

L.P. 35 - Diffraction de Fraunhofer

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Notion de cohérence
- Interférences
- Optique expérimentale
- Transformée de Fourier

Bibliographie

- Optique , Perez, *Dunod*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Physique PC-PC*, Renvoizé, *Pearson*
- Optique physique , Taillet, *De Boeck*
- Optique ondulatoire , Brébec, *Hachette*

Leçon sympathique donc essayer tout le long de la leçon de montrer avec les manips les notions abordées.

Introduction

Le premier à observer attentivement le phénomène de diffraction de la lumière est le physicien italien Francesco Maria Grimaldi ; c'est lui qui proposa le mot "diffraction", du latin diffringere qui signifie "briser en morceaux".

Le physicien Huygens, en postulant que le front d'onde de l'onde lumineuse est l'enveloppe d'une infinité d'ondelettes sphérique émanant de chaque point du front d'onde à l'instant précédent, sera le premier à ébaucher une modélisation du phénomène. Par la suite, physicien Thomas Young reprit cette idée pour interpréter son expérience des trous de Young. il fallut cependant attendre les travaux du physicien Fresnel pour obtenir un énoncé cohérent du principe qui est maintenant souvent associé aux noms de Huygens et Fresnel. Plus tard, Kirchhoff montra comment ce principe pouvait être déduit des équations de Maxwell.

Longtemps considéré comme un principe qui donnait le bon résultat pour de mauvaises raisons, le principe de Huygens-Fresnel est néanmoins cohérent avec la théorie quantique de propagation de la lumière, développé notamment par le physicien Feynman.

Ainsi dans cette leçon nous allons essayer de comprendre de le phénomène de diffraction : on va essayer de le caractériser avec des équations et à l'aide de principe physique. On verra comment développer ces notions sur un cas simple et classique et enfin on verra les conséquences de la diffraction.

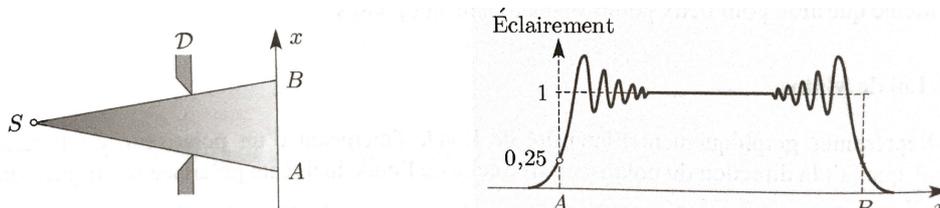
1. La diffraction

Manip : faire la manip simple pour avoir la diffraction !

1.1 Le phénomène de diffraction

Les phénomènes de diffraction n'ont été étudiés que bien après les premiers travaux d'optique géométrique. C'est tout naturellement par opposition à l'optique géométrique que le mot "diffraction" trouve sa définition : **On parle de diffraction lorsque les lois de l'optique géométrique ne sont pas respectées.**

Contrairement aux prévisions de l'optique géométrique, les variations d'éclairement au voisinage de l'ombre d'un diaphragme ne sont pas brutales, mais présentent des oscillations.



On peut définir la diffraction comme le phénomène d'éparpillement de la lumière que l'on observe lorsqu'une onde lumineuse est matériellement limitée. On met facilement en évidence cet éparpillement en éclairant une fente suffisamment fine avec le faisceau lumineux cylindrique issu d'un laser. Sur un écran, on constate un étalement de la lumière dans une direction perpendiculaire à celle de la fente. La diffraction joue un rôle essentiel dans la formation des images, puisque tout système optique limite irrémédiablement l'étendue d'une onde incidente.

1.2 Le principe de Huygens-Fresnel

L'interprétation quantitative de la diffraction s'appuie sur une théorie exclusivement ondulatoire dont les précurseurs sont C. Huygens et A. Fresnel. Leurs contributions, qui datent respectivement de 1678 et 1818, sont rassemblées sous le nom de principe d'Huygens-Fresnel.

Son énoncé comporte deux parties :

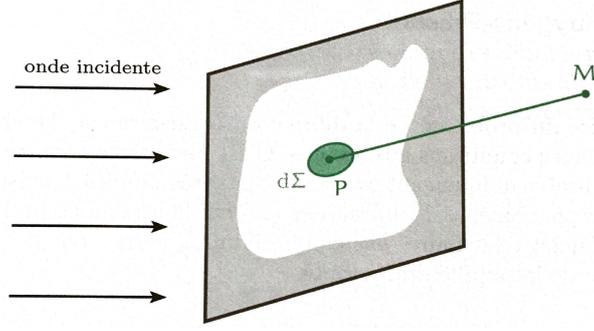
- Contribution d'Huygens : La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément ;
- Contribution de Fresnel : L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. On dit que toutes ces vibrations interfèrent pour former la vibration au point considéré.

Notons que l'addition des amplitudes complexes découle naturellement de la linéarité des équations de Maxwell auxquelles satisfait le champ électromagnétique.

La difficulté d'une étude de la diffraction, à partir de la théorie électromagnétique de la lumière, est telle que la théorie scalaire, dont ce principe est le fondement, apparaît aujourd'hui comme la théorie la plus puissante et la plus adaptée à la presque totalité des problèmes rencontrés en optique ondulatoire.

