

# L.P. 34 - Interférométrie à division d'amplitude

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Notion de cohérence
- Interférences

## Bibliographie

- Optique physique, Mauras, *PUF*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- H-prépa Optique ondulatoire, Brébec, *Hachette*
- Optique, Perez, *Dunod*
- Optique physique, Taillet, *De Boeck*

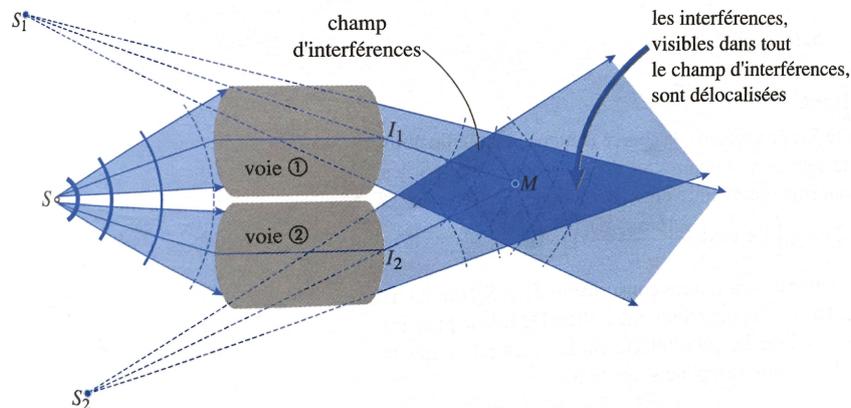
Beaucoup de calculs donc essayer d'être bref rapide et efficace sachant qu'en plus il y a des manip à faire! Donc pas la peine de tout détailler sauf pour le théorème de localisation qui est important.

## Introduction

Nous avons étudié la formation d'interférences avec une source ponctuelle, en utilisant un dispositif diviseur du front d'onde ou diviseur d'amplitude. La source ponctuelle est un modèle que nous pouvons approcher expérimentalement avec un diaphragme très réduit. Pouvons-nous ouvrir le diaphragme sans perte de contraste pour la figure d'interférences? Existe-il une taille optimale pour ce diaphragme?

## 1. Intérêt de la division d'amplitude

### 1.1 Rappels



Reprenons un schéma de réalisation d'interférences lumineuses qu'on a déjà vu : un dispositif à deux voies est éclairé par une source ponctuelle et monochromatique  $S$ . On sait que :

- un point  $M$  appartient au champ d'interférences s'il est à l'intersection de deux rayons émergeant du dispositif après avoir emprunté respectivement les voies 1 et 2 du dispositif ;
- en ce point d'observation nous détectons un éclairement  $\mathcal{E}(M)$  qui dépend de la différence de marche  $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$  des rayons qui interfèrent ;
- ces interférences sont caractérisées par un contraste  $C$ . Si le dispositif est bien conçu, les deux voies délivrent des éclairagements voisins et ce contraste peut être proche de l'unité, valeur optimale ;
- l'observation des interférences est possible dans tout le champ d'interférences

Ainsi on sait que lorsqu'un dispositif à division du front d'onde ou division d'amplitude est éclairé par une source ponctuelle monochromatique, les interférences sont délocalisées, c'est à dire visibles dans tout le champ d'interférences. Le contraste est sensiblement le même en tout point, et proche de l'unité si les voies du dispositif sont équitablement éclairées.

En supposant que les éclairagements issues de  $S_1$  et  $S_2$  sont identiques on a :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(M) = \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(S, M)}{\lambda_0}\right)\right) \quad (1)$$

### Ensemble de sources incohérentes

La source ponctuelle est un modèle : le diaphragme que nous pouvons réduire au maximum peut tout au plus nous donner une source quasi ponctuelle, mais sa taille n'est jamais rigoureusement nulle.

Si on considère maintenant une source réelle, donc non ponctuelle, la source peut être considérée comme un ensemble de sources  $S$  incohérentes. Ainsi les sources secondaires issues de la même source élémentaire vont interférer. Mais les sources secondaires issues de sources élémentaires différentes sont incohérentes entre elles, elles n'interfèrent pas : les éclairagements donnés par chaque élément  $S$  de la source étendue s'ajoutent :

$$\mathcal{E}_{\text{source étendue}}(M) = \sum_{S \in \text{source étendue}} 2\mathcal{E}_{0,S} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta(S, M)}{\lambda_0}\right)\right) \quad (2)$$

Ainsi avec une source lumineuse étendue, ensemble de sources primaires incohérentes, l'éclairement observé est la superposition des phénomènes d'interférences données par les différents points de la source.

### Conséquences de l'élargissement de la source

Du fait d'utiliser une source étendue les conséquences sont multiples :

- le dispositif gagne en luminosité, la figure est plus lumineuse et observable dans une salle moins obscure ;
- risque d'une perte de contraste si les figures données par les différents points de la source étendue sont trop dissemblables ;
- si la différence de marche  $\delta(S, M)$  varie peu, à l'échelle de la longueur d'onde lumineuse  $\lambda_0$ , lorsque  $S$  balaye l'ensemble de la source étendue, le contraste des franges observées au voisinage du point  $M$  reste convenable. Le cas échéant, les franges sont brouillées par l'élargissement de la source. Problème de cohérence spatiale.

On la vu dans une précédente leçon pour les dispositifs à division du front d'onde : ils doivent être éclairés par des sources très fines. Dans ces conditions, le contraste reste convenable et les interférences sont délocalisées car observables dans l'ensemble du champ

d'interférences.

**Rq** : Longueur de cohérence spatiale :  $\ell_s = (\lambda_0 d)/a$

## 1.2 Théorème de localisation

Le constat effectué avec un dispositif diviseur du front d'onde est un peu décevant... mais il était à craindre : les longueurs d'onde optiques sont courtes, à l'échelle d'une expérience usuelle, et le critère de visibilité est très restrictif.

Nous pouvons alors nous demander s'il n'existe pas, pour certains dispositifs, quelques points  $M$  privilégiés, pour lesquels  $\delta(S, M)$  dépendrait suffisamment peu de  $S$ , pour que le brouillage soit évité lors de l'élargissement de la source.

S'il existe des points  $M$ , tels que  $\delta(S, M)$  dépend "très peu" de  $S$ , les interférences, brouillées par l'élargissement de la source, restent malgré tout visibles au voisinage de ces points, qui réalisent un contraste maximal dans le champ d'interférences : avec une source élargie, les interférences sont localisées au voisinage de ces points.

