

L.P. 33 - Interférences à deux ondes en optique

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- Optique géométrique
- Optique expérimentale
- Transformation de Fourier
- Physique des ondes

Bibliographie

- Optique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- Exp. de physique (Optique), Bellier, *Dunod*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- Cap Prépa PC, Renvoizé, *Pearson*
- Optique, Bertin, *Dunod*

MANIP Fentes d'Young : observer les figures et ce qu'il se passe et la majeure partie de la leçon autour de cette manip. Bellier p.186 et Sextant p.161.

Introduction

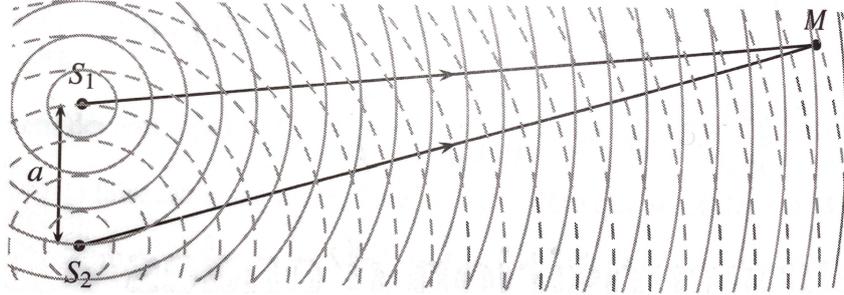
Le phénomène d'interférences est une manifestation flagrante de la nature ondulatoire de la lumière. À ce titre, un certain nombre d'expériences ont permis à la théorie ondulatoire de supplanter, au XIX^e siècle, la théorie corpusculaire qui éclipsait jusque-là cette première théorie. Il est admis maintenant que la lumière présente un double caractère : c'est une onde électromagnétique tout en étant constituée de particules élémentaires sans masse appelées photons : on parle de dualité onde-corpuscule.

Le phénomène d'interférences se rencontre dans la vie de tous les jours : ondes sonores, ondes radio, ondes à la surface de l'eau ou bien ondes lumineuses. De l'expérience historique des fentes d'Young aux interféromètres de Michelson, de Fabry-Pérot ou de Sagnac, qui seront présentés dans une autre leçon... les techniques interférométriques ont connu des perfectionnements considérables. Elles constituent des outils d'analyse puissants, pouvant être utilisés dans des domaines aussi variés que l'industrie, l'astrophysique ou encore la recherche fondamentale, comme en témoigne l'expérience *Virgo*, menée depuis 2003 à Pise qui a permis de détecter l'existence d'ondes gravitationnelles.

Ainsi dans cette leçon nous allons nous attarder sur l'interférence entre deux ondes à travers des équations qui permettront de caractériser ce phénomène. On pourra ensuite présenter quelques dispositifs interférentiels et observer les figures qui en sont induites et enfin on aborde la notion de cohérence, point important et nécessaire à l'existence d'interférences.

1. Interférence de deux ondes lumineuses

1.1 Définitions



Considérons deux ondes lumineuses progressive harmonique, de sources S_1 et S_2 , monochromatiques, polarisées rectilignement, dont l'expression du champ électrique des deux ondes rayonnées au point d'observation M est :

$$\vec{E}_i(M, t) = \vec{E}_{0,i} \cos(\omega_i t - \phi_i(M)) \quad (1)$$

En notation complexe les ondes s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = \underline{\vec{E}}_{0,i} \exp[j(\omega_i t - \phi_i(M))] \quad (2)$$

où les retards de phase au point M s'écrivent :

$$\phi_1(M) = \phi_{10} + \frac{\omega_1}{c}(S_1 M) \text{ et } \phi_2(M) = \phi_{20} + \frac{\omega_2}{c}(S_2 M)$$

Les phases ϕ_{10} et ϕ_{20} sont les phases à l'émission en S_1 et S_2 . Pour des ondes parfaitement monochromatiques, leurs valeurs sont parfaitement définies.

Le champ électrique résultant s'obtient en ajoutant les deux champs électriques. Ceci est possible de part la linéarité des équations de Maxwell :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \sum_i \underline{\vec{E}}_i(M, t) = \underline{\vec{E}}_{0,1} \exp[j(\omega_1 t - \phi_1(M))] + \underline{\vec{E}}_{0,2} \exp[j(\omega_2 t - \phi_2(M))] \quad (3)$$

L'éclairement se déduit de l'amplitude en calculant le double de la valeur moyenne du carré de l'amplitude instantanée soit :

$$\mathcal{E}(M) = 2 \left\langle \|\vec{E}(M, t)\|^2 \right\rangle \quad (4)$$

Avec

$$\begin{aligned} \|\vec{E}(M, t)\|^2 &= (\underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2)(\underline{\vec{E}}_1^* + \underline{\vec{E}}_2^*) = \|\underline{\vec{E}}_1\|^2 + \|\underline{\vec{E}}_2\|^2 + \underline{\vec{E}}_1 \cdot \underline{\vec{E}}_2^* + \underline{\vec{E}}_1^* \cdot \underline{\vec{E}}_2 \\ \implies \|\underline{\vec{E}}(M, t)\|^2 &= \|\underline{\vec{E}}_1\|^2 + \|\underline{\vec{E}}_2\|^2 + 2\text{Re}(\underline{\vec{E}}_1^* \cdot \underline{\vec{E}}_2) \end{aligned}$$

