

L.P. 05 - Lois de conservation en dynamique

Benjamin Marchetti

Niveau : 1er année CPGE

Pré-requis

- Mécanique du point
- Mécanique du solide

Bibliographie

- Mécanique, Landau, *Ed. de Moscou*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Tout en un MPSI, Sanz, *Dunod*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- BUP n.914 (2009), Serra
- Mécanique 1, Feynman, *Dunod*
- Les 1001 question 1er année PCSI, Garing, *Ellipse*
- Exp. de physique (Mecanique), Bellier, *Dunod*

Leçon assez calculatoire donc il faut essayer d'aller à l'essentiel et sauter des étapes de calculs pour gagner du temps sans oublier de faire la manip.

Introduction

Les grandeurs mécaniques sont les indicateurs de l'état du système étudié. La dynamique vise à décrire les mouvements et évolutions au cours du temps en fonction des actions mécaniques appliquées sur le système.

Dans cette leçon nous allons voir à travers les théorèmes de Noether comment certaines lois de la physique se conserve dans certains cas. Cette particularité va nous permettre de résoudre quelques problèmes auxquels le physicien est confronté.

Théorèmes de Noether

Les lois de la physique, pour rester invariantes, doivent s'exprimer dans des référentiels galiléens qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- Le temps y est uniforme : un processus se déroule de même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, à une autre époque. Une translation dans le temps montre qu'il n'y a pas d'origine absolue pour le temps.
- L'espace est homogène : un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, en un autre lieu. Une translation dans le temps montre qu'il n'y a pas d'origine absolue pour le temps.
- L'espace est isotrope : un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, en l'orientant dans une autre direction. Une rotation dans l'espace montre qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans l'espace.

Les conséquences de ces trois propriétés sont respectivement :

- Conservation de la quantité de mouvement : les différentes parties d'un système isolé peuvent modifier leurs quantité de mouvement respectives, mais la quantité de mouvement de tout ce système est constante.
- Conservation du moment cinétique : les différentes parties d'un système isolé peuvent modifier leurs moments cinétiques respectifs, mais le moment cinétique de tout ce système est constante ;
- Conservation de l'énergie : les différentes parties d'un système isolé peuvent échanger entre elles de l'énergie, mais l'énergie de tout ce système est constante.

1. Les lois de conservations

Considérons un système S de N points matériels. Chaque point est repéré dans l'espace par trois coordonnées, dépendantes du temps. Le nombre de degrés de liberté S est égal au nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire complètement la position des N points de S . Il est égal à $3N$ et est inférieur à $3N$, lorsque ces points sont liés entre eux par des contraintes géométriques :

- Un point contraint à se déplacer le long d'une ligne, possède un seul degré de liberté. Sa position peut être repérée par son abscisse curviligne.
- Un système isolé (c.a.d. rigide) de N points matériels ($N \geq 3$), possède au plus six degrés de liberté. Sa position peut être repérée par 3 coordonnées de l'un des points et trois angles décrivant la rotation du solide autour de ce point.

Soit p le nombre de degré de liberté du système S , nous appelons coordonnées généralisées, les p grandeurs permettant de décrire la position de S :

$$q_1, q_2, \dots, q_p$$

L'état à l'instant t de S est complètement déterminé par la donnée des p coordonnées généralisées et de leurs p dérivées par rapport au temps, appelées vitesses généralisés :

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p$$

Ainsi la connaissance précise de l'état du système doit nous permettre de déterminer son état à tout instant. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que le nombre de degrés de liberté est égale à $3N$ (ce qui exclut les liaisons parfaitement rigides entre deux de ces points).

Soit l'évolution du système S est déterminée par sa fonction de Lagrange L , dépendante des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps. Pour p degrés de liberté :

$$L(q_1, q_2, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p, t) \quad (1)$$

Cette fonction de Lagrange doit donc contenir toutes les informations, concernant les actions subies par les éléments de S . On a aussi les p équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

pour $i = 1, 2, \dots, p$.