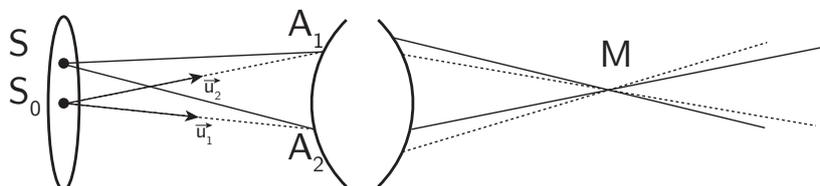


FIGURE 1 – Source large et système à deux voies

Reprenons un schéma de dispositif interférentiel, et considérons les rayons reliant, par les voies 1 et 2, un point  $S$  de la source étendue à un point  $M$ , d'observation. Si les voies de l'interféromètre sont convenablement stigmatiques, ces rayons qui passent par  $M$  en sortie de chaque voie doivent être passés par les points objets  $A_1$  et  $A_2$ , conjugués de  $M$  par les voies 1 et 2. Nous savons que les chemins optiques  $(A_1M) = L_1$  et  $(A_2M) = L_2$  ne dépendent pas des rayons choisis, donc pas de la position du point source  $S$  :

$$\delta(S, M) = (S_2M) - (S_1M) = SA_2 + L_2 - SA_1 - L_1$$

et

$$\delta(S_0, M) = S_0A_2 + L_2 - S_0A_1 - L_1$$

La variation des différences de chemin optique quand  $S_0$  donne  $S$  voisin de  $S_0$  est :

$$\Delta\delta(M) = \delta(S, M) - \delta(S_0, M) = (SA_2 - S_0A_2) - (SA_1 - S_0A_1) +$$

Évaluons le dernier terme entre rochets en supposant que la source est assez peu étendue pour utiliser un développement limité au premier ordre :

$$SA_1 - S_0A_1 \approx -\vec{u}_1 \cdot \vec{S_0S}$$

où  $\vec{u}_1$  est le vecteur unitaire pointant de  $S_0$  vers  $A_1$ . En procédant de même pour le point  $A_2$ , la différence de marche peut s'écrire :

$$\Delta\delta(M) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{S_0S}$$

Cette relation nous donne des informations précieuses : il y a deux possibilités pour que le contraste des interférences soit préservé quand la source est élargie :

- l'élargissement se fait orthogonalement aux rayons qui interfèrent ;
- les rayons qui interfèrent vérifient  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ , ce qui signifie qu'ils proviennent du même rayon incident.

La première possibilité est contraignante sur la source. En outre, elle concerne seulement  $S_0S$  et pas du tout le point d'observation : il n'y a donc pas d'effet de localisation des interférences dans ce cas. Cet aspect du critère de non-brouillage traduit l'observation d'interférences bien contrastées en éclairant des fentes d'Young non pas par un trou mais par une fente source parallèle aux fentes.

La seconde possibilité n'est pas contraignante sur la source mais sur l'interféromètre. En effet, il n'est pas possible de vérifier le critère  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$  avec un interféromètre à division de front d'onde. Seul un interféromètre à division d'amplitude le permet.

Ainsi il en découle le théorème de localisation :

**Seuls les interféromètres à division d'amplitude peuvent donner lieu à l'observation d'interférences contrastées produites par une source arbitrairement large. Alors, ces interférences sont localisées au voisinage des points où les rayons qui interfèrent sont issus du même rayon entrant dans l'interféromètre.**

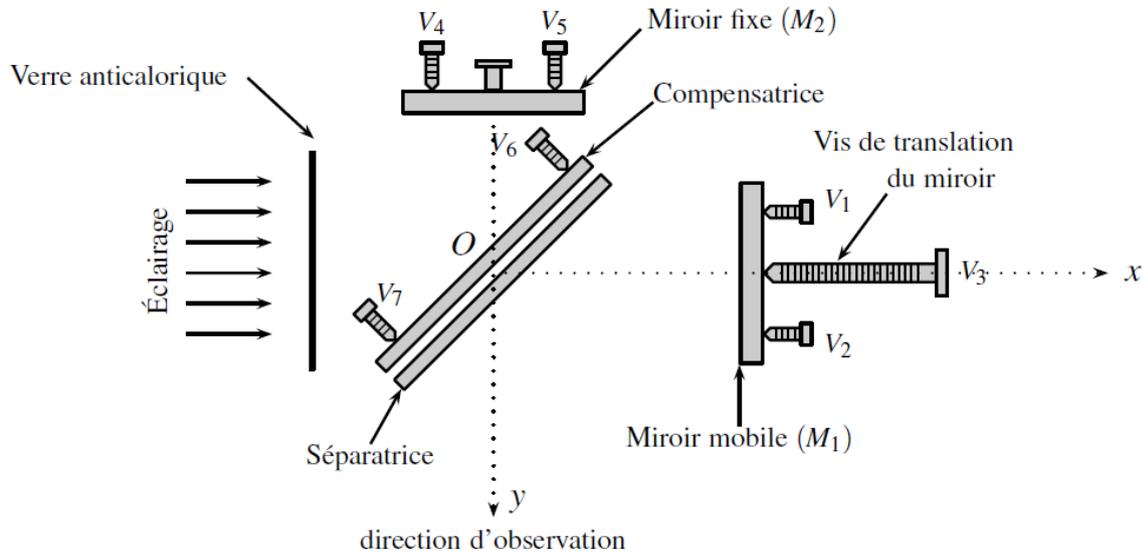
## 2. L'interféromètre de Michelson

**MANIP : Faire la manip du Michelson en lame d'air pour déterminer le doublet du Sodium en même temps que la présentation, le but étant de montrer son fonctionnement mais ensuite de l'application possible : spectroscopie optique. p.143 et 230 du Sextant et page 144 du H-prépa.**

L'interféromètre de Michelson, porte le nom d'Albert Michelson (1852-1931), prix Nobel de physique en 1907. Il conçut et utilisa cet interféromètre pour tenter de vérifier la loi de composition des vitesses galiléenne et de mesurer la vitesse d'entraînement de la lumière dans le référentiel terrestre. Le résultat négatif de cette expérience ouvrit la voie à la théorie de la relativité d'Einstein. De nos jours cet appareil est très employé pour réaliser des mesures de grande précision (mesure de distance notamment). Les détecteurs d'ondes gravitationnelles LIGO (Etats-Unis) et VIRGO (Europe) sont des interféromètres de Michelson géants dont les bras font quelques kilomètres de long. En Septembre 2015, l'instrument LIGO détecte pour la première fois une onde gravitationnelle, émise par la coalescence de deux trous noirs, il y a très très longtemps dans une galaxie très très lointaine. Cette mesure est une confirmation éclatante de la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Ce dispositif on l'aura compris permet de mesurer avec précision des longueurs. On va ainsi durant cette partie essayer de déterminer l'écart du doublet du sodium ou mercure.

## 2.1 Principe



L'interféromètre est réalisé à partir d'éléments de haute qualité optique et mécanique :

- un miroir mobile  $M_1$ , pouvant être translaté le long de l'axe  $(Ox)$  ;
- un miroir fixe  $M_2$
- une lame traitée sur sa face avant pour être semi-réfléchissante, appelée lame séparatrice, et une lame identique mais non traitée, appelée lame compensatrice, toutes deux inclinées d'un angle  $\pi/4$  par rapport aux axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . L'ensemble de ces deux lames constituent le dispositif séparateur.

Les deux segments  $[O; M_1]$  et  $[O; M_2]$  constituent les deux bras de l'interféromètre.

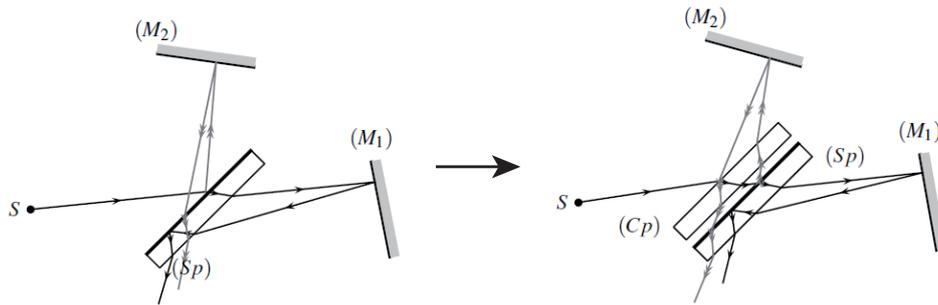
Un verre anticalorique est placé à l'entrée de l'interféromètre : il a pour rôle d'absorber le rayonnement infrarouge, protégeant ainsi toute l'optique de l'interféromètre.