Moyennés, les deux premiers termes donnent les éclairagements $\mathcal{E}_1(M)$ et $\mathcal{E}_2(M)$ de chaque onde, considérées séparément. Quant au troisième terme, il s'explique selon, en gardant la notation réel :

$$2\text{Re}(\underline{\vec{E}}_1^* \cdot \underline{\vec{E}}_2) = 2 \cdot \vec{E}_{0,1} \cos(\omega_1 t - \phi_1(M)) \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\omega_2 t - \phi_2(M))$$

Ainsi on peut en déduire l'éclairement au point M :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + \mathcal{E}_{12}(M) \quad (5)$$

avec $\mathcal{E}_1(M) = 2 \langle \|\vec{E}_1\|^2 \rangle = E_{0,1}^2$ et $\mathcal{E}_2(M) = 2 \langle \|\vec{E}_2\|^2 \rangle = E_{0,2}^2$, sachant que la valeur moyenne du carré d'un cosinus sur une période vaut $1/2$.

Finalement on constate que l'éclairement \mathcal{E} diffère de l'addition $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Le troisième terme de l'expression est appelé terme d'interférences :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2 \langle 2 \vec{E}_{0,1} \cos(\omega_1 t - \phi_1(M)) \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\omega_2 t - \phi_2(M)) \rangle$$

Ce terme peut se réécrire d'une façon différente en utilisant les relations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(M) = 2 \langle \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \phi_1(M) + \phi_2(M)) \rangle + \\ 2 \langle \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \phi_1(M) - \phi_2(M)) \rangle \end{aligned}$$

1.2 Condition d'interférences

Les interférences sont visibles si et seulement si le terme d'interférences est non nul. Dans ce cas, on dit que les deux ondes sont cohérentes, notion que l'on abordera plus tard dans la leçon. Dans le cas contraire on dit qu'elles sont incohérentes.

La durée d'intégration des détecteurs optiques usuels est très largement supérieur à la période des ondes lumineuses visibles (de l'ordre de $2 \cdot 10^{-15}$ s). Pendant la durée de la mesure les termes sinusoïdaux qui figurent dans l'expression de \mathcal{E}_{12} sont moyennés sur un nombre gigantesque de périodes. Or, la moyenne d'un terme type $\cos(\omega t - \phi)$ est nulle, à moins que ω ne soit nul. On en déduit alors que le terme d'interférences \mathcal{E}_{12} est nul si $\omega_1 \neq \omega_2$.

Ainsi, il faut que les vibrations soient isochrones, ce qu'on supposera par la suite :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Le terme d'interférence s'écrit alors dans ces conditions :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2 \langle \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\Delta\phi(M)) + \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(2\omega t - \phi_1(M) - \phi_2(M)) \rangle \quad (6)$$

avec $\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M)$. Ainsi après calcul de la valeur moyenne, il reste :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2 \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\Delta\phi(M)) \quad (7)$$

où le retard de phase s'écrit :

$$\Delta\phi(M) = \frac{\omega}{c} ((S_2M) - (S_1M)) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

avec :

- λ_0 la longueur d'onde de deux sources (identique) ;
- $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$ la différence de marche qui est la différence des chemins optiques ;

Si les deux ondes sont de polarisations orthogonales, c'est à dire que $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0$, alors le terme d'interférences est nul, on a des ondes incohérentes : c'est une autre condition d'interférences.

Enfin, pour éviter d'avoir un terme d'interférences nul, il faut que $\Delta\phi$ ne varie pas aléatoirement au cours du temps. La relation de phase entre les deux ondes doit être bien définie. Expérimentalement, on n'observe pas d'interférence avec deux sources lumineuses indépendantes car elles auraient une pulsation ou fréquence différente. Ainsi il faut pour s'en sortir diviser la lumière provenant d'une unique source pour obtenir deux sources de "cohérence mutuelle parfaite" autrement dit cohérence temporelle.

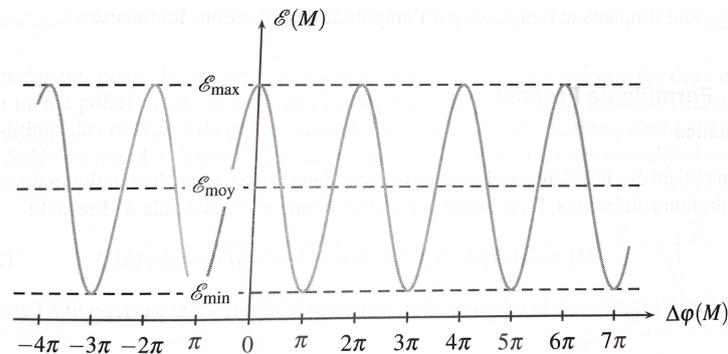
1.3 Phénomène d'interférences

À partir de cette dernière formulation on obtient la formule de Fresnel qui donne l'éclairement induit par les interférences lumineuses entre deux ondes monochromatiques de même pulsation :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \cos(\Delta\phi(M)) \quad (8)$$

Selon le signe de $\cos(\Delta\phi(M))$, l'éclairement résultant est supérieur ou inférieur à la somme des éclairements des ondes. On distingue les deux cas suivants :

- Interférences constructives : elles sont réalisées en un point où $\mathcal{E}(M) > \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$, c'est à dire si $\cos(\Delta\phi(M)) > 0$;
- Interférences destructives : elles sont réalisées en un point où $M < \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$, c'est à dire si $\cos(\Delta\phi(M)) < 0$.