Ce principe n'est valable que si les dimensions de la pupille diffractante sont grandes devant la longueur d'onde.

Pour être parfaitement rigoureux, Kirchhoff a montré que le retard de la phase de l'ondelette secondaire est en réalité celui de l'onde primaire incidente à $\pi/2$ près.



Soit l'ondelette émise par P à la structure d'une onde sphérique. L'amplitude de l'onde arrivant en M est alors proportionnelle à l'inverse de la distance entre P et M , donc en $1/PM$. Notons $\underline{s}_i(P, t) = \underline{s}_i(P) \exp(j\omega t)$ l'amplitude complexe instantanée de l'onde incidente au point P ; l'amplitude de l'ondelette secondaire en M est alors donnée par :

$$d\underline{s}_p(M, t) = \frac{C}{PM} \underline{s}_i(P) \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (PM) \right) \right] d\Sigma \quad (1)$$

où C est un facteur de proportionnalité et $d\Sigma$ est la surface occupée par la source secondaire en P . Le terme $2\pi(PM)/\lambda_0$ représente le déphasage lié à la propagation entre P et M . Puisque l'onde au point M présente un retard de phase par rapport à l'onde au point P , ce terme est précédé d'un signe moins dans l'équation car nous adoptons une variation temporelle en $\exp(i\omega t)$.

À très grande distance par rapport à une longueur caractéristique du diaphragme, les variations de la distance PM vont devenir négligeables et on peut alors assimiler PM à OM où O est un point de la pupille¹. En posant $K = C/OM$ (indépendant de P), on peut écrire :

$$d\underline{s}_p(M, t) = K \underline{s}_i(P) \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (PM) \right) \right] d\Sigma$$

Si la pupille diffractante n'est pas seulement un trou creusé dans un écran opaque mais a une fonction de transmission (c'est le cas d'une lentille, par exemple la première lentille de l'objectif d'un appareil photo), il faut multiplier par la transparence complexe, ou fonction de transmission, $\underline{t}(P)$, avec :

- $\underline{t}(P) = 1$ au niveau d'un trou ;
- $\underline{t}(P) = -1$ pour un miroir métallique parfait ;
- $\underline{t}(P) = t_0 \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e \right]$ (avec $t_0 \leq 1$) pour un verre d'épaisseur e et une onde ayant une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$

La dernière expression ci-dessus suppose cependant que les rayons lumineux restent proches de la normale à la lame de verre. Nous allons enfin supposer que l'amplitude de l'onde incidente est sensiblement uniforme sur la pupille (source primaire loin de la pupille par exemple), en notant s_0 cette amplitude, il reste à déterminer le retard de phase à l'origine des temps de l'onde incidente en P pour déterminer l'amplitude complexe instantanée. Avec une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$, l'amplitude complexe instantanée de l'onde incidente au point P est de la forme :

$$\underline{s}_i(P, t) = s_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SP) - \phi_0 \right) \right]$$

1. On peut pas écrire $(PM) \simeq (OM)$ car cette approximation n'est possible que si $(PM) - (OM) \ll \lambda$

où ϕ_0 est le retard de phase à l'origine des temps de la source primaire S . Finalement l'amplitude des ondelette secondaire en M est donnée par :

$$d\underline{s}_p(M, t) = K s_0 \exp[i(\omega t - \phi_0)] \underline{t}(P) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (SPM) \right] d\Sigma \quad (2)$$

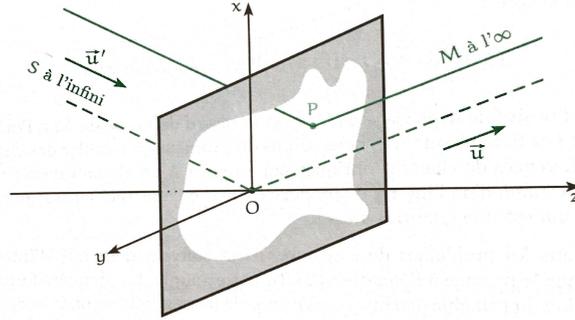
ce que l'on écrira encore :

$$d\underline{s}_p(M, t) = K s_0 \underline{t}(P) \exp [i(\omega t - \phi_p(M))] d\Sigma \quad (3)$$

Si $\underline{t}(P)$ est un réel positif, le déphasage $\phi_p(M)$ est le retard de phase en M à l'origine des temps de l'onde passant par P . Sans surprise, nous serons donc amenés à calculer des chemins optiques, ou plutôt des différences de chemins optiques par rapport à un chemin de référence. En effet, (SPM) est souvent infini, d'où l'intérêt de prendre (SOM) comme référence et par suite d'évaluer $(SPM) - (SOM)$ qui est une quantité finie.

2. Diffraction de Fraunhofer

2.1 Expressions générales



Soit une onde monochromatique incidente caractérisée par son vecteur d'onde \vec{k}' , ou par sa longueur d'onde λ et son vecteur unitaire \vec{u}' ; cette onde semble provenir d'une source S située à l'infini. L'observation se fait dans une direction \vec{u} pointant vers un point M situé à l'infini.

