

L.P. 02 - Gravitation

Benjamin Marchetti

Niveau : 1er année CPGE

Pré-requis

- Mécanique du point
- Moment cinétique
- Énergie

Bibliographie

- Expériences de Phys. (Mécanique), Bellier, *Dunod*
- H-prépa Mécanique MPSI, Brébec, *Hachette*
- Tout en un MPSI, Sanz, *Dunod*

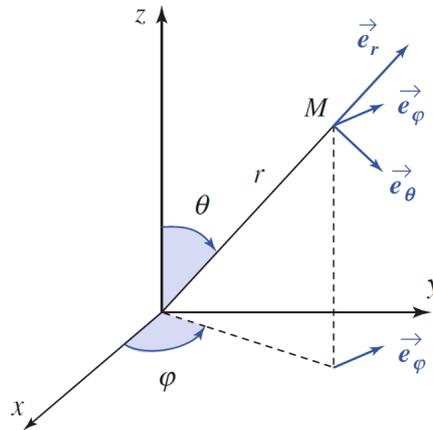
Introduction

Dans cette leçon nous allons aborder la gravitation. De nos jours on semble avoir compris cette notion qui fut jadis très compliqué à faire comprendre. Cette notion fait apparaître la force gravitationnelle, force variant en $1/r^2$. Cette force centrale conservative sera décrite dans cette leçon au cours de laquelle on s'attardera sur la trajectoire que peut avoir un objet soumis à la gravitation.

Kepler énonça, entre 1604 et 1618, trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes. Ces lois sont le résultat d'une étude systématique des observations accumulées par l'astronome danois Tycho Brahé et de celles qu'il réalisa lui-même sur le mouvement de la planète Mars. C'est à partir de ces lois expérimentales que Newton édifia sa mécanique et sa théorie de la gravitation en 1687. La notion de force de gravitation, qui agit instantanément à distance sans nécessiter de support matériel pour sa transmission, a provoqué beaucoup de réticences de la part de certains de ses contemporains. Newton qui était parfaitement conscient de cette difficulté conceptuelle, a pu écrire, qu'à priori, " voilà qui me paraît d'une si grand absurdité que nulle personne ayant quelque capacité de raisonnement philosophique ne pourra jamais ce me semble y ajouter crédit ". L'expérience a donné à la théorie le crédit que lui contestait ses contradicteurs, mais le problème conceptuel soulevé par ces derniers n'était, certes, pas sans objet.

1. Force centrale conservative

1.1 Définition



Un champ de forces centrales de centre O vérifie : $\vec{F} = F\vec{e}_r$; le support de la force \vec{F} passe par le point fixe O .

Il est conservatif s'il est possible de lui associer une énergie potentielle $E(\vec{r})$, de sorte que lors d'un déplacement élémentaire le travail élémentaire de la force \vec{F} s'écrive : $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$.

Sachant que le déplacement élémentaire est de la forme :

$$d(\vec{OM}) = d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r$$

Le vecteur \vec{e}_r a une norme constante (unité), de sorte que : $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$. Le travail élémentaire de la force centrale est donc nul pour tout déplacement perpendiculaire à \vec{e}_r , qui garde constante la distance r au point fixe O constante en faisant varier la direction repérée par les angles θ et ϕ des coordonnées sphériques. Nous en déduisons que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance r au centre de force, pas de la direction :

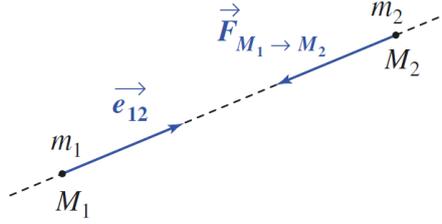
$$E_p(\vec{r}) = E_p(r, \theta, \phi) = E_p(r)$$

Utilisant alors $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr$, nous pouvons affirmer qu'un champ de force centrale conservative est de la forme $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$ avec $F(r) = -\frac{E_p(r)}{dr}$ désignant l'énergie potentielle (définie à une constante près) associée à ce champ de force.

La force est attractive lorsqu'elle est dirigée vers O , soit : $F(r) < 0$. L'énergie potentielle est alors une fonction croissante de la distance r au centre de la force O . Elle est au contraire répulsive si $F(r) > 0$, donc lorsque l'énergie potentielle est une fonction décroissante de la distance.