D'autres informations peuvent découler de l'étude de la formule de Fresnel :

- la valeur moyenne \mathcal{E}_{moy} est $\mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$. Ce résultat est conforme à la conservation de l'énergie. Le phénomène d'interférence ne modifie que la distribution spatiale de l'énergie mais ne change pas l'énergie totale ;
- l'éclairement maximal s'obtient pour $\cos(\Delta\phi(M)) = 1$ soit :

$$\Delta\phi(M) = 2m\pi$$

avec m entier relatif. La valeur de l'éclairement maximale est alors : $(\sqrt{\mathcal{E}_1(M)} + \sqrt{\mathcal{E}_2(M)})^2$. Dans ce cas les interférences sont totalement constructives ;

- l'éclairement minimal s'obtient pour $\cos(\Delta\phi(M)) = -1$ soit :

$$\Delta\phi(M) = (2m + 1)\pi$$

avec m entier relatif. La valeur de l'éclairement minimale est alors : $(\sqrt{\mathcal{E}_1(M)} - \sqrt{\mathcal{E}_2(M)})^2$. Dans ce cas les interférences sont totalement destructives.

Rq : Dans le cas où les deux sources ont le même éclairement, qui est un cas fréquent, noté $\mathcal{E}_0(M)$ la formule s'écrit $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(M)(1 + \cos(\Delta\phi(M)))$. Dans ce cas là on observe le comportement paradoxal selon lequel "lumière+lumière=obscurité".

Différence de marche

On l'a rapidement aperçu : la différence des chemins optiques $(S_2M) - (S_1M)$ est appelée différence de marche au point M . On la note $\delta(M)$:

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) \quad (9)$$

La différence de phase qui en découle s'exprime :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0} \quad (10)$$

Ordre d'interférences

On appelle ordre d'interférences le rapport de la différence de phase à 2π :

$$p(M) = \frac{\Delta\phi(M)}{2\pi} \quad (11)$$

L'ordre d'interférences peut être relié à la différence de marche :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \quad (12)$$

L'éclairement est maximal lorsque l'ordre d'interférences est un entier m et minimal lorsque l'ordre d'interférences est un demi-entier $m + 1/2$.

2. Figures d'interférences et dispositif interférentiel : les fentes d'Young

2.1 Figure d'interférences

Champ d'interférences

On appelle champ d'interférences la zone de l'espace éclairée par les deux ondes cohérentes. C'est dans cette zone nécessairement limitée qu'est éventuellement observable le phénomène d'interférences.

Franges d'interférences

L'éclairement varie en fonction de la différence de phase, qui dépend du point M d'observation.

On appelle surfaces brillantes l'ensemble des point M de l'espace où éclairement est maximal, ce qui se traduit par $\Delta\phi(M) = 2m\pi$. Les intersections de ces surfaces avec l'écran d'observation sont les courbes d'éclairement maximal et sont appelées franges d'interférences brillantes, ou plus simplement, franges brillantes.

On appelle surfaces sombres l'ensemble des points M de l'espace où l'éclairement est minimal, ce qui se traduit par $\Delta\phi(M) = (2m + 1)\pi$. Les intersections de ces surfaces

avec l'écran d'observation sont les courbes d'éclairement minimal et sont appelées franges d'interférences sombres, ou plus simplement franges sombres.

Sur l'écran, l'ensemble des franges d'interférences forme la figure d'interférences.

Contraste

On suppose que les éclaircements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont différents au point M . C'est le cas réel des expériences d'optique en laboratoire.

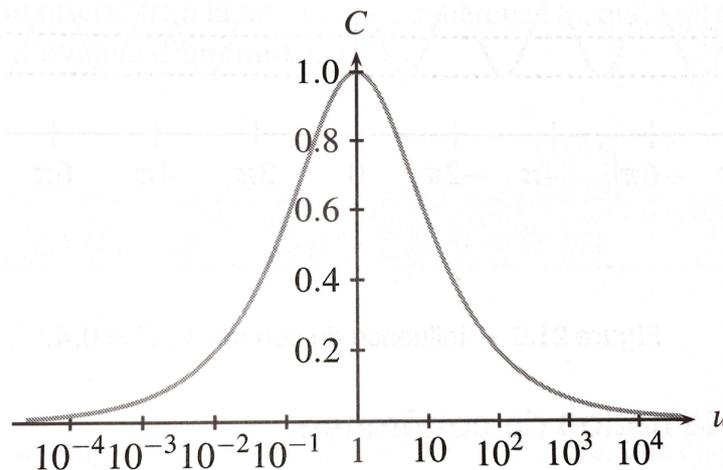
On appelle contraste ou visibilité d'une figure d'interférences la quantité :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} \quad (13)$$

Le contraste est une grande sans dimension qui, par construction, varie entre 0 et 1. En utilisant les cas limites de formule de Fresnel on obtient :

$$C = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \quad (14)$$

On peut analyser plus en détail cette relation en posant $u = \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$, ce qui revient à écrire $C = 2\sqrt{u}/(1 + u)$.



Ainsi grâce à la figure on voit que le contraste est maximum pour $u = 1$, c'est à dire pour $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.

En utilisant la formulation du contraste on peut réécrire la formule de Fresnel :

$$\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)(1 + C \cos(\Delta\phi(M))) \quad (15)$$

Ainsi plus la valeur du contraste est faible plus l'amplitude de l'éclairement en fonction de $\Delta\phi(M)$ se réduit.

