qu'en périphérie.

Cela explique les phénomènes de portance. Une aile d'avion dévie les lignes de courant. La courbure des lignes de courant sur l'extrados (le dessus) de l'aile crée une dépression qui "aspire" l'aile vers le haut.



Rq : MANIP - On peut aussi faire la lévitation d'une balle de pingpong avec une sèche cheveux page 462 du Bellier. En inclinant petit à petit le flux d'air, la balle reste en lévitation car l'air longe la partie supérieure de la balle par effet Coanda. La balle est soutenue comme l'est une aile d'avion.

2. Relation de Bernoulli

A quelques approximations près, de nombreux écoulements peuvent être considérées comme parfaits, stationnaires et incompressibles comme l'écoulement de l'eau dans une canalisation de grand diamètre, l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion en vol subsonique à vitesse constante, décrit dans le référentiel de l'avion. Ce type d'écoulement obéit au théorème de Bernoulli, qui est d'une grande utilité en mécanique des fluides.

2.1 Énoncé

Considérons deux points A et B appartenant à la même ligne de courant de l'écoulement. L'écoulement étant parfait, il obéit à l'équation d'Euler :

$$\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + \rho [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] + \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g}$$

La dérivé partielle par rapport au temps est nulle car l'écoulement est permanent. En introduisant l'axe z vertical ascendant, le champ de pesanteur peut être écrit :

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

L'équation d'Euler devient alors :

$$\rho [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] + \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz) + \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{0}$$

Calculons sa circulation de A à B le long de la ligne de courant. Cela consiste à faire le produit scalaire avec un élément $\vec{d\ell}$ de la ligne de courant, puis à intégrer ce produit scalaire de A à B :

$$\int_A^B \rho [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] \cdot \vec{d\ell} + \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{d\ell} + \int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz) \cdot \vec{d\ell} + \int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Par définition d'une ligne de courant, l'élément $\vec{d\ell}$ est parallèle à la vitesse locale, donc orthogonal au terme $(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$. Le produit scalaire $[(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] \cdot \vec{d\ell}$ est donc toujours nul, ce qui supprime la première intégrale.

Par définition toujours, un écoulement incompressible est tel qu'une particule de fluide garde sa masse volumique constante au cours de son mouvement. Or, l'écoulement étant permanent, les lignes de courant se confondent avec les trajectoires des particules. Par conséquence, la masse volumique du fluide ρ est constante le long d'une ligne de courant. Cela permet de faire sortir ρ des intégrales :

$$\int_A^B dP + \rho \int_A^B d(gz) + \rho \int_A^B d \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0 \implies \left[P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz \right]_A^B = 0 \quad (5)$$

On a montré le théorème de Bernoulli qui est valable pour deux points d'une même ligne de courant dans le référentiel galiléen, avec un écoulement parfait, permanent et incompressible.

Cas d'un écoulement irrotationnel

Si l'écoulement est irrotationnel, le terme $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$ disparaît, si bien qu'il n'est plus nécessaire d'intégrer le long d'une ligne de courant, mais entre deux points quelconques. Ainsi la vitesse dans ce cas dérive d'un potentiel et nous avons $\overrightarrow{\text{rot}} = \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ et par conséquent en vertu du théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \rho \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} \quad (6)$$

où $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$. L'expression pour le liquide est alors dans le cas où la masse volumique est uniforme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz + P\right] = \vec{0}$$

Ainsi pour un écoulement parfait, irrotationnel et de masse volumique uniforme :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} = f(t) \quad (7)$$

Si l'écoulement est en plus permanent on trouve :

$$P + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} = 0 \quad (8)$$

Rq : Voir page 100-101 du H-prépa.

2.2 Aspect énergétique

Rappelons que l'incompressibilité d'un écoulement ne signifie pas nécessairement que la masse volumique est uniforme. Le contre-exemple classique est celui du vent. Il s'agit d'un écoulement horizontal approximativement incompressible : la masse volumique est constante le long d'une ligne de courant horizontale, mais elle décroît lorsque l'altitude croît. Pour une démonstration générale du théorème de Bernoulli, il ne faut pas faire entrer la masse volumique à l'intérieur des gradients.