1.2 Interaction gravitationnelle

MANIP : Faire une manip qualitative si possible avec Bellier page 254.

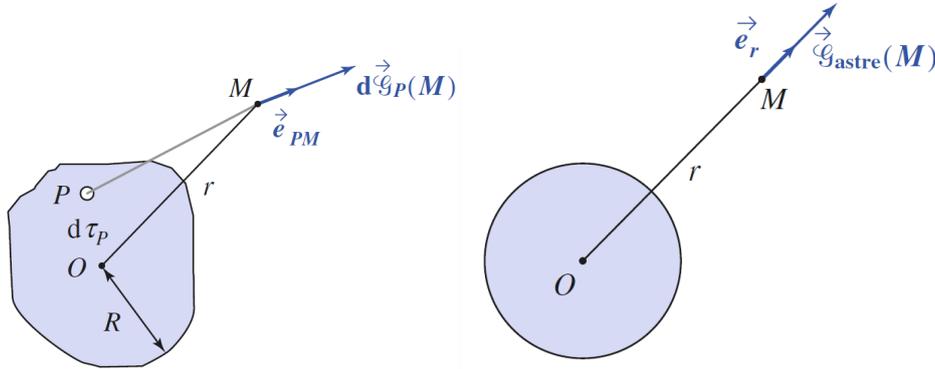


Deux points matériels M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2 et distants de r , exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force de gravitation, telle que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (1)$$

avec $G = 6,672 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ est une constante universelle. \vec{e}_{12} est le vecteur unitaire de l'axe $M_1 M_2$ orienté de M_1 vers M_2 . Cette loi, dite de gravitation universelle, a été formulée par Newton pour expliquer les orbites planétaires. La masse pesante qui intervient dans l'expression de la force de gravitation est identique à la masse inerte de la relation fondamentale de la dynamique. IL s'agit là d'un postulat supplémentaire, dont la validité est confirmée par toutes les expériences.

Champ de gravitation d'un astre



Le champ de gravitation créé par un ensemble de points matériels, $P_i (i = 1, \dots, N)$ de masse m_i est, au point M , la superposition des champs de gravitation créés par chacun des points P_i :

$$\vec{G}(M) = \sum_{i=1}^N -G m_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Le champ de gravitation engendré par un corps est la superposition des champs de gravitation engendrés par les éléments qui le composent. En notant P le point courant décrivant l'astre, et en découpant le corps en volumes élémentaires $d\tau_p$, de masse $dm = \rho(P) d\tau_p$, où ρ est la masse volumique de l'élément considéré, nous avons :

$$\vec{G}(M) = \int \int \int_{\text{astre}} -G \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau_p$$

Son expression est en générale délicate à établir, mais nous pourrions en pratique nous contenter d'en utiliser une expression dans les cas suivants :

- L'astre possède une symétrie de révolution : $\rho(P) = \rho(r_p)$ et R son rayon ,alors la masse totale de l'astre s'écrit :

$$M_{\text{astre}} = \int \int \int \rho(P) d\tau_p = \int_{r_p=0}^R \rho(r_p) 4\pi r_p^2 dr_p$$

En dehors de l'astre ($r > R$), le champ de gravitation prend la forme :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{OM}}{OM^3} = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

- L'astre est à grande distance : $r \gg R$ et on a :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Cette expression est exacte dans le cas d'un astre à symétrie sphérique, et constitue une bonne approximation du champ de gravitation si l'astre est quasi sphérique ou bien à distance r suffisamment grande par rapport à la dimension caractéristique R d'un astre peu régulier.

Pesanteur terrestre

MANIP : Faire la manip de la mesure de g : Bellier page 258. Faire les mesures avant présenter le graphe et montrer la manip. Discuter des incertitudes !