Pour un système isolé de N particules microscopiques, dont les positions dans un référentiel galiléen sont repérées par les coordonnées généralisées, le lagrangien est de la forme :

$$L(q_1, q_2, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i v_i - U(q_1, q_2, \dots, q_p) \quad (3)$$

La fonction U qui ne dépend que des positions relatives des particules de S , est appelée énergie potentielle. Elle contient tous les informations concernant les interactions entre particules. Le terme qui la précède, en notant v_i la vitesse au sens usuel :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i v_i^2 \quad (4)$$

est appelé énergie cinétique. Pour un système de coordonnées généralisée, il se met nécessairement sous la forme :

$$T(q_1, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p) = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_p) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (5)$$

T est donc une fonction homogène à 2 degré de liberté des vitesses généralisées, ce qui d'après la relation d'Euler implique :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (6)$$

car U ne dépend pas des vitesses généralisées. Cette forme du lagrangien est bien conforme aux principes de bases de la mécanique classique (uniformité du temps, homogénéité et isotropie de l'espace et principe de relativité de Galilée (le lagrangien doit garder la même forme dans un changement de référentiel galiléen)).

1.1 Quantité de mouvement

L'homogénéité de l'espace donne lieu à une loi de conservation. Du fait de cette homogénéité, et en supposant que notre système est isolé, les propriétés mécaniques d'un système fermé ne changent pas lors d'un déplacement parallèle du système entier dans l'espace. Considérons donc un déplacement infiniment petit ϵ , en imposant la condition que la fonction de Lagrange reste inchangée. On désigne sous le nom de déplacement parallèle une transformation dans laquelle tous les points du système se déplacent d'un même segment ; autrement dit, leurs rayons vecteurs $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta \vec{r}$. Dans un référentiel galiléen, repérons les positions des N particules de S par leur $p = 3N$ coordonnées cartésiennes. La translation :

$$\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$$

entraîne la variation de la fonction L pour une variation infiniment petite des coordonnées (les vitesses des particules étant constantes) qui est donnée par :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \delta y + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \delta z = 0 \quad (7)$$

Or on a $\delta \dot{q} = (d/dt)\delta q$ d'où :

$$\delta L = \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x + \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y + \left(\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta z \quad (8)$$

Cette variation doit être nulle pour tout δr ce qui implique trois relations :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = 0 \text{ et } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = 0$$

Or, comme sachant que la vitesse est constante :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(q_1, q_2, \dots, q_p)$$

Ces relations peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{x}_i = 0; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{y}_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{z}_i = 0$$

Ou encore en introduisant le vecteur impulsion ou quantité de mouvement du système S :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z = \overrightarrow{Cste} \quad (9)$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé dans un référentiel galiléen est constant. Cette propriété est la conséquence de l'homogénéité de l'espace dans un référentiel galiléen. C'est le deuxième théorème de Noether.

Rq :

- le vecteur \vec{P} est aussi appelé impulsion du système. L'impulsion est additive $P = \sum p$.
- L'égalité $\sum \delta L = \partial L / \partial r_a = 0$ a un sens physique simple. La dérivée $\partial L / \partial r_a = -\partial U / \partial r_a$ représente la force F_a agissant sur la a^{ieme} particule. Et donc on a que la somme des forces agissant sur toutes les particules d'un système fermé est égale à 0 : $\sum_a \vec{F}_a^{ext} = \vec{0}$.
- Si le mouvement est décrit à l'aide des coordonnées généralisées q_i , les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées sont $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ sont appelées impulsions généralisées et les dérivées par rapport aux coordonnées généralisées $F_i = \partial L_i / \partial q_i$ forces généralisées. On a alors $\dot{p}_i = F_i$

Rq : Exemple - Regarder page 428 Tout en un PC* sur force exercée par un fluide sur les parois d'une conduite.