Différentes vis (de 1 à 6) de réglage permettent de contrôler la position ou l'orientation des différents éléments : le miroir  $M_1$  en orientation et en translation (chariotage) et le miroir  $M_2$  en orientation.

L'interféromètre de Michelson offre deux voies possibles à la lumière incidente :

- Voie 1 : la lumière incidente est d'abord transmise par le dispositif séparateur, réfléchi ensuite par le miroir  $M_1$ , et enfin réfléchi par le dispositif séparateur avant d'émerger de l'interféromètre ;
- Voie 2 : la lumière incidente est d'abord réfléchi par le dispositif séparateur, réfléchi ensuite par le miroir  $M_2$ , et enfin transmise par le dispositif séparateur avant d'émerger de l'interféromètre.

## Le dispositif séparateur

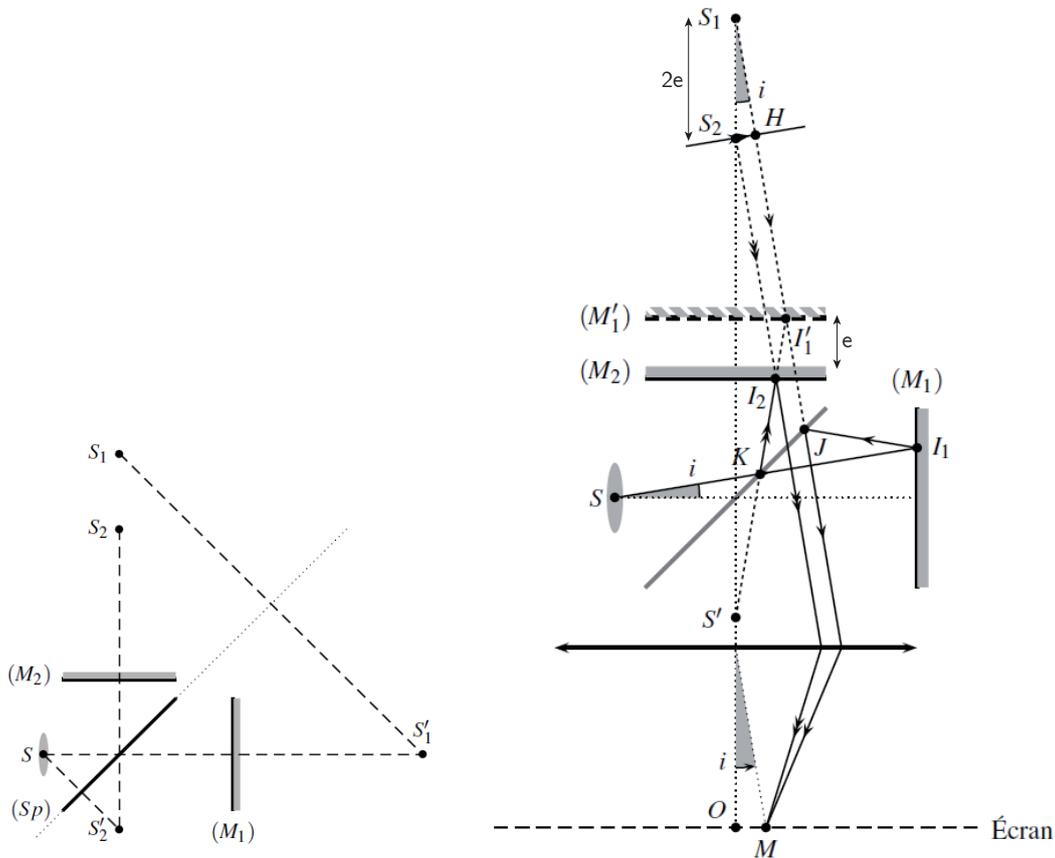


La lame séparatrice permet de séparer le faisceau lumineux incident en deux faisceaux d'éclairement moitié. Cependant, en l'absence de lame compensatrice, le rayon réfléchi par  $M_1$  traverse trois fois la séparatrice alors que le rayon réfléchi par  $M_2$  ne la traverse qu'une fois. Ceci entraîne une différence de chemins optiques irréductible entre les deux voies de l'interféromètre. Mais comme l'indice, optique de la lame compensatrice dépend de la longueur d'onde (effet de dispersion), cette différence de chemins optiques varie avec la longueur d'onde. On pourrait la compenser en lumière monochromatique en rapprochant convenablement le miroir  $M_1$  du dispositif séparateur. Mais cela devient inopérant en lumière polychromatique. Il faut donc rechercher une autre façon de compenser cette différence de marche. Pour cela on ajoute au dispositif séparateur une lame identique (sans traitement de surface cette fois-ci). Ainsi, chaque rayon transitant par une des deux voies de l'interféromètre aura traversé quatre fois l'épaisseur d'une lame. La présence de la lame compensatrice permet de rendre les deux voies de l'interféromètre équivalentes. Les vis  $V_6$  et  $V_7$  permettent de régler l'orientation de la lame compensatrice afin d'assurer le meilleur parallélisme possible avec la lame séparatrice.

Dans la suite de la leçon, on considèrera que l'ensemble des lames séparatrice et compensatrice est équivalent à une lame séparatrice d'épaisseur idéalement nulle, n'introduisant aucune différence de marche résiduelle.

**Rq :** Avec ce dispositif la moitié de l'éclairement est dirigée vers la sortie de l'interféromètre, et l'autre moitié est renvoyée vers la source.

## 2.2 lame d'air



On dit que l'interféromètre est configuré en lame d'air lorsque les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont perpendiculaires.

### Observation des franges

L'expérience montre que dans la configuration de la lame d'air éclairée par une source étendue, les interférences sont très peu visibles lorsqu'on place à la sortie de l'interféromètre un écran à distance finie de l'interféromètre. On observe que la visibilité des franges augmente au fur et à mesure que l'on éloigne l'écran. Elle est même maximale lorsque l'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. Cela signifie que la visibilité des franges est maximale à l'infini. On dit que les franges d'interférences sont localisées à l'infini.

Soit le schéma équivalent du dispositif en lame d'air présenté sur la figure. L'interféromètre est éclairé par une source étendue : on considère une source ponctuelle  $S$  appartenant à cette source. L'onde rayonnée par  $S$  est supposée monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0$ .

Analysons la position des deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  :

- Voie 1 : un rayon lumineux issu de  $S$  est transmis par la lame séparatrice  $S_p$  réfléchi par le miroir  $M_1$  et réfléchi par la lame séparatrice ;
- Voie 2 : un rayon lumineux issu de  $S$  est réfléchi par la lame séparatrice  $S_p$ , réfléchi par le miroir  $M_2$  et transmis par la lame séparatrice.

Les constructions géométriques font apparaître une symétrie du dispositif par rapport à l'axe de la séparatrice. On peut donc considérer le miroir  $M'_1$  symétrique de  $M_1$  par

rapport à la lame séparatrice. Cette transformation laisse la distance  $S_1$  et  $S_2$  inchangée. On renomme le point  $S'_2$  par  $S'$ . On peut considérer que  $S_1$  est l'image de  $S'$  par le miroir  $M'_1$ . On appelle épaisseur de la lame d'air la distance entre  $M_2$  et  $M'_1$ , notée  $e$ . On peut alors montrer que la distance entre  $S_1$  et  $S_2$  est  $2e$ .