Au voisinage de la surface terrestre, un objet de masse m est soumis à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

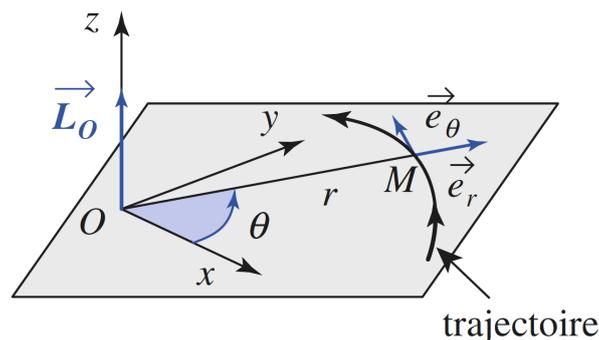
En première approximation, le poids est égal à la force de gravitation exercée par la Terre. Cette force est quasiment uniforme dans un domaine dont les dimensions sont petites par rapport au rayon terrestre R_T . D'où :

$$\vec{g} \approx -G \frac{m_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$

Il est bien entendu impossible d'assimiler la norme du champ de gravitation à une constante pour étudier le mouvement des satellites : l'altitude d'un satellite terrestre géostationnaire est de l'ordre de 36000 km, non négligeable par rapport au rayon terrestre $R_T = 6400km$.

2. Mouvement à force centrale

2.1 Description du mouvement



Nous savons que lors d'un mouvement où il est soumis à un champ de force centrale, de centre O fixe, dans un référentiel galiléen, la trajectoire d'un point matériel est en général dans un plan (passant par O et perpendiculaire au moment cinétique constant $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$).

Pour repérer le mouvement du point matériel dans ce plan, il nous suffit de deux coordonnées. La force étant constamment radiale, nous ferons le choix des coordonnées polaires (r, θ) de centre O :

$$\vec{OM}(t) = r \vec{e}_r \text{ et } \vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

Les vitesses et accélérations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, projetant sur les deux vecteurs de la base locale, nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \text{equation radiale} & \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{dE_p(r)}{dr} \\ \text{equation orthoradiale} & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On a un système d'équation différentielles couplées d'ordre 2 en $r(t)$ et $\theta(t)$.

2.2 Lois de conservation

Conservation du moment cinétique

D'après les équations précédentes on remarque que $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$, nous voyons que la projection orthoradiale de la relation fondamentale de la dynamique nous permet de retrouver la loi des aires :

$$r^2\dot{\theta} = cste = C$$

où C est la constante des aires. Nous savons que celle-ci traduit la conservation du moment cinétique du point matériel au point O fixe.

Connaissant C on peut ramener le système d'équation à :

$$\begin{cases} \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{dE_p(r)}{dr} \\ \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \end{cases}$$

Le problème se réduit à une équation différentielle d'ordre 2 en $r(t)$, mais elle n'est toujours pas linéaire.

On appelle vitesse aréolaire \mathcal{V} la vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire définie par la trajectoire dans le plan du mouvement :

$$\mathcal{V} = \frac{dA}{dt} = \frac{r(rd\theta)}{2dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$$

qui est donc une constante.

Conservation de l'énergie

Analysons le second membre de l'équation du mouvement. Nous pouvons l'intégrer par rapport à la variable r pour faire apparaître l'énergie potentielle :

$$\ddot{r} - C^2 \frac{\dot{r}}{r^3} = -\frac{1}{m} \frac{dr}{dt} \frac{dE_p(r)}{dr}$$

où encore :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{m} E_p(r) \right) \\ \implies \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + E_p &= cste \end{aligned}$$

On a la traduction de la conservation de l'énergie mécanique E_m du mobile, la force radiale étant conservative :

$$Cste = E_m = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + E_p$$

La vitesse radiale peut être extraite de cette expression :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{E_m - \frac{mC^2}{2r^2} - E_p(r)}$$

Ainsi on a réussi à faire apparaître une équation différentielle d'ordre un, qui peut se résoudre en utilisant la méthode de résolution d'Euler. Le choix du signe dépend des conditions antérieures du mouvement.

Dans cette expression on peut faire apparaître l'énergie potentielle effective du mouvement :

$$E_{p_{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$$

Rq : Le terme $(1/2)m\dot{r}^2$ est par nature positif ou nul. Le domaine des valeurs de r accessibles au mouvement est donc restreint aux valeurs telles que :

$$E_{p_{eff}}(r) \leq E_m$$

Lorsque l'égalité survient, \dot{r} s'annule : la distance au centre de force O atteint une valeur extrême, qui peut être minimum ou maximum.