1.2 Moment cinétique

L'isotropie de l'espace dans un référentiel galiléen implique que la fonction de Lagrange soit invariante pour toute rotation d'ensemble d'un système isolé. Considérons donc une rotation infinitésimale d'axe (O, u) et d'angle $\delta\phi$. Les vecteurs positions r_i des N particules, définis à partir de l'origine O , subissent une variation δr_i donnée par :

$$\delta \vec{r}_i = \delta\phi \vec{u} \wedge \vec{r}_i$$

Les vitesses sont également transformées par le même produit vectoriel :

$$\delta \vec{v}_i = \delta\phi \vec{u} \wedge \vec{v}_i$$

La variation de la fonction de Lagrange qui en résulte est alors :

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \delta z_i \\ &+ \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta \dot{y}_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta \dot{z}_i \end{aligned} \quad (10)$$

Or, d'après les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} m_i \dot{x}_i \implies \frac{\partial L}{\partial x_i} = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{d\dot{x}_i}{dt} \delta x_i + \frac{dx_i}{dt} \delta \dot{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{d\dot{y}_i}{dt} \delta y_i + \frac{dy_i}{dt} \delta \dot{y}_i \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{d\dot{z}_i}{dt} \delta z_i + \frac{dz_i}{dt} \delta \dot{z}_i \right) \\ \Leftrightarrow \delta L &= \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta \vec{v}_i \right) \\ &= \delta\phi \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{r}_i) + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}_i) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

En permutant les produits mixtes il vient :

$$\delta L = \delta\phi \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left(\vec{r}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \vec{v}_i \wedge \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \delta\phi \vec{u} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \right) \quad (12)$$

Le lagrangien étant invariant pour cette rotation uniforme de S alors $\delta L = 0$. Cette relation étant vérifiée pour tout $\delta\phi$ et pour tout vecteur u , on en déduit :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \right) = 0 \quad (13)$$

Le vecteur

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

appelé vecteur moment cinétique du système est donc constante. Cette propriété est la conséquence de l'isotropie de l'espace dans un référentiel galiléen. C'est le troisième théorème de Noether.

Rq : Exemple - Manip du tabouret page 325 du Perez.

1.3 Énergie mécanique

Enfin il nous reste la loi de conservation qui découle de l'uniformité du temps. Du fait de cette uniformité, la fonction de Lagrange d'un système fermé ne dépend pas explicitement du temps. Par suite, la dérivée totale par rapport au temps de la fonction de Lagrange peut s'écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \quad (14)$$

D'après les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Et donc :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

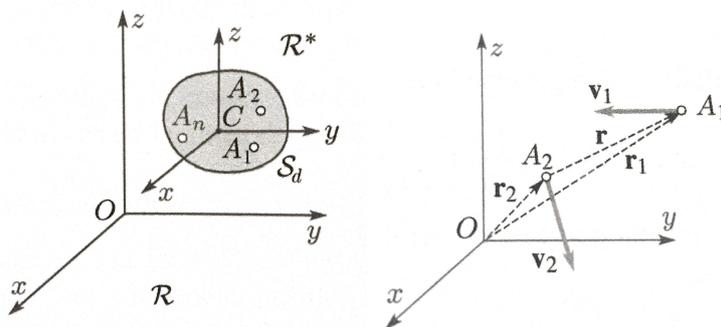
En regroupant les deux dérivées par rapport au temps il apparaît :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \frac{d(2T - L)}{dt} = \frac{d(T + U)}{dt} = 0 \quad (15)$$

On en déduit donc que la quantité $E = 2T - L = T + U$, appelée énergie du système est constante. L'énergie d'un système fermé est constante. Cette propriété est la conséquence de l'uniformité du temps dans un référentiel galiléen. C'est le premier théorème de Noether.

Rq : Exemple - Regarder le saut à la perche Garing page 377 (Chapitre 7 exo 40).

2. Application dans un champ à force centrale



Soient deux corps ponctuels A_1 et A_2 de masses respectives m_1 et m_2 , en mouvement dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , sous l'action de leur seule force d'interaction. Le système est donc isolé. Soit \mathcal{R}^* le référentiel du centre de masse avec le centre de masse C , fixe dans \mathcal{R}^* .

2.1 Éléments cinétiques du système

Quantité de mouvement

Par rapport à \mathcal{R} , la quantité de mouvement de ce système s'écrit :

$$P = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_C = M v_C$$

avec v_C la vitesse du système global et M la masse du système.

Dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , on a :

$$P^* = p_1^* + p_2^* = (m_1 + m_2) v_C^*$$

Il en résulte que, dans \mathcal{R}^* , les quantités de mouvement de A_1 et A_2 sont opposées. Évaluons p_1^* et p_2^* . D'après la composition des vitesses on a :

$$p_1^* = m_1 v_1^* = m_1 (v_1 - v_C) = m_1 \left(v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)$$

d'où, $p_1^* = -p_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$

Cette dernière relation s'écrit aussi :

$$p^* = p_1^* + p_2^* = \mu v \text{ avec } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ et } v = v_1 - v_2$$

Ainsi, dans \mathcal{R}^* , la norme de la quantité de mouvement de chacune des particules est égal à celle d'une particule fictive A , de masse μ et de vitesse v . La masse μ est appelée masse réduite du système des deux corps. Cette masse est inférieure ou égale à la plus petite des deux masses.

Moment cinétique

D'après le théorème de Koenig, on a pour le système des deux corps ponctuels :

$$\mathcal{L}_O = OC \wedge (p_1 + p_2) + \mathcal{L}^*$$

avec $\mathcal{L}^* = CA_1 \wedge p_1^* + CA_2 \wedge p_2^* = A_2 A_1 \wedge p_1^* = r \wedge \mu v$

Ainsi, par rapport au référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , le moment cinétique du système des deux corps ponctuels est égal au moment cinétique de la particule fictive A dont la position dans \mathcal{R}^* est définie par $CA = r$:

$$\mathcal{L}^* = CA \wedge \mu v = r \wedge p^*$$

Énergie cinétique

D'après le théorème de Koenig, relatif à l'énergie cinétique on a :

$$E_{k/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_C^2 + E_k^* \text{ avec } E_k^* = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} = \frac{p^{*2}}{2\mu}$$

Ainsi, l'énergie cinétique E_k^* est celle d'une particule fictive A , de masse μ et de vitesse $v = v_1 - v_2$:

$$E_k^* = \frac{p^{*2}}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

2.2 Loi de conservations et conséquences

Pour un système isolé, les seules forces qui apparaissent sont les forces d'interaction mutuelle lesquelles sont opposées selon la troisième loi de Newton. La quantité de mouvement du système est alors constante puisque :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = F_{2 \rightarrow 1} + F_{1 \rightarrow 2} = 0$$

Il en résulte :

$$P = Mv_C = Cste \quad (16)$$

On en déduit aussi que la vitesse est constante.

Le mouvement du centre de masse est donc rectiligne uniforme. Si, en outre, ces forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle, ce qui est généralement le cas, il vient :

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = F_{2 \rightarrow 1} \cdot dr_1 + F_{1 \rightarrow 2} \cdot dr_2 = -dE_p$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique au système donne :

$$\begin{aligned} dE_{k,1} &= F_{2 \rightarrow 1} \cdot dOA_1 \text{ et } dE_{k,2} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot dOA_2 \\ \text{d'où } dE_k &= dE_{k,1} + dE_{k,2} = F_{2 \rightarrow 1} \cdot dOA_1 + F_{1 \rightarrow 2} \cdot dOA_2 = -dE_p \end{aligned}$$

Il en résulte pour l'énergie mécanique $E_m = E_k + E_p$:

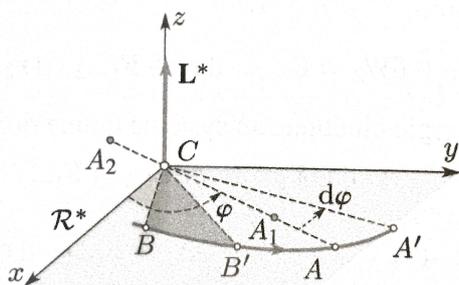
$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 \implies E_m = E_k + E_p = Cste \quad (17)$$