2.2 Les fentes d'Young

Soit le dispositif interférentiel suivant :

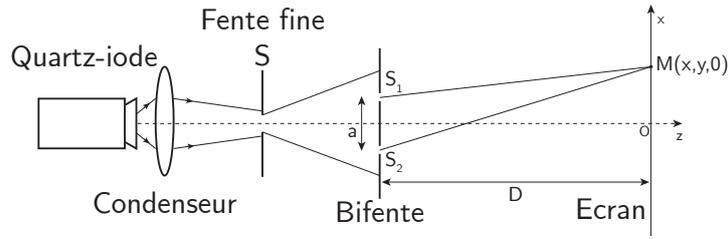
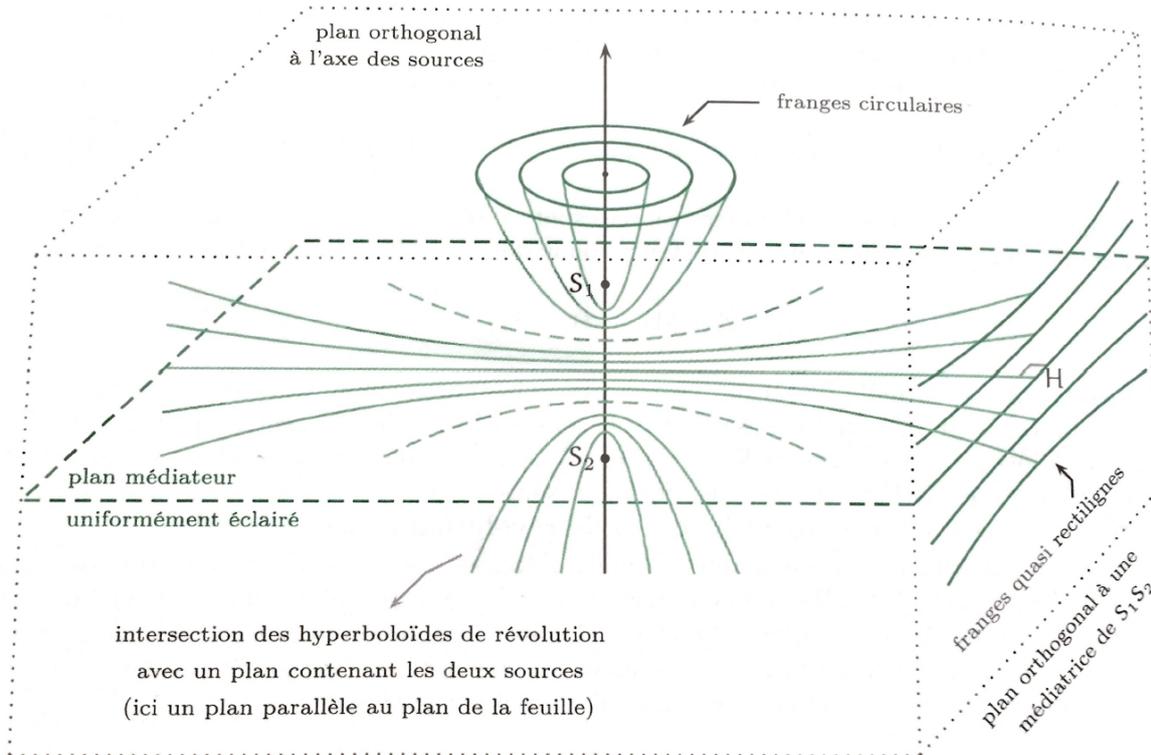


FIGURE 1 – *Dispositif expérimental*

Le champ d'interférences correspond à tout le volume de l'espace où les ondes diffractées par les deux trous se recouvrent. Expérimentalement, on constate que les franges d'interférences sont visibles sur l'écran d'observation quelle que soit sa position au-delà des deux fentes S_1 et S_2 . On dit que les interférences sont non localisées. Cette propriété est propre aux dispositifs interférentiels fonctionnant par division du front d'onde. Les surfaces d'éclairement maximal sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe des sources :



Dans ce cas précis on peut calculer les différents paramètres présentés dans la première partie :

Différence de marche

Soit la différence de marche définie comme étant $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$. On connaît les coordonnées des différents éléments : $S_1(a/2, 0, -D)$, $S_2(-a/2, 0, -D)$ et $M(x, y, 0)$. Alors la distance (S_1M) s'écrit :

$$(S_1M) = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2}$$

Les conditions expérimentales sont telles que, d'une part, l'observation se fait à grande distance c'est à dire que $a \ll D$ et d'autre part l'observation se fait au voisinage du point O c'est à dire que $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$. Compte tenu de ces hypothèses on peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 :

$$(S_1M) \simeq D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right] = D + \frac{D}{2} \left[\left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{a}{2D} \right)^2 \right] - \frac{ax}{2D}$$

De même pour (S_2M) :

$$(S_2M) \simeq D + \frac{D}{2} \left[\left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{a}{2D} \right)^2 \right] + \frac{ax}{2D}$$

En notant n l'indice du milieu de propagation (ici l'air $n = 1$) il vient :

$$\delta(M) = \frac{nax}{D} \quad (16)$$

Différence de phase

La différence se déduit immédiatement :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} \quad (17)$$

Ordre d'interférence

L'ordre d'interférence s'exprime :

$$p(M) = \frac{nax}{\lambda_0 D} \quad (18)$$

En supposant les deux sources de même intensité, la formule des interférences conduit à un éclairement :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} \right) \right) \quad (19)$$

On remarque que l'éclairement ne dépend que de x : on observe sur l'écran des franges rectilignes, alternativement sombres et brillantes.