2.3 Cas de quelques mouvements

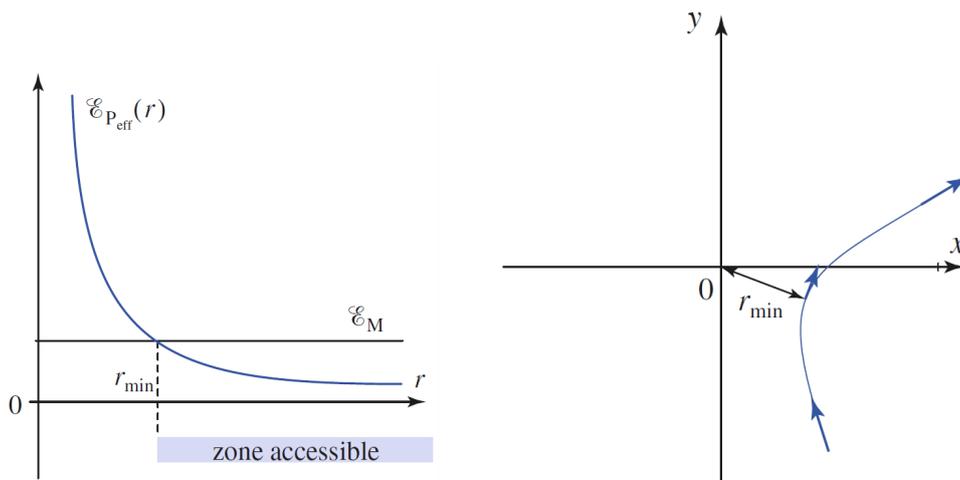
Considérons une énergie potentielle d'expression simple :

$$E_p(r) = -\frac{K}{r^n}, \text{ soit } F(r) = -\frac{nK}{r^{n+1}}$$

Le champ de forces est attracteur si nK est positif, répulsif le cas échéant. On a $E_{p_{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r^n}$.

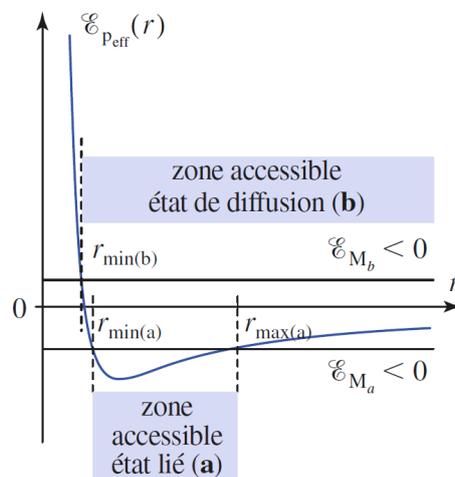
Rq : Oscillateur harmonique isotrope $n = -2$ et $K < 0$, $E_p = |K|r^2$. Champs newtonien $n = 1$, attractif pour $K > 0$, répulsif sinon.

Champ répulsif



La fonction d'énergie potentielle est décroissante suivant r . E_{peff} est donc strictement décroissante de la distance au centre de force, qui diverge en $r = 0$. On voit apparaître un minimum r_{min} qui peut être atteint si le point matériel se dirige initialement vers les r décroissants. On est dans un état de diffusion : le point matériel finissant toujours par s'éloigner indéfiniment du centre O .

Champ attractif



On va se restreindre uniquement au cas où $0 < n < 2$ et $K > 0$. Dans ce cas E_{peff} diverge vers $+\infty$ en $r \rightarrow 0$ où le terme cinétique l'emporte. En revanche, elle vers 0 par valeurs négatives pour $r \rightarrow \infty$ faisant apparaître une courbe en cuvette. Nous pouvons alors observer un état lié si $E_m < 0$ ou un état de diffusion si $E_m > 0$. On a un minimum en $r = -mC^2/K$.