## Calculs

Exprimons les chemins optiques de  $S$  à  $M$  pour les deux voies de l'interféromètre. On suppose que la réflexion sur les miroirs s'accompagne d'un chemin optique supplémentaire égale à  $\lambda_0/2$ . Nous choisissons, par souci de simplicité, de ne pas écrire les chemins optiques supplémentaires introduit par les réflexions sur la séparatrice idéale, en supposant qu'ils sont identiques sur les deux voies et qu'ils ne contribuent donc pas à la différence de marche.

$$\begin{aligned}(SM)_1 &= (SI_1) + \frac{\lambda_0}{2} + (I_1J) + (JM) = nSI_1 + \frac{\lambda_0}{2} + nI_1J + (JM) \\ (SM)_2 &= (SK) + (KI_2) + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M) = nSK + nKI_2 + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M)\end{aligned}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $SI_1 = S'I'_1$  et  $I_1J = I'_1J$  d'une part, et  $SK + KI_2 = S'K + KI_2 = S'I_2 = S_2I_2$  d'autre part (les points  $S'$ ,  $K$  et  $I_2$  sont alignés, donc  $S'K + KI_2 = S'I_2$ ). De même, on peut écrire :  $S_1I'_1 + I'_1J = S_1J$  car les points  $S_1$ ,  $I'_1$  et  $J$  sont alignés. D'où :

$$\begin{aligned}(SM)_1 &= nSI'_1 + \frac{\lambda_0}{2} + nI'_1J + (JM) = (S_1M) + \frac{\lambda_0}{2} \\ (SM)_2 &= nS_2I_2 + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M) = (S_2M) + \frac{\lambda_0}{2}\end{aligned}$$

La différence de marche  $\delta(M) = (SM)_1 - (SM)_2 = (S_1M) - (S_2M)$ . Sur la figure est tracé un plan d'onde relatif à une source fictive qui serait placée en  $M$  et passe par  $S_2$  et  $H$ . On en déduit que  $(S_2M) = (HM)$  et que par conséquent  $\delta(M) = nS_1H$ .

L'angle correspondant au secteur angulaire grisé est  $i$ , de sorte que :

$$\delta(M) = 2ne \cos(i) \quad (3)$$

Ainsi on peut immédiatement déduire la différence de phase pour le cas en lame d'air :

$$\Delta\phi(M) = \frac{4\pi ne \cos(i)}{\lambda_0} \quad (4)$$

Mais aussi l'ordre d'interférence :

$$p(M) = \frac{2ne \cos(i)}{\lambda_0} \quad (5)$$

et enfin l'éclairement :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi ne \cos(i)}{\lambda_0} \right) \right) \quad (6)$$

On voit que l'ordre d'interférence est indépendant de la position de la source  $S$  et dépendant de la position du point  $M$ . Ainsi tous les systèmes de franges d'interférences coïncident exactement, et ce quelle que soit l'extension spatiale de la source primaire. Les franges d'interférences visibles dans le plan focal de la lentille sont donc particulièrement lumineuses.

Lorsqu'un dispositif interférentiel, éclairé par une source étendue, fonctionne par division d'amplitude, les franges d'interférences sont localisées sur une surface, appelée surface de localisation où la visibilité des franges d'interférences est maximale. La surface de localisation est constituée de l'ensemble des points  $M$  qui correspondent à l'intersection des deux rayons émergents de l'interféromètre, et qui sont issu d'un seul et même rayon émergent de la source.

Le dispositif présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $(S_1S_2)$ . Les franges d'interférences ont donc la même symétrie de révolution : elles sont circulaires. Plutôt que de parler de franges circulaires, on parle aussi d'anneaux.

L'ordre d'interférences  $p(M)$  ne dépend que de l'angle  $i$ . Une frange brillante donnée correspond à la même valeur de l'angle  $i$ . Comme cet angle correspond à l'inclinaison des rayons lumineux, on qualifie ces franges de franges d'égale inclinaison. L'ordre est maximal pour  $i$  minimale soit  $p_{max} = p(i = 0) = p_0$ .  $p$  est fonction décroissante de  $i$ .

## Rayon des anneaux successifs

(facultatif)

Soit  $r = OM$ . L'utilisation de la lentille dans les conditions de Gauss impose à  $i$  de garder des valeurs suffisamment faibles de sorte que  $i \simeq \tan(i) = r/f'$ . Alors :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos(i_1) \simeq \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i_1^2}{2}\right) = \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right)$$

On en déduit le rayon  $r_1$  du premier anneau brillant :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} p_0\right)}$$

Le deuxième anneau correspond à un ordre d'interférence égale à  $p_0 - 1$ ... etc d'où :

$$r_m = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} (p_0 - m + 1)\right)} \quad (7)$$

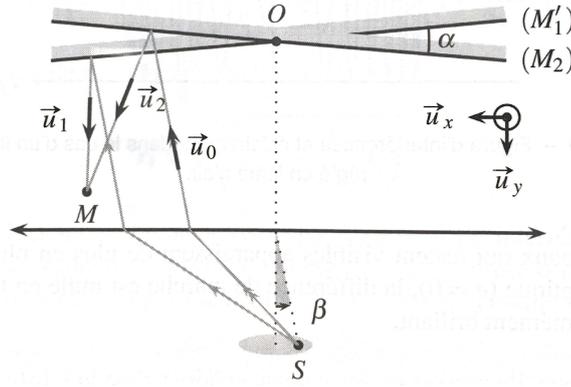
Lorsqu'on diminue l'épaisseur  $e$  de la lame d'air, un anneau donnée rétrécit et finit par disparaître au centre de la figure d'interférence.

**Rq :** On définit le contact optique quand  $e = 0$ . L'écran est uniformément éclairé : c'est la teinte plate.

## 2.3 Coin d'air

On dit que l'interféromètre est configuré en coin d'air lorsque deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  ne sont pas perpendiculaires.

Pour l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, et éclairé par une source spatialement étendue, les franges d'interférences sont localisées au voisinage des miroirs.



On se place dans la situation rencontrée en pratique où l'interféromètre est éclairé par une source étendue. Pour faciliter l'analyse du dispositif, on considère que cette source est placée au foyer principal objet d'une lentille convergente. Cette situation est représentée sur la figure, où l'on considère l'interféromètre "replié". La figure montre que les deux miroirs  $M_2$  et  $M'_1$  emprisonnent un coin d'air, ce qui justifie son nom. En un point  $M$  on observe la superposition des deux ondes planes, qui se propagent suivant la direction  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . On choisit le point  $O$  comme origine et on admet qu'on peut raisonner dans le plan de la figure  $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ . Le point source  $S$  est repéré par l'angle  $\beta = 0$ , entre deux valeurs extrêmes  $\pm\beta_M$  qui définissent la largeur de la source étendue.

Dans la base  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , on a  $\vec{u}_0 = \sin(\beta)\vec{u}_x - \cos(\beta)\vec{u}_y$ . Si les deux miroirs étaient confondus on aurait  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  confondus ( $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \sin(\beta)\vec{u}_x + \cos(\beta)\vec{u}_y$ ).