L'éclairement présente une période spatiale qu'on nomme interfrange. Chaque frange brillante est repérée par une valeur entière de l'ordre d'interférence. À partir de l'équation (18), on obtient les positions des franges brillantes :

$$x_p = p \frac{\lambda_0 D}{na}, \text{ avec } p \text{ entier}$$

La distance entre deux franges brillantes consécutives donne l'interfrange i :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 D}{na} \quad (20)$$

L'éclairement peut ainsi s'exprimer en fonction de i :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right) \quad (21)$$

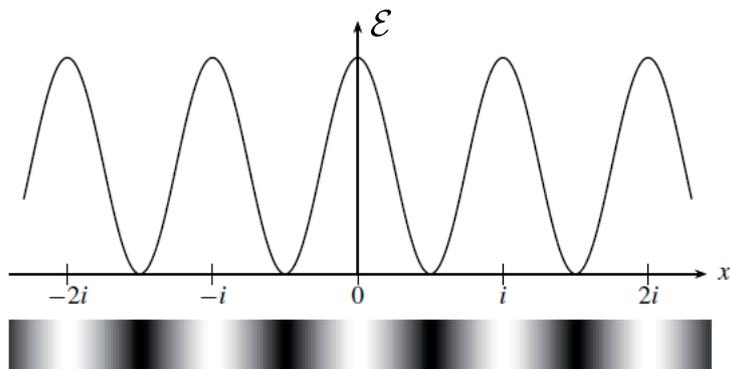


FIGURE 2 – Éclairement en fonction de l'interfrange i

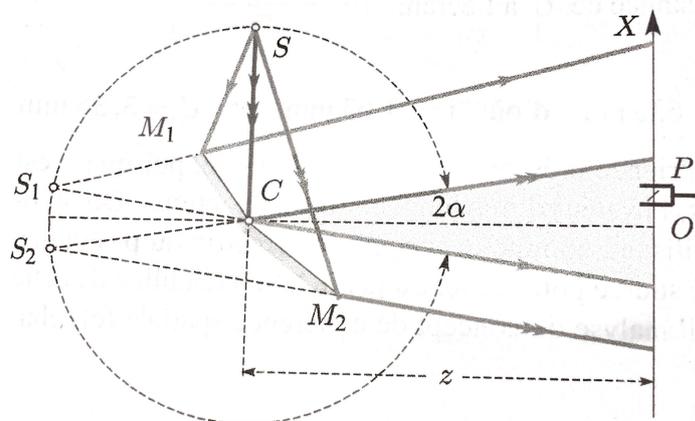
Ainsi on peut avec de dispositif et des moyens simples, remonter à la valeur de λ_0 dans le cas où un utilise un laser monochromatique de longueur d'onde inconnue, on peut également mesurer la largeur de la tache centrale de diffraction et l'interfrange d'interférence que l'on peut comparer avec les valeurs théoriques. Attention à ne pas confondre les deux types de franges !

Rq : Pour le calcul de la diffraction dans le cas des fentes d'Young voir p.842 Cap prépa PC ou p.291 Perez.

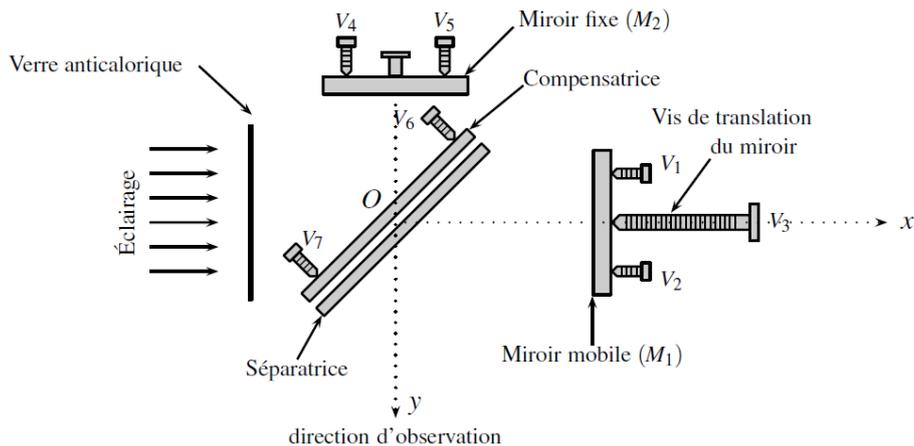
2.3 Autres dispositifs

Il existe d'autres types d'interféromètres :

- **les systèmes interférentiels à division du front d'onde** comme c'est le cas pour les fentes d'Young : un front d'onde primaire est divisé en deux faisceaux spatialement différents qui suivent des chemins différents avant d'être recombinaés et produire des interférences. Il y a par exemple les miroirs de Fresnel où une source ponctuelle S éclaire deux miroirs plans qui font entre eux un angle α de quelques minutes. Les rayons réfléchis qui semblent provenir des images respectives S_1 et S_2 se rencontrent et les ondes qu'ils véhiculent s'interfèrent.



- **les systèmes interférentiels à division d'amplitude** : un front d'onde primaire est divisé en deux faisceaux spatialement identiques qui suivent des chemins différents avant d'être recombinaés et produire des interférences. C'est le cas de l'interféromètre de Michelson que vous verrez dans une prochaine leçon.