Champ répulsif

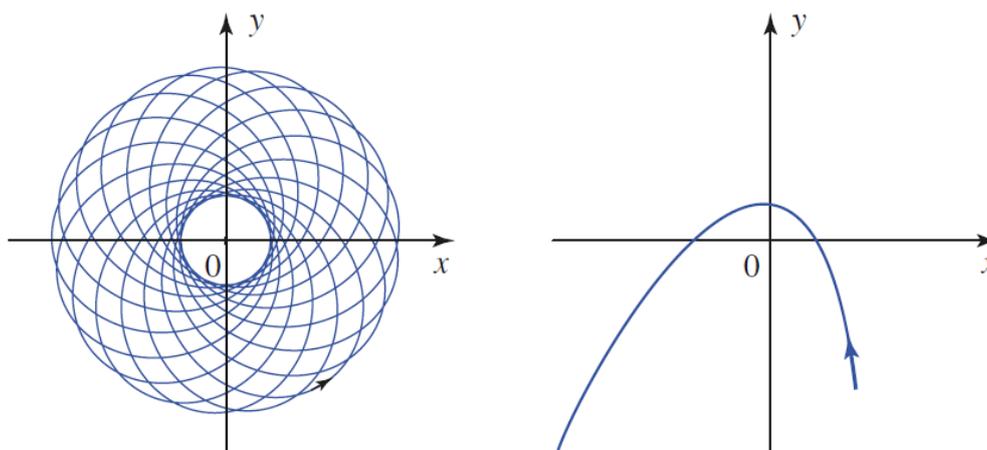


FIGURE 1 – État lié et état de diffusion.

3. Mouvement dans un champ newtonien

3.1 Le problème de Kepler

Un mouvement est dit keplerien lorsqu'il s'effectue sous l'action d'une force centrale en $1/r^2$, de centre de force fixe dans le référentiel galiléen d'étude, c'est à dire dans un champ de force newtonien. Le cas des champs newtoniens est évidemment important : il correspond à l'interaction gravitationnelle (entre corps à géométrie sphérique, en tout rigueur). Leur étude nous permettra donc de comprendre, par exemple, le mouvement des planètes gravitant autour du Soleil.

Le problème de Kepler concerne plus généralement toute une série de problème physiques, tant à l'échelle microscopique (interaction entre particules chargées), qu'à l'échelle macroscopique (interaction entre planète et satellite).

Kepler énonça 3 lois expérimentales sur le mouvement des planètes. Ces lois sont le résultat d'une étude systématique des observation accumulées par l'astronome danois Tycho Brahé, et celles effectuées par Kepler en observant le mouvement de la planète Mars :

- 1er loi (1605) : chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le Soleil est un foyer ;
- 2eme loi (1604) : l'aire balayée par le rayon Soleil-planète est une proportionnelle au temps mis pour la décrire. C'est la loi des aires ;
- 3eme loi (1618) : le carré du temps de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse qu'elle décrit. Notant T la période de révolution et a le demi-grand axe, le rapport T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes gravitant autour du Soleil.

3.2 Cas des satellites

On va supposer un satellite de masse m évoluant dans le champs de gravitation d'un astre de masse M . Soit $\alpha = GmM > 0$, car la force est attractive. On supposera l'action d'autres astres négligeables (effet des marées) et on supposeras $m \ll M$.

Les satellites restent par définition au voisinage de l'astre auprès duquel ils gravitent. Considérons l'énergie du point matériel, qui est ici une constante du mouvement (car $F(r) = dE_p/dr$) :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} = cste$$

Si on pose $r = \infty$ on a $E_m = (1/2)m\dot{r}^2$. Ce cas n'a de sens que si l'énergie est positive. Les satellites correspondent à des mobiles en état lié évoluant dans le champ de gravitation attractif, de l'astre autour duquel ils gravitent : leur énergie est négative.

Calculons la vitesse v_c qu'il faut communiquer à un satellite pour que sa trajectoire soit un cercle de rayon r_c . L'accélération s'écrit pour ce cercle s'écrit :

$$\vec{a} = -\frac{v_c^2}{r_c} \vec{e}_r$$

qui s'identifie à $\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\alpha}{m r_c^2} \vec{e}_r$

où M est la masse de l'astre. On en déduit alors la vitesse :

$$v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{mr_c}} = \sqrt{\frac{GM}{r_c}} \quad (2)$$

On peut calculer la première vitesse cosmique, qui est la vitesse en orbite circulaire basse : pour $r_c = R_T = 6370km$ et $g = 9,81m.s^{-2}$ on a $v_1 = \sqrt{gR_T} = 7,92km.s^{-1}$.

On en déduit alors l'énergie associé à une trajectoire circulaire de rayon r_c :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{GMm}{r_c} = -\frac{\alpha}{2r_c} < 0$$

Le satellite pourrait totalement échapper à l'attraction terrestre si son énergie devenait juste nulle : la distance r peut devenir infinie. La vitesse nécessaire v_2 est donnée par $E_m = 0 \implies v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11,2km.s^{-1}$.