D'après le principe de Huygens-Fresnel, la pupille sera décomposée en infinité de sources secondaires dont la position est repérée par un point courant P . Pour les calculs, introduisons un repère $Oxyz$, l'origine étant un point de la pupille et l'axe z normal au plan de la pupille. Le point O va servir à définir le chemin de référence pour calculer les déphasages en M entre les différentes ondelettes. En reprenant l'équation (3), il faut déterminer :

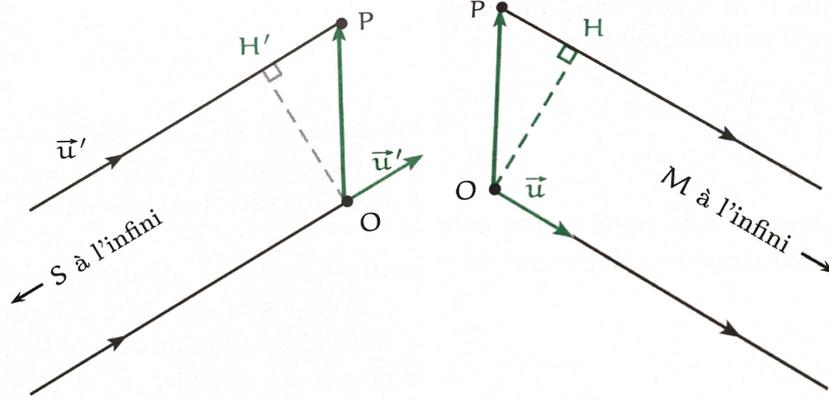
$$d\underline{s}_p(M, t) = K s_0 \exp[i(\omega t - \phi_0(M))] \underline{t}(P) \exp[-i\Delta\phi_p(M)] d\Sigma \quad (4)$$

avec $\Delta\phi_p(M)$ le retard de phase en M de l'onde provenant de P par rapport à l'onde provenant de O (cette dernière onde est réelle ou fictive). Ainsi :

$$\Delta\phi_p(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SPM) - (SOM)] \quad (5)$$

On posera par la suite $\underline{s}_0 = s_0 \exp[-i\phi_0(M)]$.

Calcul du déphasage



Soit la différence de marche peut s'exprimer par :

$$(SPM) - (SOM) = [(SP) - (SO)] + [(PM) - (OM)]$$

En notant H' le projeté orthogonal de O , le théorème de Malus indique que $(SH') = (SO)$. Alors $(SP) - (SO) = (H'P) = n\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}'$. De même en sortie de la pupille : $(PM) - (OM) = (PH) = -n\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}$. Ainsi on en déduit :

$$\delta(M) = (SPM) - (SOM) = n\overrightarrow{OP}(\vec{u}' - \vec{u}) \quad (6)$$

On en déduit alors le déphasage immédiatement en notant $\lambda = \lambda_0/n$:

$$\Delta\phi_p(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} [(\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \overrightarrow{OP}] \quad (7)$$

En introduisant les vecteurs d'onde $\vec{k} = 2\pi/\lambda\vec{u}$ et $\vec{k}' = 2\pi/\lambda\vec{u}'$, il vient :

$$\Delta\phi_p(M) = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \overrightarrow{OP}$$

Pour ce qui est de l'amplitude diffractée, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{s}_p(M, t) &= K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \underline{t}(P) \exp[-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \overrightarrow{OP}] d\Sigma \\ \implies \underline{s}(M, t) &= K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \int \int_{\Sigma} \underline{t}(P) \exp[i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OP}] d\Sigma \end{aligned} \quad (8)$$

Nous allons maintenant utiliser le repère $Oxyz$: introduisons les composantes des vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{u}' dans la base orthonormée directe :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

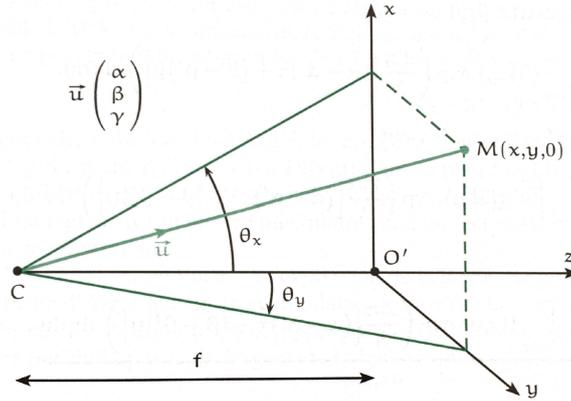
La pupille diffractante est supposée plane, l'axe Oz étant normal à la pupille. Les coordonnées du point P dans ce repère seront notées $(x, y, 0)$; l'amplitude complexe instantanée totale est alors :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}(\alpha, \beta, \gamma) = K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \int \int_{\Sigma} \underline{t}(x, y) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} [(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy \quad (9)$$

Ainsi pour déterminer l'éclairement en M , il suffit de calculer le produit $\underline{s}(M, t)\underline{s}^*(M, t) = |\underline{s}(M, t)|^2$:

$$\mathcal{E}(M) = K^2 s_0^2 \left| \int \int_{\Sigma} \underline{t}(P) \exp \left[i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OP} \right] d\Sigma \right|^2$$

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(\alpha, \beta) = K^2 s_0^2 \left| \int \int_{\Sigma} \underline{t}(x, y) \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda} ((\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y) \right] dx dy \right|^2 \quad (10)$$



L'observation à l'infini peut se faire à l'œil nu, mais le plus souvent dans le plan focal d'une lentille convergente. Nous allons lier les composantes α et β à la position sur un écran. Considérons le rayon passant par le centre C d'une lentille convergente de distance focale f (l'axe optique étant parallèle à la direction z). Ce rayon n'est pas dévié, il est donc toujours suivant la direction d'observation \vec{u} .