La force d'interaction qui s'exerce sur la particule fictive A étant centrale, car passant par le centre de masse C , le mouvement est plan. Si on explicite la conservation du moment cinétique dans \mathcal{R}^* en coordonnées polaire (r, ϕ) dans le plan Cxy , on obtient :

$$\mathcal{L}^* = r \wedge \mu v_A = r \vec{e}_r \wedge \mu(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\phi} \vec{e}_\phi) = \mu r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z = \mu \vec{C} = Cste$$

On en déduit que la grandeur $C = r^2 \dot{\phi}$ est une constante du mouvement. C est appelé constante des aires et vaut deux fois la vitesse aréolaire ou aire balayée par le rayon vecteur \vec{CA} pendant l'intervalle de temps dt :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{C}{2} \quad (18)$$



Si on revient sur l'expression de l'énergie mécanique dans \mathcal{R}^* on a en remplaçant la vitesse par v_A :

$$E_m^* = E_k^* + E_p = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + E_p = Cste$$

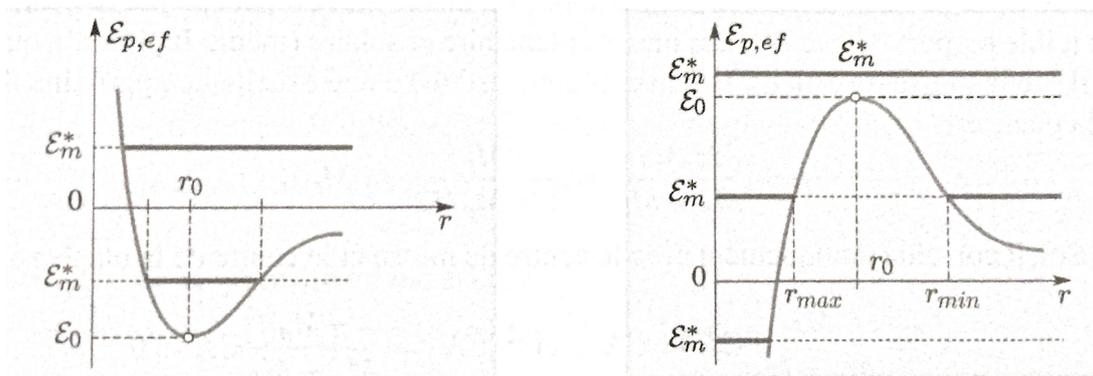
Ainsi en combinant avec l'équation précédent, on obtient l'équation du mouvement radial. En effet, en introduisant le carré du moment cinétique $\mathcal{L}^2 = \mu^2 r^4 \dot{\phi}^2$, il vient :

$$E_m^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2\mu r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p_{eff}} \quad (19)$$

avec $E_{p_{eff}} = E_p(r) + \mathcal{L}^2/(2\mu r^2)$. Tout se passe comme si la particule A était soumise à une énergie potentielle effective dans le mouvement unidimensionnel radial.

2.3 Analyse qualitative du problème à deux corps

On considère généralement deux types particuliers d'énergie potentielle effective : le puits et la barrière d'énergie potentielle.



Puits d'énergie : la courbe donne l'énergie potentielle effective en fonction de r passe par un minimum. Sa valeur limite quand $r \rightarrow \infty$ est zéro ; en effet les interactions sont nulles quand deux points sont infiniment éloignées. Si $E_m^* \geq 0$, l'état est libre car $r \geq r_{min}$ peut prendre une valeur finie. Si $E_m^* < 0$ l'état est lié car r oscille entre deux valeurs extrêmes appelées distances apsidales. Si $E_m^* = E_0$ la trajectoire est circulaire si $\dot{\phi} \neq 0$ où au point d'équilibre si $\dot{\phi} = 0$. (voir plus page 712 du Sanz).