Ainsi la période de révolution du satellite en orbite circulaire est :

$$T = \frac{2\pi r_c}{v_c} = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM}} \quad (3)$$

On retrouve la 3eme loi de Kepler !

3.3 Représentation du mouvement

Nous savons que le moment cinétique est une constante du mouvement qui a lieu dans un plan. Nous repérons encore la position du mobile à l'aide des coordonnées polaire. La loi des aires est une conséquence de cette loi de conservation.

Énergie

La force dérive d'une énergie potentielle, dont nous prenons l'origine à l'infini :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2} \text{ et } E_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

La conservation de l'énergie est traduite par :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p_{eff}} = cste$$

avec $E_{p_{eff}} = mC^2/(2r^2) - \alpha/r$.

Vecteur de Runge-Lenz

Soit l'équation du mouvement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Le moment cinétique, constant, est :

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \wedge \vec{v} = mr \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

En multipliant vectoriellement l'équation du mouvement par \vec{L}_O , nous avons :

$$\vec{L}_O \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \left(-\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = -\alpha m \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Le rayon r a disparu dans le second membre : du fait que le champ soit newtonien. D'autre part, comme le moment cinétique est constant :

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O \wedge \vec{v}) = \vec{L}_O \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r \right) = \vec{0}$$

ce qui nous montre que le vecteur de Runge-Lenz, défini par :

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r \quad (4)$$

est une constante du mouvement.

Ce vecteur est par construction dans le plan de la trajectoire. On peut l'explicitier :

$$\vec{A} = \frac{(r \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) \wedge mC \vec{e}_z}{\alpha} - \vec{e}_r = \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1 \right) \vec{e}_r - \frac{mC}{\alpha} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

On a de plus $\vec{A} \cdot \vec{r} = mC^2/\alpha - r$.

Convenons de prendre sa direction comme origine des angles : l'axe polaire (O, \vec{e}_x) est colinéaire et dirigé dans le même sens que \vec{A} , dont la norme est $e = \|\vec{A}\|$. On a alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \|\vec{A}\| r \cos(\theta) = er \cos(\theta)$$

en comparant ces deux expressions, nous identifions l'équation polaire de la trajectoire :

$$r(\theta) = \frac{\frac{mC^2}{\alpha}}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (5)$$

C'est l'équation d'une courbe conique, d'excentricité e et de paramètre $p = mC^2/\alpha$. On obtiendra différent cas :

- une trajectoire elliptique, si l'excentricité est inférieure à 1 (un cercle, si $e = 0$);
- une trajectoire parabolique, si l'excentricité vaut 1;
- une trajectoire hyperbolique, si l'excentricité est plus grande que 1.

On peut aussi en déduire l'énergie :

$$E_m = \frac{\alpha}{2mC^2} (e^2 - 1)$$

De la même façon on aura :

- une trajectoire elliptique, si l'énergie est négative;
- une trajectoire parabolique, si l'énergie est nulle;
- une trajectoire hyperbolique, si l'énergie est positive.

Représentation du mouvement

Le champ de force newtonien appartient à la catégorie des forces centrales conservatives. Les valeurs de r accessibles à la trajectoire sont liées à l'énergie potentielle effective :

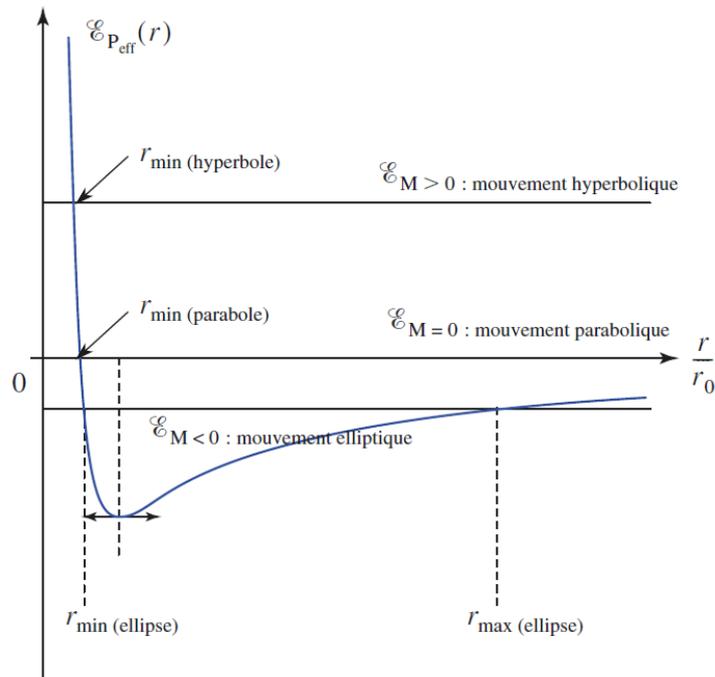
$$E_{p_{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} \leq E_m$$

Le terme en $1/r^2$ l'emporte en $r \rightarrow 0$ où cette fonction tend vers $+\infty$.