Lorsqu'on introduit un angle  $\alpha$  entre les deux miroirs, le miroir  $(M'_1)$  tourne d'un angle  $\alpha/2$ . Il en résulte que le rayon réfléchi par ce miroir tourne d'un angle double, c'est à dire de  $\alpha$ . Le vecteur  $\vec{u}_1$  forme alors un angle  $\beta - \alpha$  avec  $\vec{u}_y$  et s'écrit :  $\vec{u}_1 = \sin(\beta - \alpha)\vec{u}_x + \cos(\beta - \alpha)\vec{u}_y$ . De la même façon  $M_2$  tourne d'un angle  $-\alpha/2$  et on a  $\vec{u}_2 = \sin(\beta + \alpha)\vec{u}_x + \cos(\beta + \alpha)\vec{u}_y$ . On peut en déduire l'expression des vibrations lumineuses des deux ondes planes qui interfèrent en  $M$  :

$$s_1(M) = s_0 \exp\left(i(\omega t - \frac{2n\pi}{\lambda_0} \vec{u}_1 \cdot \vec{OM})\right) \text{ et } s_2(M) = s_0 \exp\left(i(\omega t - \frac{2n\pi}{\lambda_0} \vec{u}_2 \cdot \vec{OM})\right)$$

La différence des retards de phase des deux ondes au point  $M$  s'écrit :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OM}$$

Ainsi l'ordre d'interférence s'écrit en  $M$  :

$$p(M) = \frac{\Delta\phi(M)}{2\pi} = \frac{n}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OM} = \frac{2n \sin(\alpha)}{\lambda_0} (x \cos(\beta) - y \sin(\beta)) = \frac{2ne(M)}{\lambda_0} \quad (8)$$

L'ordre d'interférence en  $M$  dépende de la position de la source  $S$ .

La différence de marche est :

$$\delta(M) = 2ne(M) \quad (9)$$

**Rq** : Plus de détail et explications p813-814 tout en un PC-PC\*.

Pour ce type de dispositif les interférences sont localisées sur une surface voisine des deux miroirs.

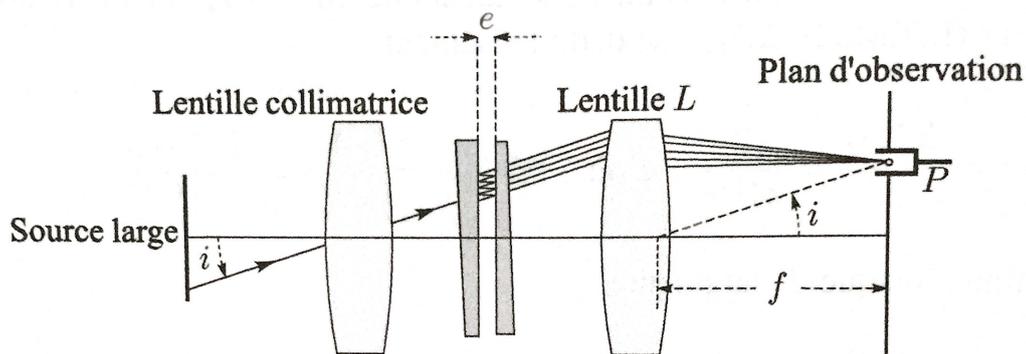
L'éclairement est dans ce cas la :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n \alpha x}{\lambda_0} \right) \right) \quad (10)$$

L'éclairement ne dépend que de  $x$  : on obtient des franges d'égale épaisseur rectilignes. L'interfrange est :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha} \quad (11)$$

### 3. L'interféromètre de Fabry-Pérot



L'interféromètre de Fabry-Pérot, construit par les physiciens français Fabry et Pérot est très largement utilisé comme spectromètre à haute résolution, ainsi que comme cavité optique dans les lasers.

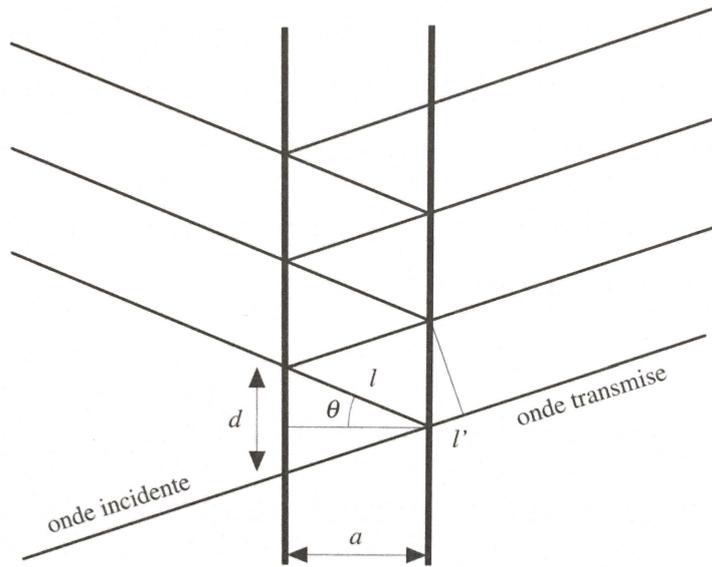
Cet appareil est constitué de deux miroirs semi-réfléchissants plans et parallèles à hauts coefficients de réflexion. La lumière entrante effectue de multiples aller-retour à l'intérieur de cette cavité optique et ressort partiellement à chaque réflexion. Les rayons sortants interfèrent entre eux et produisent des anneaux d'interférence localisés à l'infini.

L'interféromètre est constitué d'une paire de lames semi-réfléchissantes. Les lames sont en généralement en coin, pour éviter des franges d'interférence due aux faces arrières ; les dites faces arrières ont en général un traitement antireflet. Le système peut comporter en sortie une lentille de focalisation.

Le système est éclairé par un faisceau collimaté.

Pour simplifier l'étude, on suppose que l'interféromètre est éclairé par une source de lumière monochromatique. On peut représenter, comme sur la figure, un rayon en particulier, et calculer sa contribution à la lumière sortante.

**Rq :** Du fait de la multitude de réflexion il règne dans la cavité un champ électrique très important !



Chaque faisceau sortant de la cavité présente un déphasage  $\phi$  les uns par rapport aux autres, dépendant de l'angle  $\theta$ , l'angle entre la normale sortante à la lame et le faisceau pénétrant dans la lame.

Ces rayons interfèrent entre eux et on peut alors montrer que, selon la valeur de  $\theta$ , le rayon est transmis ou pas.

On s'aperçoit en fait que seules quelques valeurs de  $\theta$  permettent de transmettre la lumière du rayon incident. Chacune de ces valeurs peut être directement visualisée : elles correspondent à une série d'anneaux concentriques observés sur la figure d'interférence. En effet, en place une lentille convergente à la sortie de l'interféromètre, tous les rayons faisant le même angle  $\theta$  par rapport à l'axe central de la lentille formeront un anneau.

Le déphasage entre deux rayons successifs est donnée par :  $\phi = \phi(\theta) = 2kna \cos(\theta)$  où  $n$  est l'indice de réfraction de la couche,  $a$  son épaisseur,  $\theta$  l'angle de réfraction et  $k = 2\pi/\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. La phase du  $m$ -ième rayon est alors :  $\phi_m = \phi_{m-1} + \phi = \phi_0 + m\phi$ .