Compte tenu du fait que dans le repère $O'xyz$ le point C a pour coordonnées $(0, 0, -f)$ et le point M a pour coordonnées $(x, y, 0)$, il est facile de déduire le vecteur \vec{u} tel que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{CM} / \|\overrightarrow{CM}\| \text{ et } \overrightarrow{CM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + f\vec{e}_z$$

On trouve alors pour ses composantes :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}; \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}; \gamma = \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}$$

De même, les angles θ_x et θ_y sont liés aux coordonnées du point M :

$$\tan(\theta_x) = \frac{x}{f} \text{ et } \tan(\theta_y) = \frac{y}{f}$$

Si on suppose que ces angles sont faibles, c'est à dire que les rayons sont peu inclinés, la condition mathématique à vérifier est alors $|x| \ll f$ et $|y| \ll f$. Les composantes du vecteur \vec{u} , les angles θ_x et θ_y ainsi que les coordonnées du point M sont alors liés linéairement par :

$$\alpha \simeq \theta_x \simeq \frac{x}{f}; \beta \simeq \theta_y \simeq \frac{y}{f}; \gamma \simeq 1$$

2.2 Propriétés

Manip : Faire les manip qualitative sur ces propriétés en fermant ou déplaçant le diaphragme.

Translation de la pupille

Soit la pupille subit une translation de x_0 suivant \vec{e}_x (similaire pour translation suivant y). La transparence complexe de la nouvelle pupille est alors $\underline{t}'(x, y) = \underline{t}(x - x_0, y)$. En procédant à un changement de variable $x' = x - x_0$, l'amplitude diffractée par la pupille translatée est la même que celle diffractée par la pupille de départ, à un déphasage uniforme près :

$$\underline{s}'(\alpha, \beta, t) = \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha - \alpha')x_0\right] \underline{s}(\alpha, \beta, t) \quad (11)$$

Lors du calcul de l'éclairement, le produit de l'exponentielle complexe par son conjugué va donner 1 et ainsi, l'éclairement est inchangé par translation de la pupille.

Dilatation de la pupille

Soit une dilatation d'un facteur μ suivant la direction x de la pupille. La nouvelle transparence complexe est alors $\underline{t}'(x, y) = \underline{t}(x/\mu, y)$. Dans ce cas l'amplitude diffracté s'écrit :

$$\underline{s}'(\alpha, \beta, t) = \mu \underline{s}(\alpha, \beta, t) \quad (12)$$

L'éclairement s'écrira cette fois-ci :

$$\mathcal{E}'(\alpha, \beta) = \mu^2 \mathcal{E}(\alpha, \beta)$$

Linéarité - Théorème de Babinet

D'après l'équation (10), il y a linéarité entre l'amplitude complexe instantanée diffractée $\underline{s}(M, t)$ et la transparence complexe $\underline{t}(P)$. Supposons, en effet qu'une pupille de transparence t_1 produise une amplitude \underline{s}_1 et qu'une pupille de transparence t_2 produise une amplitude \underline{s}_2 , alors une pupille de transparence $\underline{t} = \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2$ produira une amplitude $\mu_1 \underline{s}_1 + \mu_2 \underline{s}_2$. Attention ce n'est pas le cas pour l'éclairement !

Deux pupilles de transparence complexe t_1 et t_2 sont complémentaires si :

$$\forall P \in \Sigma, t_1(P) + t_2(P) = 1$$

Il en découle le théorème de Babinet :

La figure de diffraction produite par deux pupilles complémentaires est la même, sauf dans la direction de l'optique géométrique.

Rq : Démo : Soit deux ouvertures complémentaires de transparence \underline{t} et $\underline{t}' = 1 - \underline{t}$. Alors :

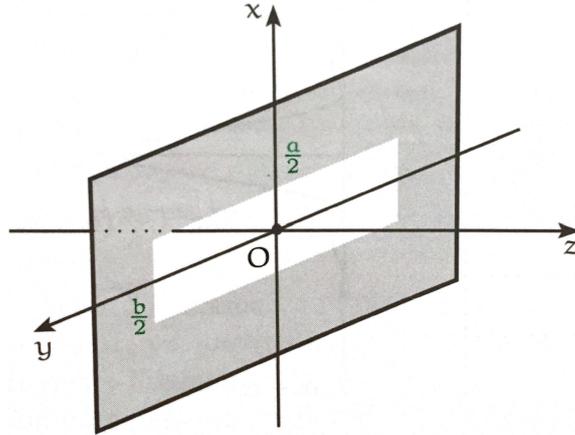
$$\begin{aligned} \underline{s}' &\propto \int \int \underline{t}' \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}[(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy \\ &\propto \int \int (1 - \underline{t}) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}[(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy \\ &\propto \int \int \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}[(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy - \underline{s} \end{aligned} \quad (13)$$

La figure de diffraction à l'infini se limite à un point lumineux dans la direction de propagation de l'onde plane incidente. Ainsi en dehors de ce point, l'amplitude est nulle et donc $\underline{s} + \underline{s}' = 0$. Les éclairements sont donc égaux : $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}'(M)$, à l'exception du point dans la direction de l'optique géométrique.