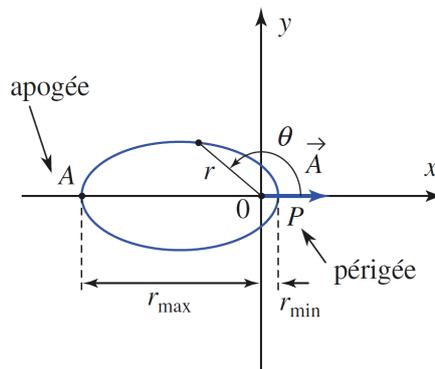
Dans le cas d'une force répulsive, $\alpha < 0$, et la fonction $E_{p_{eff}} > 0$ et strictement décroissante. L'énergie est une constante positive, et la condition $E_{p_{eff}} \leq E_m$ montre que la distance au centre de force O possède une valeur minimal r_{min} .

Si la force est attractive, $\alpha > 0$, et $E_{p_{eff}}$ présente un minimum négatif. La distance correspondante est :

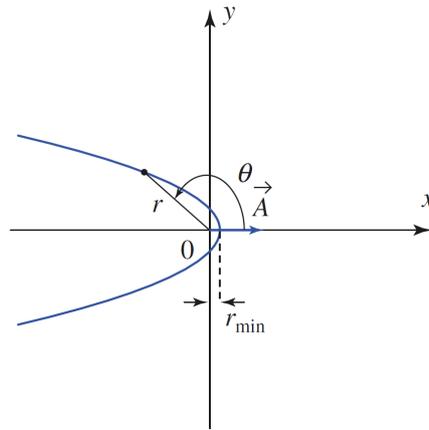
$$r_0 = \frac{mC^2}{\alpha} = p \text{ avec } E_{p_{eff}}(r_0) = -\frac{\alpha}{2p}$$



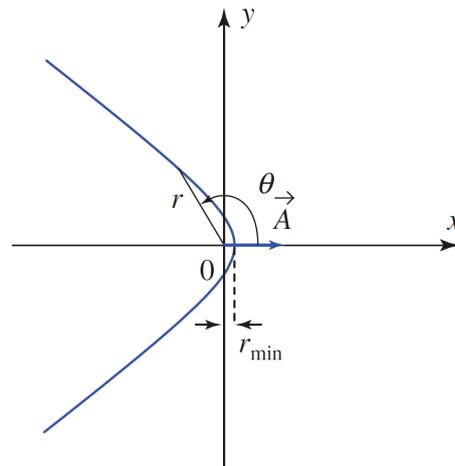
- Si l'énergie est négative ($e < 1$, trajectoire elliptique). La distance r évolue entre une valeur maximal r_{max} et minimale r_{min} : nous avons un état lié. Ces distances sont respectivement l'apogée et le périhélie ;



- Si l'énergie est nulle ($e = 1$, trajectoire parabolique). L'apogée de la trajectoire est renvoyé à l'infini ;



- Si l'énergie est positive ($e > 1$, trajectoire hyperbolique). On a un état de diffusion, car la branche hyperbole décrite par le point matériel diffère dans les deux cas : pour une force répulsive, nous avons observé une trajectoire où le point matériel fuyait le centre de force. Ici, il est attiré vers O , mais finit quand même par s'échapper.



Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon comment décrire la théorie de la gravitation et plus particulièrement comment décrire le mouvement d'un objet proche d'un astre. Néanmoins, la théorie de la gravitation a connu quelques ajustements récents par Einstein en 1915, afin de la rendre compatible avec la théorie de la relativité. En effet, la théorie de Newton a pour faiblesse de considérer que l'attraction gravitationnelle prend effet immédiatement, alors que ceci viole le principe qui stipule qu'on ne peut transmettre d'information plus vite que la lumière.