Par définition, le travail fourni par une force à un point M est la circulation de cette force le long de la trajectoire M :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$$

Au facteur multiplicatif $d\tau$ près, la démonstration du théorème de Bernoulli revient à calculer les travaux reçus par une particule de fluide de volume $d\tau$. En effet, l'équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\underbrace{\int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) \cdot \vec{d\ell}}_{\text{variation d'E}_c \text{ volumique}} = \underbrace{\int_A^B (-\overrightarrow{\text{grad}}P) \cdot \vec{d\ell}}_{\text{travail volumique des actions de pression}} + \underbrace{\int_A^B \rho \vec{g} \cdot \vec{d\ell}}_{\text{travail volumique du poids}}$$

Le poids et les actions de pression s'écrivent comme des gradients, donc l'expression de leurs travaux ne dépend que de A et B . Ces travaux peuvent être vus comme l'opposé de variations d'énergies potentielles :

$$[E_c]_A^B = -[P]_A^B - [E_{p\vec{g}}]_A^B = -(P_B - P_A) - \rho g(z_b - z_a)$$

L'équation de Bernoulli n'est rien d'autre qu'une équation de conservation de l'énergie avec $\rho\Delta v^2/2$ la variation d'énergie cinétique, $\rho g(z_b - z_a)$ la variation d'énergie potentielle et $P_B - P_A$ est la variation de pression, la pression étant une forme d'énergie potentielle volumique du fluide.

Ainsi la charge de l'écoulement :

$$P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2}$$

représente l'énergie mécanique volumique d'une particule de fluide. Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique des particules de fluide au cours de leur déplacement.

Dans un écoulement on appelle :

- La pression motrice, le terme $P + \rho g z$, souvent noté P^* ;
- La pression dynamique, le terme $(1/2)\rho v^2$.

La charge est la somme de la pression motrice et de la pression dynamique.

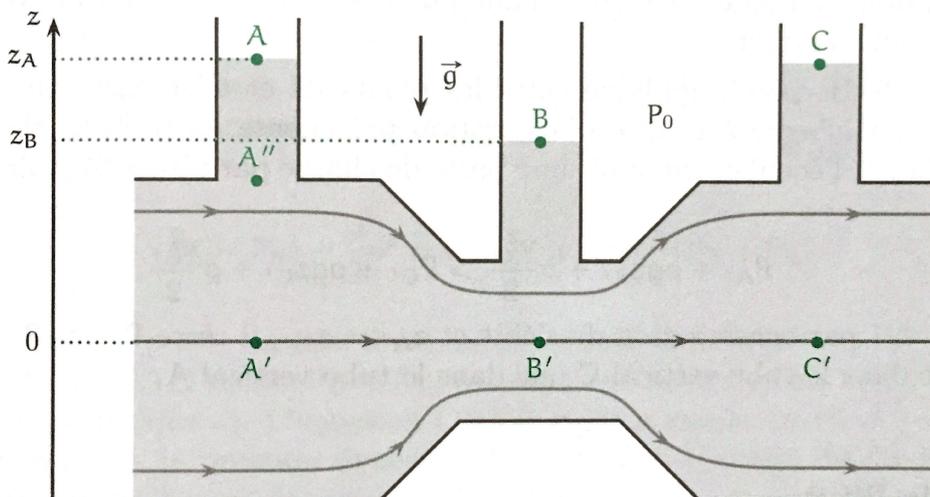
Rq : L'équation de Bernoulli représente alors une forme locale du premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement permanent : $h + v^2/2 + gz = cste$, avec h l'enthalpie massique. On a $dH = VdP + TdS \implies dh = (V/m)dP + (T/m)dS$ et donc pour un écoulement isentropique $dh = dP/\rho$ et $h = P/\rho$.

Rq : Application plus industrielle voir page 342 du Renvoizé.

2.3 Applications

Effet venturi

MANIP : Effet Venturi page 463 Bellier essayer de faire du quantitatif si il y a un tube avec des veines de mesures.



Soit un tube constitué d'un rétrécissement qui sépare deux régions, de sections différentes S_A et $S_B < S_A$, d'une canalisation horizontale : on a un tube de Venturi. Des tubes verticaux émergent de ces régions et sont ouverts sur l'air ambiant. De l'eau, assimilée à un fluide parfait de masse volumique ρ , s'écoule de façon permanente dans la canalisation. On constate que les altitudes respectives z_A et z_B des surfaces libres d'eau ne sont pas les mêmes dans les deux premiers tubes verticaux.