2.3 Cas d'une fente rectangulaire

Manip : faire la manip sur le bi-fente et faire les mesures quantitatives.

Nous allons étudier le cas le plus classique : le cas de l'ouverture rectangulaire.



Considérons une pupille diffractante constituée d'une ouverture rectangulaire découpée dans un écran opaque. L'ouverture rectangulaire est centrée en O , sa largeur est a suivant x et b suivant y de telle sorte que la transparence complexe est :

$$\underline{t}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in [-a/2; a/2] \times [-b/2; b/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En injectant l'expression de la transparence dans l'expression de l'amplitude diffracté :

$$\underline{s}(\alpha, \beta, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \int_{x=-a/2}^{a/2} \int_{y=-b/2}^{b/2} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} [(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy$$

Il s'agit d'intégrer deux fois une exponentielle complexe, la dépendance en x et en y seront semblables :

$$\underline{s} = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \frac{\lambda}{2\pi i(\alpha - \alpha')} \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha - \alpha')x\right) \right]_{-a/2}^{a/2} \frac{\lambda}{2\pi i(\beta - \beta')} \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(\beta - \beta')y\right) \right]_{-b/2}^{b/2}$$

soit encore :

$$\underline{s}(\alpha, \beta, t) = K \underline{s}_0 e^{i\omega t} \frac{\lambda}{\pi(\alpha - \alpha')} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha')a\right) \frac{\lambda}{\pi(\beta - \beta')} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(\beta - \beta')b\right)$$

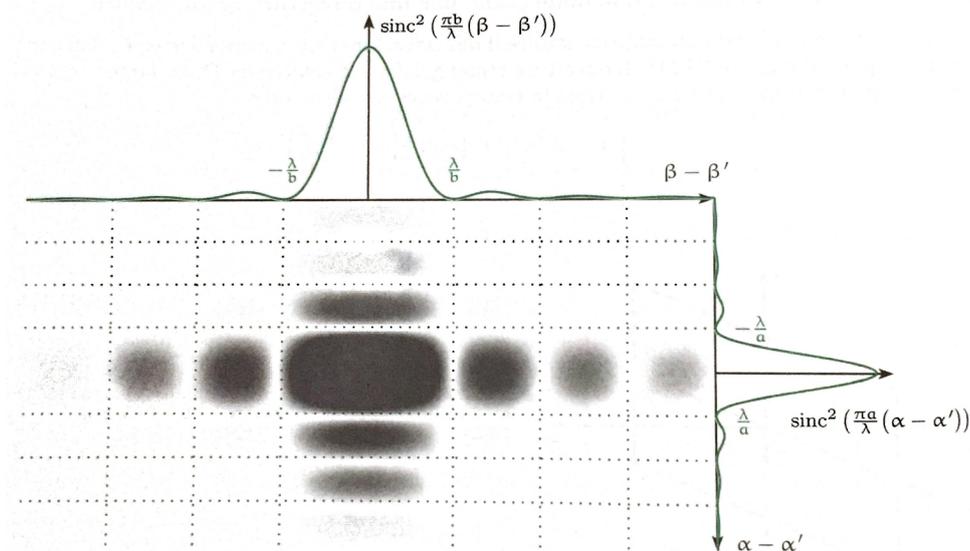
D'où en utilisant les sinus cardinaux :

$$\underline{s}(\alpha, \beta, t) = K \underline{s}_0 a b e^{i\omega t} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha - \alpha')\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\beta - \beta')\right) \quad (14)$$

Ainsi l'éclairement se traduit par le carré du module de l'amplitude précédent avec $\mathbb{E}_0 = K^2 |\underline{s}_0|^2 a^2 b^2$, l'éclairement obtenu dans la direction de l'optique géométrique ($\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$), alors :

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha - \alpha')\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\beta - \beta')\right) \quad (15)$$

La figure de diffraction se représente ainsi :



On constate ainsi d'une part, que la position du maximum correspond à la direction de l'optique géométrique, et d'autre part que si les dimensions de la pupille sont infiniment grandes, la propagation de la lumière se fait de manière rectiligne ($\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$) conformément aux lois de l'optique géométrique.

La tache centrale est caractérisée par les largeurs angulaires $2\lambda/a$ et $2\lambda/b$.

Fente fine

Dans le cas d'une fente fine on considère que $b \gg a$ (b infini). La largeur a doit de toute façon être au moins de l'ordre d'une centaine de longueurs d'ondes pour que le principe d'Huygens-Fresnel puisse être appliqué. Cette ouverture a alors l'allure d'une fente plutôt que d'un rectangle. Plus b devient grand, plus la largeur de la tache centre selon Oy devient petite. Dans ce cas là l'amplitude diffractée peut s'exprimer :

$$\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 a b e^{i\omega t} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \right) \quad (16)$$

Ainsi l'éclairement se traduit :

$$\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \right) \quad (17)$$

Rq : Cas des autres types de fentes (circulaire, fente fine, fente d'Young et réseaux, page 841 Renvoizé ou page 185 H-prépa ou page 152 Taillet.)