Barrière d'énergie : l'énergie potentielle effective en fonction de r passe par un maximum. Sa valeur limite quand $r \rightarrow \infty$ est égale à 0. Si $E_m^* \leq 0$ r oscille entre 0 et r_{max} , on a un état lié. Si $0 > E_m^* < E_0$ deux solutions peuvent convenir $0 \leq r \leq r_{max}$ (état lié) et $0 < r_{min} \leq r \leq \infty$ (état libre). Si $E_m^* \geq E_0$ la coordonnée radiale r peut prendre toutes les valeurs comprises en 0 et ∞ : l'état est libre. Si $E_m^* = E_0$ on a une position d'équilibre instable car un DL de Taylor de l'énergie potentielle autour de E_0 montrerait que tout écart à la position d'équilibre augmente. (voir plus page 714 du Sanz).

Rq : Problème à N corps dans le Perez p.237.

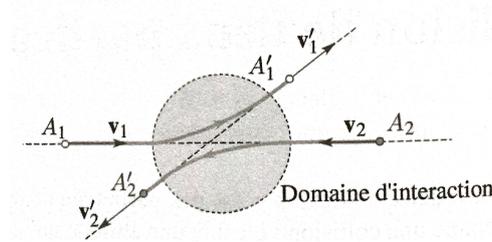
3. Application aux chocs

Dans le langage habituel, on dit que deux systèmes matériels entrent en collision ou subissent un choc à un instant, lorsque les surfaces qui les délimitent sont en contact à cet instant sans l'être dans les instants voisins, antérieur ou postérieur parfois. L'expérience courante permet d'établir aisément que le choc dure très peu de temps, est localisé dans l'espace et implique une variation brutale de la vitesse des points qui constituent les deux systèmes matériels. Cette variation brutale de la vitesse est attribuée à une interaction de

courte portée, dite de contact.

Nous étudions ici que la collision entre deux particules. Dans ce cas, la définition du choc macroscopique par le contact de surfaces doit être abandonnée. On doit la remplacer par la notion plus générale d'interaction.

3.1 Lois générales



Considérons deux particules A_1 et A_2 , de masse respectives m_1 et m_2 . Leur interaction de courte portée est définie par l'énergie potentielle $E_p(r)$, fonction de la distance r qui les sépare. Si ces points sont à une distance suffisante l'un de l'autre, $E - p(r)$ est pratiquement nul.

Supposons ces particules initialement à une distance telle que $E_p(r) = 0$ et se dirigeant l'une vers l'autre avec des vitesses v_1 et v_2 dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Lorsqu'elles parviennent au voisinage l'une de l'autre $E_p(r) \neq 0$ et les vitesses varient jusqu'à ce que la distance atteigne à nouveau une valeur suffisante pour que $E_p(r)$ soit à nouveau nul. Les vitesses acquises v'_1 et v'_2 sont alors appelées vitesses finales de la collision. On définit un domaine en dehors duquel l'interaction est négligée.

Quantité de mouvement

Le système des deux particules étant isolé, la quantité de mouvement de l'ensemble, par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} est une constante vectorielle du mouvement :

$$\sum_i p_i = \sum_f p_f \quad (20)$$

Énergie totale

Au cours d'une collision, les particules A_1 et A_2 peuvent se scinder en deux : leur état peut donc fondamentalement être modifié. Afin de tenir compte d'une telle modification, nous devons étendre la conservation de l'énergie mécanique à celle de l'énergie totale E , somme des énergies cinétique, potentielle extérieure $E_{p,ext}$ et d'une énergie interne U du système, laquelle est constituée de l'énergie potentielle d'interaction et des énergies internes U_i de chacune des particules. On a donc :

$$E_i = E_f \text{ avec } E = E_k + E_{p,ext} + U \text{ et } U = E_{p,int} + \sum_p U_p$$

Comme la variation de position du système est négligeable au cours de la collision, $E_{p,ext}$ et $E_{p,int}$ ne varient pas et il vient :

$$\sum_i E_{k,i} + U_i = \sum_f E_{k,f} + U_f \quad (21)$$

On distingue ainsi deux de collisions :

- La collision élastique : dans ce cas le nombre ou la nature des particules en interaction sont inchangés. L'énergie cinétique totale se conserve : $\sum_i U_i = \sum_f U_f$ d'où $\sum_i E_{k,i} = \sum_f E_{k,f}$. Au cours d'une collision élastique on a :

$$A_1 + A_2 \longrightarrow A'_1 + A'_2$$

ce qui se traduit par

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \implies m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

et

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Si le projectile et la cible immobile ont même masse, l'angle que font entre eux les vecteurs quantités de mouvement après la collision élastique est droit.