3. Notion de cohérence

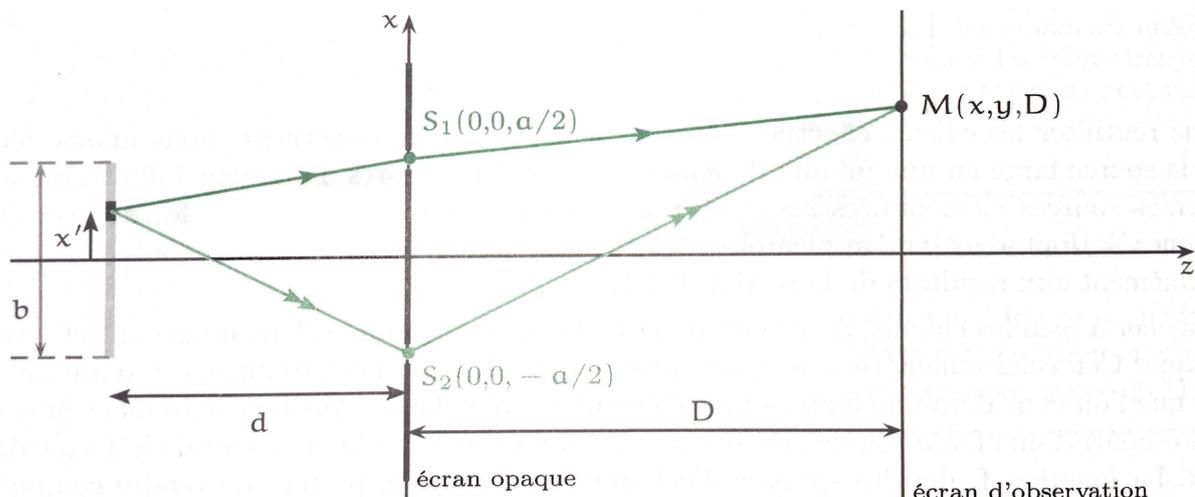
Le terme "cohérence" a pour le moment été employé afin de distinguer deux ondes qui pouvaient permettre l'observation d'interférences par opposition à des ondes dont le déphasage varie aléatoirement dans le temps.

Par la suite, la notion de cohérence restera liée à la possibilité d'observer ces phénomènes d'interférences. Nous allons distinguer deux causes qui limitent la visibilité du phénomène :

- **la cohérence spatiale** : une multitude de sources primaires réparties dans l'espace peuvent donner lieu à une superposition "anarchique" de systèmes de franges conduisant au brouillage de la figure d'interférence ;
- **la cohérence temporelle** : une source primaire constituée d'une multitude de radiation harmoniques (source non monochromatique) peut conduire au brouillage.

3.1 Cohérence temporelle

Jusqu'ici on considérait des sources ponctuelles dont nous caractérisions l'intensité par l'éclairement. Nous allons maintenant tenir compte de la largeur de la fente source S , pour le cas des fentes d'Young en prenant b la largeur de la fente source :



Nous supposons que les différents éléments de la source S sont incohérents entre eux, de sorte que les intensités correspondantes s'ajoutent dans le plan de l'écran. Isolons alors une bande de la source comprise entre les abscisses x' et $x' + dx'$. De cette

bande au point M , la différence de marche se calcule comme dans le cas des fentes d'Young en supposant $b \ll d$ et $|x| \ll D$:

$$\delta = \frac{ax'}{d} + \frac{ax}{D}$$

et l'intensité correspondante, que nous supposons proportionnelle à la largeur dx' de la bande est :

$$d\mathcal{E}(M) = A \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) dx' = A \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \left[\frac{x'}{d} + \frac{x}{D} \right] \right) \right) dx'$$

avec A une constante. En intégrant de $-b/2$ à $b/2$:

$$\mathcal{E}(M) = A \left(b + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a} \left[\sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{x}{D} + \frac{b}{2d} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{x}{D} - \frac{b}{2d} \right) \right) \right] \right)$$

soit en utilisant les relations trigonométriques :

$$\mathcal{E}(M) = Ab \left(1 + \frac{\lambda_0 d}{\pi ab} \sin \left(\frac{\pi ab}{\lambda_0 d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

Posons $Ab = \mathcal{E}_0$ et $u = \pi ab/(\lambda_0 d)$:

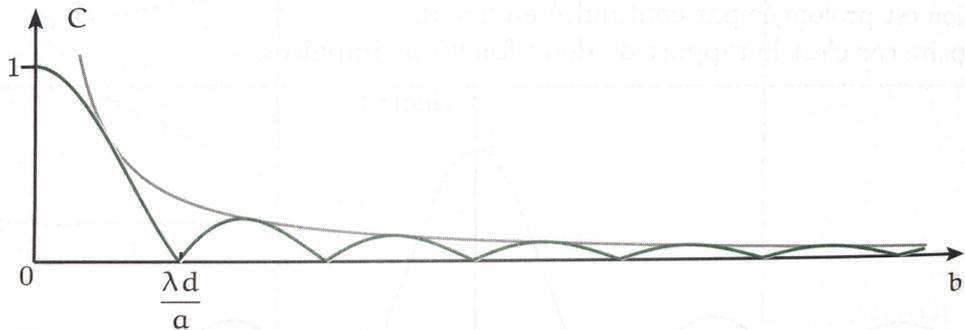
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left(1 + \sin c(u) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) \quad (22)$$

À partir de cette relation on trouve que le contraste s'exprime ainsi :