3. Conséquences

3.1 Optique de Fourier

L'expression (15) montre que la figure de diffraction par une ouverture rectangulaire éclairée par une onde plane est donnée, dans les conditions de Fraunhofer, par la transformée de Fourier spatiale de l'ouverture. Les propriétés mathématiques de cette transformation ont des conséquences physiques intéressantes sur la diffraction. Tout d'abord, la transformé de Fourier établit une relation de réciprocité entre les distances dans le plan de l'ouverture et les distances angulaires de la figure de diffraction. Ceci signifie que les

caractéristiques à petite échelle (les détails fins) de l'ouverture déterminent les caractéristiques à grande échelle de la figure de diffraction et vice-versa. Ainsi la figure de diffraction par deux fentes de largeur a , séparées par une distance $b > a$, consiste en des franges dont la séparation angulaire est de l'ordre de λ/b , dont l'intensité est modulée à plus grande échelle sur une taille angulaire $\lambda/a > \lambda/b$.

On peut alors aborder ces questions en s'appuyant sur la notion de produit de convolution. Ce produit de convolution de deux fonctions (de deux variables dans le cas qui nous intéresse) est défini par :

$$(f \star g)(x, y) = \int \int f(x', y') \times g(x - x', y - y') dx' dy' \quad (18)$$

Cette notion intervient par exemple pour décrire un plan diffractant constituée d'ouvertures identiques, chacune de transparence $f(x, y)$ et réparties à des positions (x, y) c'est à dire distribuées selon $g(x, y) = \sum_i \delta(x - x_i, y - y_i)$ où $\delta(., .)$ désigne la distribution de Dirac bidimensionnelle. La transparence est alors donnée par $(f \star g)(x, y)$ défini dans l'expression précédente. Or, la transformée de Fourier d'un tel produit de convolution est égale au produit (au sens usuel) des transformées de Fourier.

Dans l'exemple considéré ici, il suffit donc de calculer la figure de diffraction d'une seule ouverture, celle de la distribution des positions, et d'en faire le produit. Pour illustrer cette description un peu abstraite, considérons les fentes d'Young de taille finie, séparés par une distance b , chacun ayant un rayon a . L'amplitude diffractée par une fente fine est donnée par (16), et celle correspondant à deux sources ponctuelles a été calculé dans la leçon précédente sur les interférences à deux ondes en optique. L'amplitude diffractée est alors de la forme en supposant une incidence normale ($\alpha' = 0$) selon la direction α pour $\alpha \ll 1$:

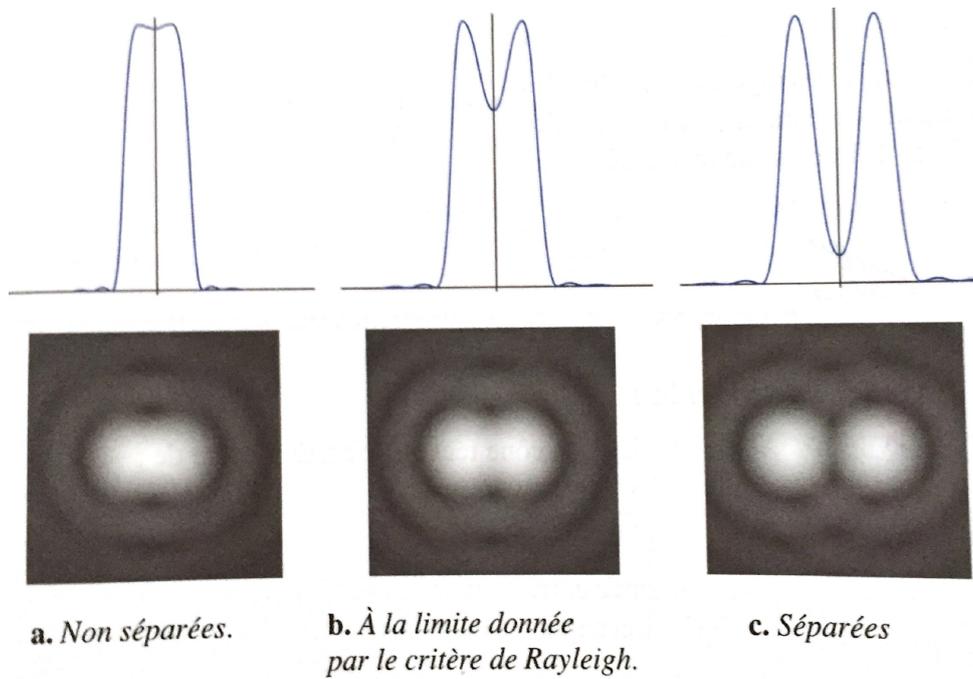
$$\underline{s}(\alpha, t) \propto \cos\left(\frac{2\pi b\alpha}{\lambda}\right) \times \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right) \quad (19)$$

Finalement, le premier terme représente les interférences, le second la diffraction par chaque fente. La forme des fentes influence la modulation globale de l'intensité des franges d'interférences, mais pas l'interfrange.