On arrive à calculer la différence de marche entre deux ondes successives. :

$$\delta = 2na \cos(\theta) \quad (12)$$

Or comme  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$  on a sachant que  $i = \theta$  :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2na \cos(\theta) \quad (13)$$

Soit  $\underline{\psi}_0$  l'amplitude complexe d'une onde plane incidente. Alors les amplitudes complexes des ondes transmises successivement ont pour expressions respectives :

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\psi}_0 T \quad \underline{\psi}_2 = \underline{\psi}_0 TR \exp(i\phi) \quad \underline{\psi}_3 = \underline{\psi}_0 TR^2 \exp(i2\phi) \quad \underline{\psi}_4 = \underline{\psi}_0 TR^3 \exp(i3\phi) \dots$$

L'amplitude complexe de l'onde transmise au point  $P$  du plan focal de  $L$  est la somme des amplitudes complexes des ondes transmises :

$$\underline{\psi}_t(P) = \sum_i \underline{\psi}_i = \underline{\psi}_0 T [1 + R \exp(i\phi) + R^2 \exp(i2\phi) + R^3 \exp(i3\phi) + \dots R^m \exp(im\phi) + \dots]$$

Comme la raison de cette progression géométrique est  $R \exp(i\phi)$  et que  $R < 1$ , on trouve, après sommation :

$$\underline{\psi}_t(P) = \underline{\psi}_0 T \frac{1}{1 - R \exp(i\phi)} \quad (14)$$

L'intensité de l'onde résulte directement de ce qui précède :

$$I_t(P) = |\underline{\psi}_t(P)|^2 = |\underline{\psi}_0|^2 T^2 \frac{1}{|1 - R \exp(i\phi)|^2} \quad (15)$$

En introduisant l'intensité de l'onde incidente  $I_0 = |\underline{\psi}_0|^2$  et en développant, cette expression devient :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R \cos(\phi))^2 + R^2 \sin^2(\phi)} = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\phi)} \quad (16)$$

Soit encore :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (17)$$

avec  $M = 4R/(1 - R)^2$ .

La fonction est max si  $\phi = 2\pi p$  et vaut  $I_{max} = I_0 (T/(1 - R))^2$ .

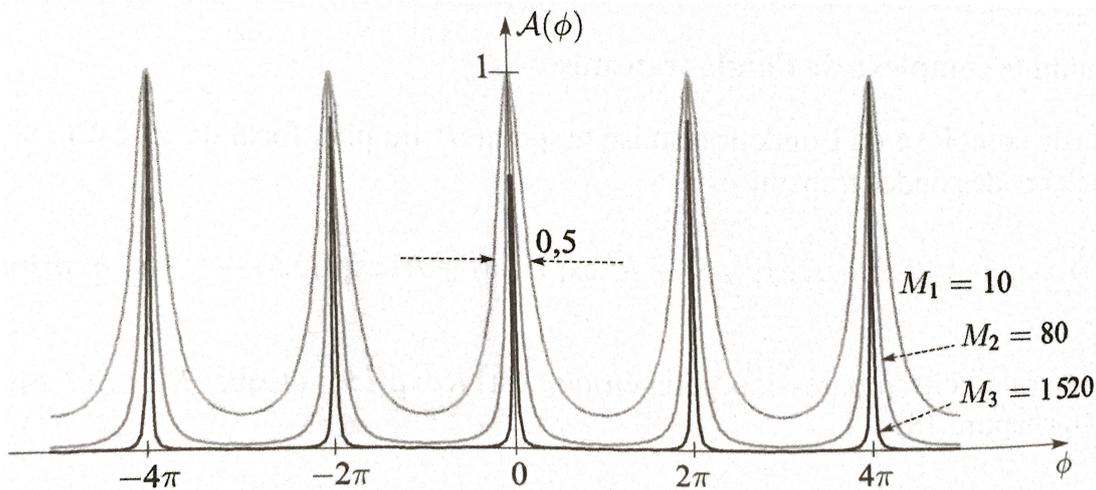
Soit :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a = \frac{4\pi\nu a}{c} \quad (18)$$

On en déduit les mode propres pour  $\nu = pc/2a$  et l'intervalle spectrale  $\Delta\nu = c/2a$  (distance en fréquence séparant deux pics de la fonction d'Airy) . Seul ces fréquences émergent de la cavité, les autres sont atténuées.

Fonction d'Airy :

$$A(\phi) = \frac{I_t(P)}{I_{max}} = \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (19)$$



On peut également déterminer la largeur totale des pics à mi-hauteur  $\Delta\phi_{1/2}$ , en supposant  $\phi \ll 1$  :

$$\text{Pour } A = 0.5 \text{ on a } \Delta\phi_{1/2} = \frac{4}{M^{1/2}} = \frac{2(1 - R)}{R^{1/2}}$$

Ce dispositif est utilisé en spectrométrie : en raison de la finesse des anneaux on peut analyser avec précision la distribution spectrale des sources lumineuses.

## Dispersion

On appelle dispersion la quantité :

$$\mathcal{D}_\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = -2\pi \frac{2e \cos(\theta)}{\lambda^2} \quad (20)$$

## Pouvoir de résolution

On sait que le pouvoir de résolution d'un spectromètre est :  $PR = \lambda/\Delta\lambda$ , avec  $\Delta\lambda$  le plus petit écart en longueur d'onde détectable. Si  $\Delta\phi_{1/2}$  désigne la variation de phase minimal que l'instrument peut détecter,  $\Delta\lambda$  est reliée à  $\mathcal{D}_\phi$  par :

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\phi_{1/2}}{|\mathcal{D}_\phi|}$$

Lorsque  $\Delta\phi_{1/2}$  est définie par la largeur à mi-hauteur des pics de la figure d'interférence, elle dépend du facteur  $M$  selon :

$$\Delta\phi_{1/2} = \frac{4}{M^{1/2}} \text{ d'où } \Delta\lambda = \frac{4/M^{1/2}}{2\pi 2a \cos(\theta)/\lambda^2} \text{ et } PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi M^{1/2} a \cos(\theta)}{\lambda}$$

On met généralement  $PR$  sous la forme :

$$PR = p\mathcal{F} \text{ où } p = \frac{2a \cos(\theta)}{\lambda} \text{ et } \mathcal{F} = \frac{\pi M^{1/2}}{1-R} = \frac{\pi R^{1/2}}{1-R}$$

qui sont respectivement l'ordre d'interférence et la finesse. Ainsi on remarque que plus le facteur de réflexion augmente la finesse et le pouvoir de résolution augmente aussi.

**Rq** : Plus de détails page 375 du Perez ou p114 du Taillet.

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon l'intérêt d'utiliser les interféromètres à division d'amplitude : on s'affranchit du problème de cohérence spatiale et on peut faire des mesures beaucoup plus précises (de l'ordre du  $\mu m$  certaine fois). Ce type d'appareil est, comme on l'a vu dans l'introduction du Michelson, à une échelle plus importante, utilisé dans la physique fondamentale mais également dans les dispositifs de contrôle dans l'industrie (contrôle optique de haute précision).

# MANIP : Détermination du doublet du sodium ou mercure

## CHAPITRE 9 – L'INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

### 2.3 Applications

#### a) Mesure de l'écart du doublet du sodium

On a vu au chapitre précédent que les systèmes d'interférences correspondant aux deux longueurs d'onde d'un doublet se brouillent lorsque la différence de marche  $\delta$  est de la forme :

$$\delta = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma},$$

où  $m$  est un entier (voir page 242) et  $\Delta\sigma$  la différence des nombres d'onde. Pour les différences de marche proches de ces valeurs, les franges sombres de chaque longueur d'onde coïncident localement aux franges brillantes de l'autre.