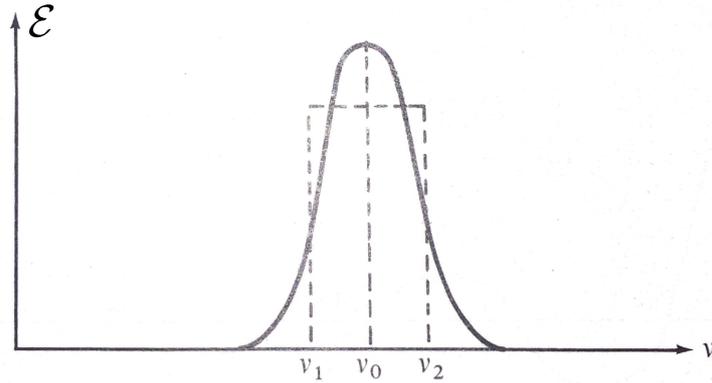
$$C = \frac{\sin(u)}{u}, \text{ avec } u = \frac{\pi ab}{\lambda_0 d}$$

Ainsi le contraste diminue quand b augmente. On appellera longueur de cohérence spatiale ℓ_s la plus petite valeur b (largeur de la source) qui annule le contraste. La première annulation est obtenue lorsque le sinus cardinal est égale à π ce qui donne :

$$\frac{\pi a \ell_s}{\lambda_0 d} = \pi \implies \ell_s = \frac{\lambda_0 d}{a} \quad (23)$$



3.2 Cohérence spatiale



Une source n'est jamais parfaitement monochromatique ; même pour un spectre de raies, chaque raie spectrale de fréquence ν_0 possède en fait une certaine largeur $\Delta\nu$. Physiquement, cet élargissement des raies spectrales est dû à plusieurs causes. L'une d'elles est l'effet Doppler : la lumière est émise par des atomes en état d'agitation thermique et cette agitation agit sur la fréquence perçue par un observateur dans le référentiel "fixe" du laboratoire. Par ailleurs d'autre effet, assez subtil mais fondamental, limite toujours la finesse des raies : c'est la durée finie du train d'onde émis par un atome.

On montre en effet, dans la théorie de la transformation de Fourier, que le spectre en fréquence d'une radiation émise pendant un laps de temps τ , s'étale sur une bande $\Delta\nu$ dont l'ordre de grandeur est :

$$\Delta\nu \sim 1/\tau$$

Signalons de plus que durant son émission, la phase d'un train d'onde peut être modifiée aléatoirement par les collisions que subit l'atome dans l'état excité. Ce phénomène élargit aussi la raie spectrale.

Reprenons notre montage initial sur les fentes d'Young. On suppose la source S très fine et émet une raie de largeur $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$. Pour nous simplifier les calculs, on supposera que le profil de la raie est rectangulaire : par hypothèse, la raie émet de l'énergie seulement entre ν_1 et ν_2 et pour une bande de largeur $d\nu$, l'énergie est proportionnelle à $d\nu$.

Pour cet intervalle, on peut appliquer la formule de Fresnel :

$$d\mathcal{E}(M) = A \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) d\nu, \text{ avec } \nu = c/\lambda_0$$

où A est une constante de proportionnalité, nous obtenons alors :

$$d\mathcal{E}(M) = A \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{cD} \nu \right) \right) d\nu$$

Soit en intégrant de ν_1 à ν_2 :

$$d\mathcal{E}(M) = A(\nu_2 - \nu_1) \left(1 + \frac{cD}{2\pi ax(\nu_2 - \nu_1)} \left[\sin \left(\frac{2\pi ax}{cD} \nu_2 \right) - \sin \left(\frac{2\pi ax}{cD} \nu_1 \right) \right] \right)$$

ou encore :

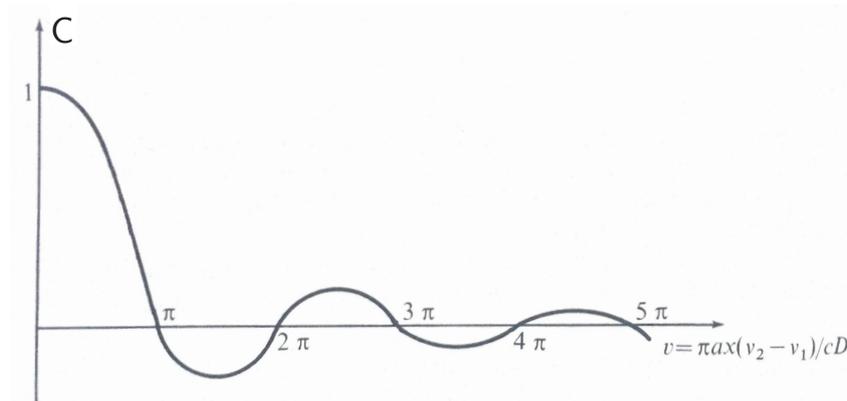
$$d\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{\sin(v)}{v} \cos \left(\frac{2\pi a}{cD} \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) x \right) \right], \text{ avec } v = \frac{\pi ax(\nu_2 - \nu_1)}{cD}$$

On peut introduire la fréquence moyenne $\nu_m = (\nu_1 + \nu_2)/2$ et la longueur d'onde moyenne $\lambda_m = c/\nu_m$:

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{\sin(v)}{v} \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_m c D} \right) \right] \quad (24)$$