3.2 Application au pouvoir de résolution

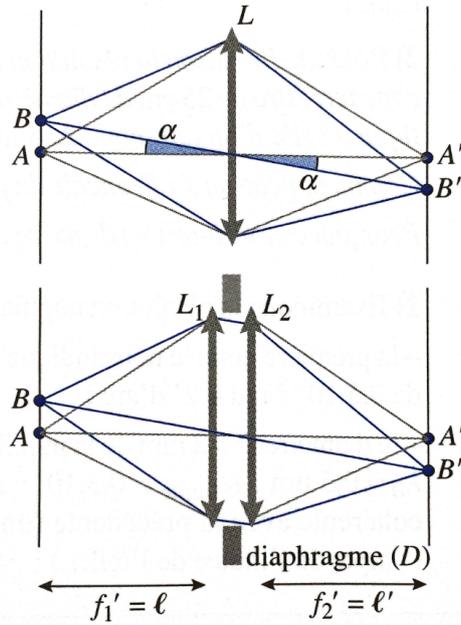
MANIP : critère de Rayleigh.

On admettra pour cette partie, même si vous ferez en exercice le cas de la pupille circulaire, que la figure de diffraction de la pupille circulaire de diamètre D est constituée d'anneaux dont l'éclairement décroît très rapidement. Le pic central a un rayon angulaire de $1,22\lambda/D$.



Imaginons un instrument d'optique parfaitement stigmatique du point de vue de l'optique géométrique. Si la diffraction n'existait pas, sa résolution serait infinie, car il fournirait de deux points objets distincts, aussi près soient-ils, deux images distinctes. En fait, la résolution d'un instrument est limitée pour des raisons techniques, dues au caractères rigoureusement stigmatique des composants optiques ; mais aussi pour des raisons théoriques incontournables : l'instrument qui n'est pas infiniment large diffracte la lumière reçue de l'objet. À chaque objet ponctuel correspond une tache image centrée sur l'image géométrique.

La limite de séparation liée au récepteur qui doit séparer les deux taches images. Indépendamment de ce fait expérimental, on utilise souvent le critère de Rayleigh : à la limite de résolution, le maximum de la tache de diffraction d'un point image coïncide avec le premier zéro de la tache de l'autre. L'aspect visuel des éclaircissements produits par les taches de diffraction entourant deux images A' et B' plus ou moins séparées justifie le choix de ce critère.



Considérons les images A' et B' de deux points A et B situés dans le même plan de front, par une lentille de diamètre D .

Nous pouvons considérer cette lentille comme l'association de trois éléments très proches : une lentille de focale $f'_1 = \ell$, un diaphragme de diamètre D , et une lentille de focale $f'_2 = \ell'$. Ceci nous ramène à notre montage "classique" de diffraction à l'infini : les tâches de diffraction devant entourer les images A' et B' ont un rayon $1,22 \frac{\lambda f'_2}{D}$.

Si, vus de la lentille, les objets A et B sont séparés angulairement d'un angle α , leurs images géométriques A' et B' sont séparées de $\alpha f'_2$. La séparation est donc réalisée si :

$$A'B' > 1,22 \frac{\lambda f'_2}{D}, \text{ soit } \alpha > 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

La résolution angulaire limite due à la diffraction d'une lentille de diamètre D est :

$$\alpha_{lim} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Les points A et B sont discernables si :

$$AB > \alpha_{lim} \ell = 1,22 \lambda \frac{\ell}{D}$$

Le rapport ℓ/D est le nombre d'ouverture de la lentille. Dans l'optique de Gauss, ce nombre est en principe assez grand. Pour des systèmes optiques adaptés à des conditions extrêmes, il est au mieux de l'ordre de 1. Nous en concluons donc que :

En raison de la diffraction, les dimensions des plus petits détails discernables avec un instrument d'optique sont de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Pour étudier des objets plus petits, il faudra avoir recours à des rayonnements de plus faible longueur d'onde. Pour étudier des structures à des échelles atomiques, on utilisera, par exemple, la diffraction de rayon X.

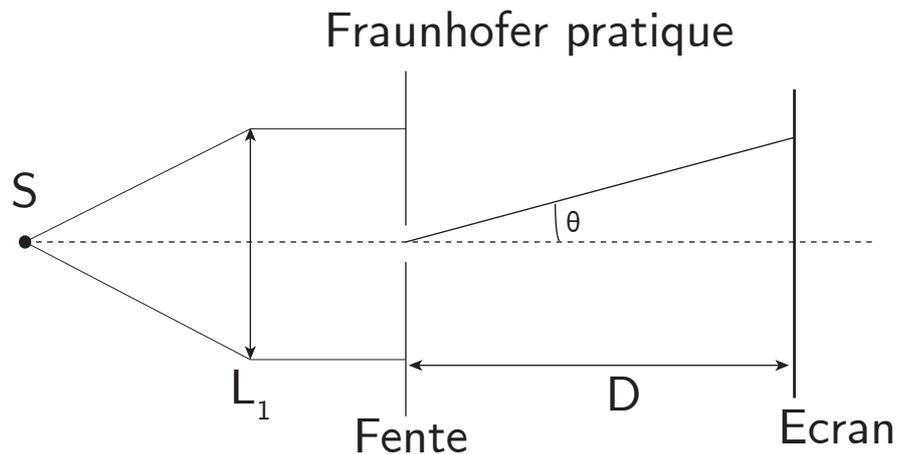
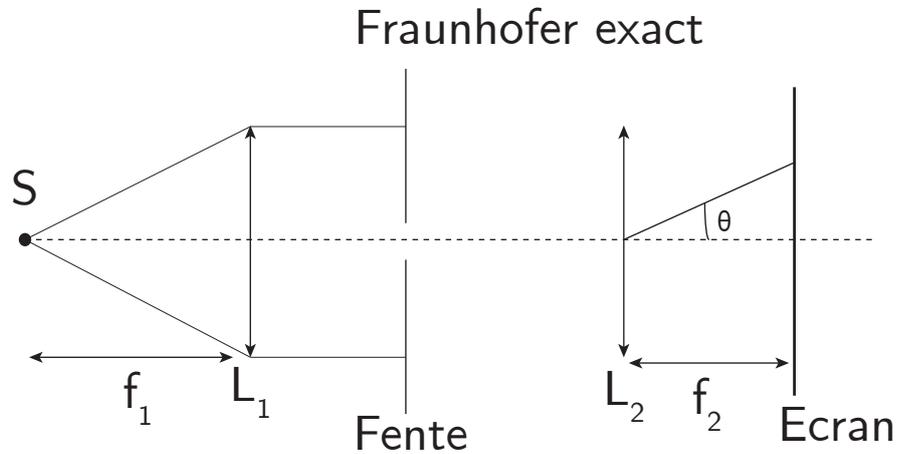
Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon comment caractériser et définir le phénomène de diffraction dans le cas de la diffraction de Fraunhofer. On peut bien entendu prolonger notre raisonnement et se pencher sur le cas d'un réseau... chose qui sera abordé dans une prochaine leçon.