On note A' et B' les points de la ligne de courant centrale situés sous les deux premiers tubes. Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} = P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \implies P_{A'} - P_{B'} = \frac{\rho}{2}(v_{B'}^2 - v_{A'}^2) \quad (9)$$

L'hypothèse d'écoulement parfait implique que les lignes de champs sont quasiment parallèles au niveau de la section S_A (pas de turbulence). L'écoulement étant permanent, les particules de fluide sur cette section ont un mouvement rectiligne uniforme. Leur accélération est donc nulle et l'équation d'Euler se résume à :

$$-\vec{\text{grad}}P + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad (10)$$

Le champ de pression obéit donc à la loi de la statique des fluides entre les points A et A'' :

$$P_{A''} + \rho g z_{A''} = P_{A'} + \rho g z_{A'} \quad (11)$$

Le fluide dans les tubes verticaux est immobile, donc le champ de pression y vérifie la loi de la statique des fluides :

$$P_A + \rho g z_A = P_{A''} + \rho g z_{A''} \quad (12)$$

La pression est spatialement continue à la jonction entre un tube vertical et la canalisation, donc la pression $P_{A''}$ est la même dans les deux équations. En sommant ces relations membre à membre il vient :

$$P_{A'} + \rho g z_{A'} = P_A + \rho g z_A \implies P_{A'} = P_0 + \rho g z_A$$

Tout se passe comme si la loi de la statique était valable sur le segment $A'A$. Le même raisonnement peut être fait entre les points B et B' :

$$P_{B'} + \rho g z_{B'} = P_B + \rho g z_B \implies P_{B'} = P_0 + \rho g z_B$$

En soustrayant les deux relations on a :

$$P_{A'} - P_{B'} = \rho g(z_A - z_B) \quad (13)$$

Les relations (6) et (10) donnent :

$$\frac{\rho}{2}(v_{B'}^2 - v_{A'}^2) = \rho g(z_A - z_B) \quad (14)$$

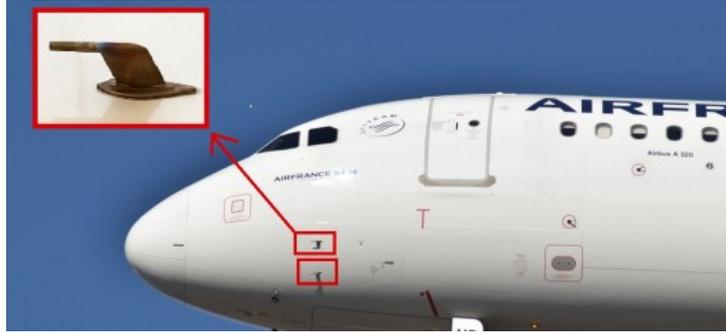
Par ailleurs, la conservation du débit volumique le long de la canalisation s'écrit : $v_{A'}S_A = v_{B'}S_B$, ce qui permet d'éliminer par exemple $v_{B'}$ de l'équation précédente :

$$v_{A'}^2 \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) = 2g(z_A - z_B) \implies v_{A'} = \sqrt{\frac{2g(z_A - z_B)}{\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right)}} \quad (15)$$

Ainsi la lecture de $z_A - z_B$ permet de connaître $v_{A'}$: c'est le principe du débitmètre. On en déduit l'effet Venturi : la pression est moindre dans l'étranglement, donc le fluide est moins maintenant vers le haut dans le tube vertical. Concernant le point C théoriquement on a $z_A = z_C$. En réalité l'écoulement subit une perte de charge c'est à dire une diminution de pression par viscosité. On a donc expérimentalement $z_A > z_C$: on a par conservation du débit $v_{A'} = v_{C'}$ et $z_{A'} = z_{C'}$ donc il reste $P_{A'} > P_{C'}$.

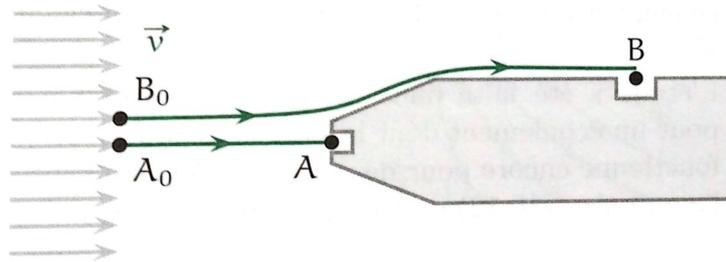
Tube de Pitot

MANIP : Tube de Pitot que l'on place en face d'un écoulement.



Cet outil a été inventé par le français Henri Pitot au XVIII^{ème} siècle. C'est un système destiné à mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air ambiant. Le tube est fixé le long du fuselage de l'avion, hors de la couche limite de manière à être dans la zone d'écoulement parfait du fluide.

L'étude du dispositif se fait dans le référentiel de l'avion, qui peut être considéré comme galiléen en général.



Soit un tube de Pitot placé dans un écoulement uniforme, à la vitesse constante $\vec{v} = v \vec{e}_x$, loin en amont du tube. Deux trous sont percés dans le tube le trou A fait face à l'écoulement et le trou B est sur le côté du tube.