- Si la collision est inélastique, comme c'est le cas lors de l'interaction chimique de deux molécules, la fusion de deux particules on aura :

$$A_1 + A_2 \longrightarrow A_3 + A_4 + A_5 + \dots$$

Rq : Plus de détail p247-248 du Perez.

3.2 Collision élastique

Les lois de conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale fournissent deux équations scalaires contenant les deux inconnues v'_1 et v'_2 sur l'axe du mouvement il vient :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \text{ et } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Soit :

$$m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v_2 - v'_2) \text{ et } m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

Si on divise cette dernière équation par la précédente on trouve $v'_1 + v_1 = v_2 + v'_2$. Il en résulte que :

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \text{ et } v'_2 = \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}$$

Si $m_2 > m_1$ le choc fait rebrousser chemin à A_1 , alors que si $m_2 < m_1$, A_1 garde le même sens de déplacement. Pour $m_1 = m_2$, A_1 et A_2 échangent leurs vitesses.

La perte d'énergie cinétique de la particule A_1 au cours d'une collision élastique directe est :

$$Q = -\Delta E_{k,1} = \Delta E_{k,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{k,1} \quad (22)$$

3.3 Collision inélastique

MANIP : faire la chute d'une balle sur une table et calcul du facteur de restitution page 298 Bellier.

On caractérise une collision inélastique entre deux particules, l'une le projectile, l'autre la cible, par la variation d'énergie cinétique du système :

$$\Delta E_k = \sum_f E_{k,f} - \sum_i E_{k,i} = \sum_i U_i - \sum_f U_f$$

Si $\Delta E_k < 0$, la collision inélastique est endoénergétique ; si $\Delta E_k > 0$, elle est exoénergétique. Il est naturel d'introduire le facteur de restitution en énergie ϵ :

$$\epsilon = \frac{\sum_f E_{k,f}}{\sum_i E_{k,i}} \quad (23)$$

Pour $\epsilon = 0$ la perte d'énergie cinétique est maximale : la collision est parfaitement inélastique. On retrouve évidemment la limite élastique en faisant $\epsilon = 1$.

Considérons une collision inélastique entre un atome projectile, d'énergie cinétique $E_{k,1}$ et une molécule cible au repos. Après collision, la cible est dans un nouvel état caractérisé par une nouvelle valeur de l'énergie interne. L'équation de conservation de l'énergie donne, dans \mathcal{R}^* :

$$\sum_i E_{k,i}^* + U_i = \sum_f E_{k,f}^* + U_f$$

Dans \mathcal{R}^* , les produits de la réaction peuvent être chacun au repos puisque l'on peut réaliser $P^* = 0$ en fait séparément $p_f^* = 0$, soit $E_{k,f}^* = 0$. On en déduit :

$$\sum_i E_{k,i}^* + U_i \geq \sum_f U_f \text{ soit } \sum_i E_{k,i}^* \geq \Delta U \text{ avec } \Delta U = \sum_f U_f - \sum_i U_i$$

Comme l'énergie cinétique des deux particules dans \mathcal{R}^* est $\mu v^2/2$, v étant la vitesse relative, et que la cible est immobile dans \mathcal{R} , on a :

$$E_k^* = \frac{\mu v^2}{2} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{v_1^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e_{k,1} \geq \Delta U \text{ d'où } E_{k,1} \geq \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Delta U$$

Ainsi l'énergie cinétique seuil de la collision inélastique a pour expression :

$$E_{k,1}^s = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Delta U \quad (24)$$

Rq : Quantité de mouvement relativiste voir Feynman page 151.

Conclusion

Nous avons mis en évidence des cas où la conservation de grandeurs mécanique rend l'étude plus simple qu'une étude au travers du principe fondamental de la dynamique. Ce résultat est très utile pour démontrer des lois ou décrire efficacement des systèmes physiques.