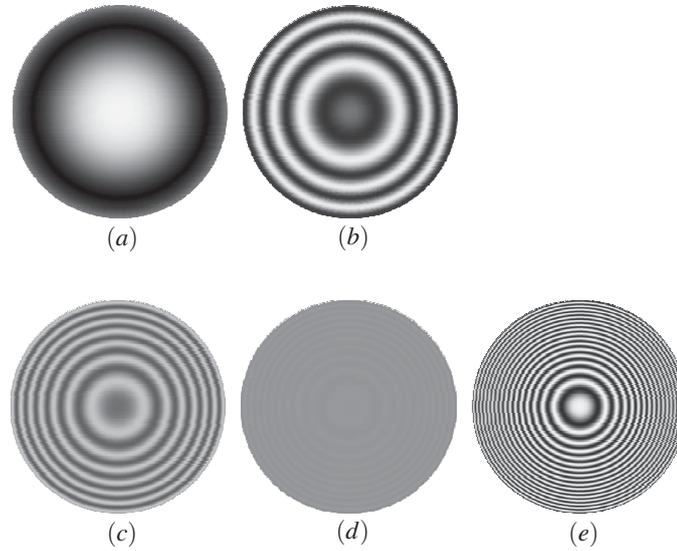
La lumière d'une lampe au sodium comporte deux raies jaunes très proches. Le phénomène de brouillage est inobservable avec un dispositif de trous de Young parce qu'on accède pas à des différences de marche suffisamment grandes, mais il est observé facilement avec l'interféromètre de Michelson ce qui permet de mesurer le très faible écart entre les longueurs d'onde du doublet.

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson dans la configuration de la lame d'air puis on remplace la source par une lampe au sodium. Si les anneaux n'apparaissent pas, c'est peut être parce qu'on est précisément dans une zone de brouillage. On déplace le miroir mobile en « chariotant » pour voir des anneaux de plus en plus grands et se rapprocher du contact optique. On constate que le contraste des anneaux évolue et que les anneaux sont parfois brouillés.

Les simulations montrées sur la figure 9.10 donnent l'aspect de l'écran pour des épaisseurs croissantes de la lame d'air : (a) : on est proche du contact optique, on voit un anneau sombre de grande taille et bien contrasté ; (b) et (c) : l'épaisseur de la lame d'air est un peu plus grande, il y a de plus en plus d'anneaux et le contraste diminue ; (d) : les anneaux ne sont plus visibles, il y a brouillage ; (e) : pour une épaisseur plus grande les anneaux réapparaissent et il y en a de plus en plus.

On se place au contact optique (l'écran est uniformément éclairé et si charioté légèrement un anneau sombre de grand diamètre doit apparaître) et on note la position  $x_{C.O.}$  du chariot. Partant de cette position on charioté dans le sens où  $x$  augmente et on note les positions  $x_m$  du chariot pour lesquelles il y a brouillage des anneaux :  $x_{C.O.} < x_1 < x_2 \dots$  ; on revient au contact optique et on recommence dans l'autre sens pour trouver des positions pour lesquelles il y a brouillage :  $x_{C.O.} > x_{-1} > x_{-2} \dots$ . Toutes ces positions sont lues sur la vis micrométrique avec une précision typique  $\Delta x = 5 \mu\text{m}$ . Il faut tourner la vis très lentement car le déplacement des anneaux est rapide.



**Figure 9.10** – Simulations numériques de l'aspect de l'écran d'observation pour différentes valeurs de l'épaisseur de la lame d'air avec une lampe au sodium : (a) :  $e = 10 \mu\text{m}$  ; (b) :  $e = 50 \mu\text{m}$  ; (c) :  $e = 100 \mu\text{m}$  ; (d) :  $e = 150 \mu\text{m}$  ; (e) :  $e = 200 \mu\text{m}$ .

L'épaisseur de la lame d'air pour la position  $x$  est  $e = |x - x_{C.O.}|$  et la différence de marche au centre de la figure est  $\delta = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ . On a donc, pour  $k = 1, 2, \dots$

$$2(x_k - x_{C.O.}) = 2(x_{C.O.} - x_{-k}) = \frac{k - \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} \quad \text{d'où} \quad \Delta\sigma = \frac{k - \frac{1}{2}}{x_k - x_{-k}}.$$

Par ailleurs, notant  $\lambda_m$  la longueur d'onde moyenne du doublet et  $\Delta\lambda$  l'écart du doublet :  $\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_m - \Delta\lambda/2} - \frac{1}{\lambda_m + \Delta\lambda/2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2 - \Delta\lambda^2/4} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2}$ . On obtient donc l'écart du doublet par :

$$\Delta\lambda = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_m^2}{x_k - x_{-k}}.$$

Dans une expérience on a mesuré :  $x_{C.O.} = 4,450 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 4,890 \text{ mm}$  et  $x_{-2} = 4,015 \text{ mm}$ . On sait que  $\lambda_m = 0,5893 \mu\text{m}$ . On en déduit :

$$\Delta\lambda = 5,95 \cdot 10^{-3} \mu\text{m} \pm 7 \cdot 10^{-2} \mu\text{m},$$

en tenant compte de l'incertitude sur la position du chariot.

**b) Mesure des longueurs d'ondes du doublet du mercure**

Dans l'expérience précédente, on n'a obtenu que l'écart entre les deux longueurs d'onde du doublet. Pour mesurer la longueur d'onde moyenne  $\lambda_m$  on peut décider de compter les anneaux qui entrent (ou sortent) au centre de la figure pendant un déplacement du chariot. En effet, lorsque le chariot se déplace de  $\Delta x$ , la différence de marche au centre,  $\delta(i=0) = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ , varie de  $2\Delta x$ . Comme le centre est un anneau brillant de rayon nul entrant (ou sortant) chaque fois que  $\delta(i=0)$  est un multiple de  $\lambda_m$ , le nombre d'anneaux entrant (ou sortant) est  $N = \frac{2\Delta x}{\lambda_m}$  d'où  $\lambda_m = \frac{2\Delta x}{N}$ . Mais il y a une difficulté : l'incertitude sur  $x$  étant  $5 \mu\text{m} \sim 10\lambda_m$ , il faut compter un nombre d'anneaux très grand pour avoir une précision acceptable sur  $\lambda_m$ . On résout ce problème en utilisant un moteur pour déplacer le chariot à vitesse constante et un capteur relié à une carte d'acquisition d'ordinateur.

On illustre ci-dessous la méthode dans le cas du doublet jaune du mercure (dont l'écart est plus grand que celui du sodium).

**Expérience**

On règle un interféromètre de Michelson dans la configuration de la lame d'air et on repère la position  $x_{C.O.}$  du chariot correspondant au contact optique. On place comme source une lampe au mercure munie d'un filtre interférentiel isolant le doublet jaune. Au centre des anneaux on place un récepteur de lumière relié à une carte d'acquisition d'ordinateur. On utilise le moteur pour déplacer le miroir ( $M_1$ ) en translation à la vitesse  $V$ , d'une position  $x_i < x_{-1}$  à une position  $x_f > x_1$  où  $x_{-1}$  et  $x_1$  sont les deux positions les plus proches du contact optique donnant un brouillage.

L'enregistrement du signal du capteur en fonction du temps a l'allure montrée sur la figure 9.11 : le signal a des oscillations très rapides dont l'amplitude est variable. À chaque maximum, un anneau apparaît (ou disparaît) au centre de la figure. On repère aisément le passage par les points de brouillage pour lesquels l'amplitude d'oscillation s'annule ; on peut ainsi mesurer la durée  $T_1$  entre les passages par les positions  $x_{-1}$  et  $x_1$ . On mesure aussi en dilatant l'échelle de temps la courbe la durée  $T_2$  correspondant à 20 oscillations.