De la même façon que toute à l'heure le contraste est donnée par :

$$C = \frac{\sin(v)}{v}, \text{ avec } v = \frac{\pi ax(\nu_2 - \nu_1)}{cD}$$



L'interprétation de cette courbe, qui permet de préciser quantitativement la notion de cohérence temporelle, est un peu plus délicate que celle du paragraphe précédent. En voyant la courbe, on remarque que l'on obtient un bon contraste si $\nu < \pi$. Soit si :

$$\frac{\pi ax(\nu_2 - \nu_1)}{cD} < \pi \text{ ou encore } ax/D < c/(\nu_2 - \nu_1)$$

Or ax/D représente la différence de marche δ entre les deux rayons qui viennent interférer au point M d'abscisse x , alors :

$$\delta < c/(\nu_2 - \nu_1)$$

On ne peut obtenir d'interférences bien contrastées que si δ est inférieure à une certaine quantité. Pour interpréter physiquement ce dernier résultat, rappelons que $\Delta\nu \sim 1/\tau$. τ est appelé durée de cohérence de la raie ; c représente la vitesse de propagation de la lumière, $c\tau$ est la longueur de cohérence de la lumière émise. La condition $\delta < c/(\nu_2 - \nu_1)$ s'écrit donc :

$$\delta < c\tau = L$$

Dans le cas où la raie optique est émise dans élargissement "Doppler" ou collisionnel, τ est égale à τ_R , durée moyenne des trains d'onde émis par chaque atome. La condition de cohérence temporelle s'interprète alors facilement : la différence de marche doit être inférieure à L longueur du train d'onde émis. Si ce n'est pas le cas ce sont des ondes appartenant à des trains d'onde différentes qui interféreraient en M . Or d'un train d'onde à l'autre, la phase varie de façon aléatoire ; les phénomènes d'interférences de brouilleraient donc.

Rq : La figure peut donner quelques inquiétudes : on observe en effet une réapparition du contraste (avec inversion) pour $v > \pi$ alors que la notion de train d'onde laisse prévoir qu'on ne peut observer de phénomènes d'interférences pour $\delta > L$. C'est ce seconde résultat qui est exact ; en effet, la courbe de la figure n'est qu'approximative : elle est tributaire du fait que nous avons assimilé le "profil" de la raie à un rectangle ; c'est cette approximation qui provoque cette apparition du contraste.

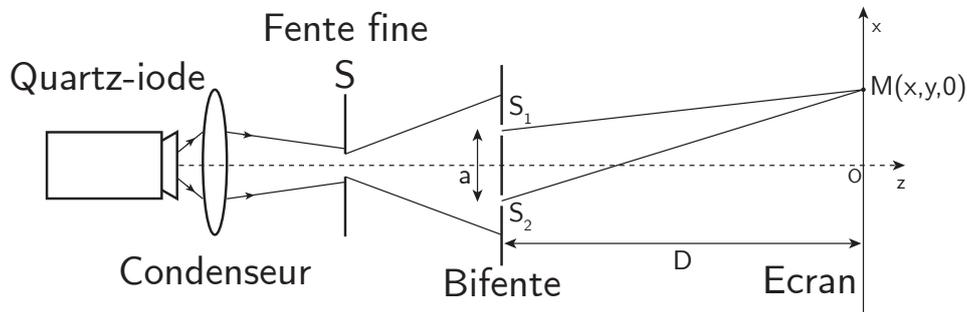
Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon l'aspect ondulatoire de la lumière et sa complexité. Notre œil (capteur optique) est sensible à la moyenne temporelle du module au carré du champ électrique. On a pu voir que finalement des critères devaient être respectés pour avoir interférences : les ondes doivent être cohérentes entre elles. On a pu voir que la cohérence spatiale et temporelle ajoute une limite sur l'étendue de la source et la différence de marche.

Toute fois, on a vu que les systèmes interférentiels pouvait être des outils de mesures efficaces et précis. On a vu les interférences entre deux ondes... dans une prochaine leçon vous verrez comment se caractérise des interférences entre N ondes mais aussi comment fonctionne les interféromètres à division d'amplitude.

Manip : Fentes d'Young

Voir page 186 du Bellier et page 161 du Sextant.



On peut utiliser dans un premier temps une lumière blanche pour montrer qualitativement le principe et les phénomènes. Ensuite pour des mesures qualitative on prend un laser monochromatique.

Dans un premier temps il faut mesurer la distance D séparant les fentes d'Young et l'écran.

Puis on mesure la distance entre n franges sachant que :

$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad (25)$$

avec a la taille des fentes. On peut ainsi retrouver la longueur d'onde du laser, avec une erreur :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2} \quad (26)$$

On peut ensuite montrer la notion de cohérence spatiale. Pour cela on change la largeur de la fente fine S pour voir la variation du contraste et calculer la longueur de cohérence spatiale en utilisant un diaphragme pour S gradué :

$$\ell_s = \frac{\lambda_0 d}{a} \quad (27)$$

où d est la distance entre S et les fentes d'Young. On vérifie expérimentalement la valeur avec la valeur théorique. Pour mesurer on choisi une ouverture pour laquelle le contraste est maximale on ferme ensuite le diaphragme jusqu'à ce que le contraste soit nul et on regarde la graduation parcourue pour avoir l'ouverture de la fente S .

On peut aussi déterminer la taille de fente inconnue mais en connaissant la valeur de la longueur d'onde du laser en utilisant la largeur d'interfrange i .

Rq : Pour la manip en lumière blanche p190 du Bellier.