Manip de diffraction

Diffraction par une fente

page 107 Sextant



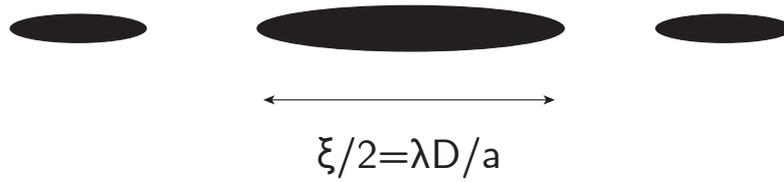
Pour la manip on fera le Fraunhofer pratique. La source est une laser sur lequel on aura ajouté une lentille type microscope (de focale $f = 15mm$) où une autre lentille avant $f = 5cm$). On prend $f_1 = 10cm$. Le but est ici de deviner la largeur de la fente en mesurant les figures de diffraction. Mais cette manip est a utiliser tout le long de la leçon pour imaginer les propos !

Dans un premier temps il faut conjuguer la source avec l'écran pour L_1 : pour cela on positionne L_1 de telle sorte à avoir un point net sur l'écran. Ensuite on peut mettre la fente.

On a le schéma suivant pour avoir une source ponctuelle :

$$\infty \implies L \implies \dots$$

On va avoir des taches sur l'horizontale. La tache central a pour dimension ξ :



Alors on retrouve :

$$a = \frac{D\xi}{2\lambda} \quad (20)$$

On peut aussi montrer que :

- la figure de diffraction reste perpendiculaire à la fente lorsqu'on tourne cette dernière ;
- si on translate dans son plan la fente diffractante, la figure ne change pas ;
- si on élargit la fente, la figure de diffraction se rétrécit (et inversement) ;
- la figure de diffraction du diaphragme complémentaire est identique (sauf au centre) à la figure de diffraction du diaphragme original.

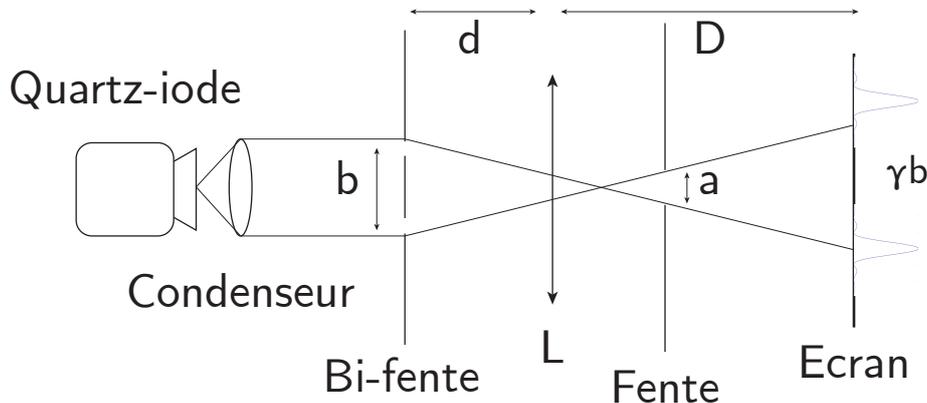
Toutes ces propriétés sont les conséquences du fait que la figure de diffraction de Fraunhofer est la transformée de Fourier bi-dimensionnelle de $t(x, y)$.

→ Application pour la mesure de longueur d'objet !

Faire un calcul d'erreur!!!

Pouvoir de résolution : critère de Rayleigh

page 135 Sextant



Il faut prendre une fente a variable et graduée pour pouvoir mesurer le critère et comparer avec la théorie.

On a le grandissement $\gamma = D/d$. Le critère s'écrit :

$$\gamma b > \frac{\lambda D}{a} \quad (21)$$

Si $\gamma b = \frac{\lambda D}{a}$ on ne résout plus rien. Ainsi le but est de comparer la valeur obtenue avec la théorie.