D'après les calculs précédents on a :

$$T_1 = \frac{x_1 - x_{-1}}{V} = \frac{1}{2\Delta\sigma V} \simeq \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda V}$$

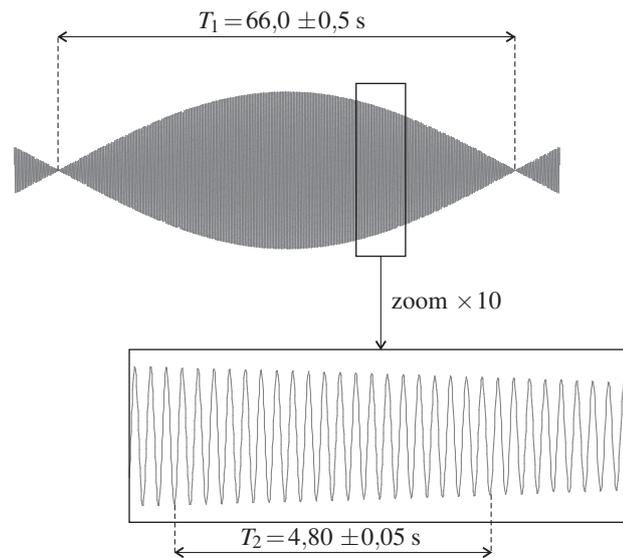
Par ailleurs, l'intensité est maximale chaque fois que la différence de marche  $\delta(i=0)$  est un multiple de  $\lambda_m$  ; étant donné que  $\delta(i=0) = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ , le chariot se déplace de  $\lambda_m/2$  entre deux maxima. Ainsi :

$$T_2 = 20 \times \frac{\lambda_m}{2V}$$

Sans connaître la vitesse  $V$  on peut calculer :  $\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = \frac{20T_1}{T_2} = 275 \pm 5$ , résultat à com-

parer à la valeur tabulée qui est 274.

C'est le nombre d'oscillations du signal entre les deux brouillages puisqu'une oscillation dure  $\frac{T_2}{20}$  et le passage d'un point de brouillage à l'autre  $T_1$ . On vérifie d'ailleurs facilement que :  $\frac{x_1 - x_{-1}}{\lambda_m/2} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$ . Ce nombre peut être déterminé par un simple comptage (manuel ou informatisé) des oscillations.



**Figure 9.11** – Enregistrement du signal fourni par le détecteur au cours du temps.

Pour accéder à  $\lambda_m$  et  $\Delta\lambda$  il faut connaître la vitesse  $V$ . Pour cela on remplace la lampe au mercure par un laser hélium-néon de longueur d'onde connue  $\lambda_0 = 0,6238 \mu\text{m}$ . On enregistre le signal qui est alors quasiment sinusoïdal et on mesure la durée de 20 oscillations :  $T'_2 = 5,25 \pm 0,05 \text{ s}$ . On en déduit :  $V = \frac{20(\lambda_0/2)}{T'_2} = 1,2 \pm 0,01 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On remarquera l'ordre de grandeur très inhabituel de cette vitesse (le déplacement est provoqué par la rotation très lente d'une vis micrométrique).

Finalement on trouve :  $\lambda_m = \frac{VT_2}{10} = 0,576 \pm 0,011 \mu\text{m}$  (valeur vraie :  $0,5780 \mu\text{m}$ ) et  $\Delta\lambda = (2,09 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$  (valeur vraie  $2,1 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ).

Il faut noter qu'on a supposé la vitesse  $V$  constante ce qui n'est pas forcément vrai.

## BONUS au cas où

L'intensité vibratoire est alors :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n \alpha x}{\lambda_0} \right) \right).$$

L'intensité vibratoire ne dépend que de  $x$  : on obtient donc des franges d'égale épaisseur rectilignes parallèles à l'intersection des deux miroirs. L'interfrange  $i$  correspond à la période spatiale de l'intensité vibratoire :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}.$$

### Remarque

La lentille ( $\mathcal{L}$ ) introduit un grandissement  $\gamma$ . L'interfrange observable sur l'écran est donc  $\gamma \frac{\lambda_0}{2n\alpha}$ .

Avec  $\alpha \simeq 10^{-3}$  rad,  $\lambda \simeq 0,5 \mu\text{m}$  et  $\gamma \simeq 10$  cet interfrange est d'environ 2,5 mm.

### 3.3 Application : détection des défauts d'une lame de verre

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson pour observer les franges d'égale épaisseur du coin d'air en lumière de la lampe au sodium, considérée comme monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 0,590 \mu\text{m}$ . On introduit devant le miroir ( $M_1$ ) une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur  $e'$  et d'indice  $n'$  que l'on place parallèlement au miroir. On peut ainsi détecter les défauts de la lame qui n'a pas forcément un indice  $n'$  parfaitement homogène ou une épaisseur  $e'$  parfaitement égale en tout point. La figure 9.15 montre une simulation de la déformation des franges due à une « bosse » sur une lame d'indice  $n' = 1,5$  parfaitement homogène.

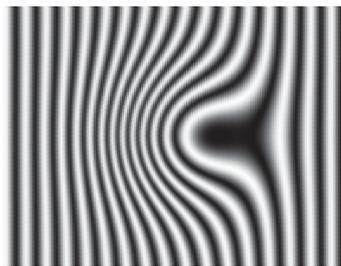


Figure 9.15 – Frange du coin d'air déformées par un défaut d'une lame de verre.

Le sommet de la bosse est au centre de la figure, sur la frange la plus déformée qui se décale vers la gauche (perpendiculairement aux franges) d'environ 4 interfranges. C'est le signe que la lumière qui traverse la lame à cet endroit a un supplément de marche optique égal à environ  $4\lambda_0$  dû à la bosse. Or ce supplément de marche optique est  $2(n' - 1)\Delta e'$  où  $\Delta e'$  est la hauteur de la bosse (le facteur 2 tient compte de l'aller et retour de la lumière à travers la lame). On en déduit que :  $\Delta e' \simeq \frac{4\lambda_0}{2(n' - 1)} \simeq 2,4 \mu\text{m}$ .

Cette méthode est utilisée pour contrôler des éléments d'optique haute précision. On peut déceler facilement un déplacement d'un dixième d'interfrange donc déceler une bosse de hauteur de l'ordre de  $\frac{\lambda_0}{10}$ . Pour le contrôle des lentilles on remplace le miroir ( $M_1$ ) par un miroir sphérique.

### SYNTHÈSE

#### SAVOIRS

- configuration de la lame d'air
- configuration du coin d'air
- franges localisées à l'infini pour un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source spatialement étendue
- franges localisées au voisinage des miroirs pour un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source spatialement étendue
- définition des franges d'égale inclinaison
- définition des franges d'égale épaisseur
- expression de l'ordre d'interférences pour la lame d'air
- expression de la différence de marche pour le coin d'air

#### SAVOIR-FAIRE

- décrire, mettre en œuvre et justifier les conditions d'éclairage d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et en coin d'air
- établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférences dans le cas de la lame d'air
- interpréter la différence de marche dans le cas du coin d'air
- utiliser l'expression de la différence de marche pour retrouver l'ordre d'interférences dans le cas du coin d'air
- retrouver l'expression de l'interfrange pour le coin d'air formé par deux miroirs plans

#### MOTS-CLÉS

- lame d'air
- coin d'air
- division d'amplitude
- localisation des franges
- franges d'égale inclinaison
- franges d'égale épaisseur