Le point A est un point d'arrêt de l'écoulement car la cavité est bouchée. Considérons deux lignes de courant passant respectivement par A et B . Elles proviennent de deux points voisins A_0 et B_0 . Appliquons le théorème de Bernoulli :

$$\begin{aligned} P_{A_0} + \rho \frac{v_{A_0}^2}{2} + \rho g z_{A_0} &= P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A \\ P_{B_0} + \rho \frac{v_{B_0}^2}{2} + \rho g z_{B_0} &= P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B \end{aligned} \quad (16)$$

Les propriétés des points A_0 et B_0 , très voisins, sont identiques. En faisant la différence membre à membre des deux lignes, les termes de gauche s'annulent :

$$(P_A - P_B) - \frac{\rho}{2}(v_A^2 - v_B^2) + \rho g(z_A - z_B) = 0 \quad (17)$$

A étant un point d'arrêt, $v_A = 0$ et $P_A = P_0$. L'écoulement longe le tube, donc $v_B = v$. En pratique $z_A - z_B$ est de l'ordre du centimètre, donc le terme $\rho g(z_A - z_B)$ est largement négligeable devant le terme de vitesse. Il reste :

$$(P_A - P_B) - \frac{\rho}{2}v^2 = 0 \implies v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_A - P_B)} \quad (18)$$

La pression mesurée par le capteur B est indépendant de la vitesse de l'écoulement de l'air. En effet l'équation (13) donne $P_B = P_{B_0}$, qui est la pression de l'air ambiant à l'altitude de l'avion ("pression statique"). L'équation montre que la cavité A ressent, en plus de la pression statique P_B , la pression dynamique $(1/2)\rho v^2$ due à l'impact sur le point A . La cavité A est appelée "prise de pression dynamique".

D'après sa position, le tube de Pitot est hors de la couche limite qui longe le fuselage de l'avion. Donc l'écoulement limite se développe le long du tube de Pitot. En toute rigueur, le point B de l'étude est donc un peu à l'extérieur de la cavité, hors de la couche limite pour travailler dans l'hypothèse d'écoulement parfait. En supposant cette couche limite laminaire (hypothèse simplificatrice), le champ de vitesse est localement de la forme $v(z)\vec{e}_x$, ce qui implique de $D\vec{v}/Dt = \vec{0}$, donc l'équation d'Euler se résume localement à :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g} = \vec{0} \quad (19)$$

Le champ de pression local obéit à la statique des fluides. La pression dans la cavité B est donc quasiment la même que la pression au point B hors de la couche limite.

La vitesse donnée par l'équation (15) dépend de ρ , la masse volumique locale de l'air, qui diminue avec l'altitude. La vitesse indiquée est donc supérieur à la vitesse réelle. Les pilotes connaissent la "recette" pour retrouver rapidement la vitesse réelle à partir de la vitesse indiquée. Pour éviter toute conversion, on peut utiliser l'équation d'état de l'air, assimilé à un gaz parfait :

$$P_B = \frac{\rho RT}{M} \implies v = \sqrt{\frac{2RT}{MP_B}(P_A - P_B)} \quad (20)$$

La pression P_B du dénominateur et mesurée par la prise statique du tube de Pitot. il faut également un thermomètre pour avoir T . Un calculateur dans l'avion se charge d'en déduire la vitesse.

Cette étude a été faite en supposant l'écoulement comme incompressible, qui n'est acceptable que pour un écoulement dont la vitesse est inférieur à environ 30% de la célérité du son. Le tube fonctionne encore pour des vitesses d'écoulement plus grandes, y compris supersoniques, mais l'expression (15) doit être modifiée.

Rq : Autre application tube de Torricelli page 109 (stationnaire) et 124 (instationnaire) du H-prépa.

Rq : Connaitre et savoir écrire l'effet Magnus page 108 et p123 du H-prépa et page 310 du Renvoizé.

Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment l'on pouvait définir un écoulement parfait et ses limites. On a pu voir les conséquences de cette considérations : on trouve l'équation d'Euler avec ses conditions aux limites et ses applications comme l'effet Coanda. En utilisant cette dernière équation en prenant certaines hypothèses on a pu retrouver la relation de Bernoulli. Ce théorème, on a pu le voir est utilisé dans de nombreuses applications industriels. Finalement cette théorie est utile pour décrire assez simplement les écoulements à haut nombre de Reynolds et ainsi s'affranchir du caractère visqueux du fluide qui le compose.