

L.P. 48 - Phénomène de résonance dans différents domaines de la physique

Benjamin Marchetti

Niveau : 2eme année CPGE

Pré-requis

- Écritures complexe
- Mécanique du point
- Électronique
- Optique ondulatoire
- Physique des ondes
- Représentation de Fresnel

Bibliographie

- Mécanique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- Optique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- Physique Tout en un MPSI-PSI, Sanz, *Dunod*
- BUP n.851 (2003)

Introduction

Le phénomène de résonance est omniprésent dans l'ensemble de la physique. Parfois c'est un phénomène que l'on cherche à favoriser, tandis que dans certains cas, on essaye justement de s'en affranchir.

La définition générale de résonance serait : qui passe par un maximum. On ne sait pas trop de quoi on parle, ça peut être une amplitude, une puissance, une vitesse...etc... Mais en général, on va s'intéresser à une amplitude. C'est dans tous les cas une réponse à une excitation.

Ex : Manip avec un pendule simple : faire des excitations de différentes amplitude pour montrer qu'à certaines fréquence le pendule bouge.

On va donc s'occuper de systèmes physiques, que l'on considèrerai au final comme des boîtes noires, soumis à une excitation de type sinusoïdale à une pulsation donnée, et on cherchera la réponse de ce système. Dans cette leçon, on ne parlera que de systèmes linéaires, dont la réponse est alors également de type sinusoïdale, à même pulsation.

On adoptera la notation complexe, et la notion de fonction de transfert, qui permet ainsi de caractériser entièrement la réponse du système à toute excitation (par décomposition spectrale). Plan : on étudiera en détail ce système mécanique résonant pour dégager les caractéristiques générales du phénomène de résonance ; ensuite, nous soulignerons les analogie avec le domaine de l'électrocinétique, puis nous généraliserons à tout système physique ; enfin, nous verrons quelques applications lors d'une propagation.

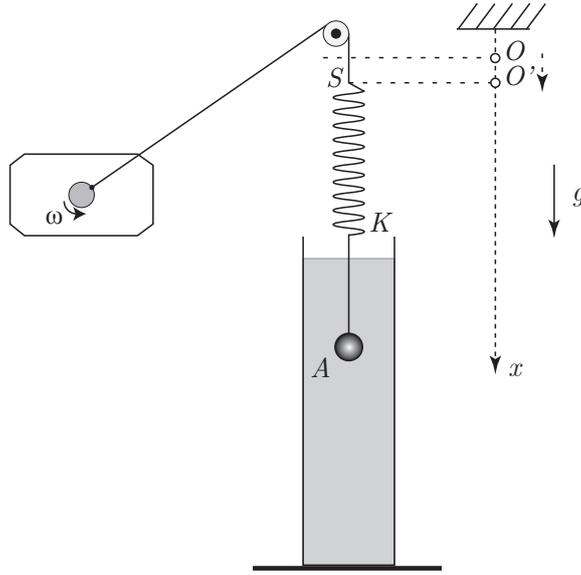
1. Le pendule élastique

1.1 Présentation

On peut provoquer des oscillations forcées d'un pendule élastique en lui imposant un déplacement sinusoïdal. Ce cas fréquence dans la pratique peut être illustré par l'exemple qui suit.

Soit un oscillateur constitué par un pendule élastique vertical A (masse m et raideur K)

dont l'extrémité supérieure S a un mouvement oscillatoire harmonique, de pulsation ω , imposé par un moteur.



On détecte le mouvement, de A , par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} , supposé galiléen, en mesurant la variation de la tension entre une borne de référence et l'extrémité d'une tige conductrice liée à la masselotte en mouvement dans l'électrolyte.

Écrivons l'équation différentielle du mouvement du pendule, en introduisant une force de frottement de Stokes $F_S = \alpha v$, proportionnelle à la vitesse v . L'axe Ox étant orienté suivant la vertical descendante, il vient :

$$m \vec{a} = m \vec{g} - K(x - x_S - l_0) \vec{e}_x - \alpha \vec{v} \quad (1)$$

où $x_S = \overline{OS}$ désigne la coordonnée de l'extrémité supérieur du ressort.

※ **Warning** : Dans ce problème on néglige les forces d'Archimède, car en réalité on considère la masse m comme étant une masse comprenant la masse de la bille et la masse de liquide déplacé.

Comme $x_S = D_m \cos(\omega t + \phi_e)$, on a

$$m\ddot{x} = -K(x - l_0) - \alpha\dot{x} + mg + KD_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad (2)$$

soit en introduisant $l_e = l_0 + mg/K$ et en procédant au changement de variable $X = x - l_e$:

$$m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + KX = KD_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad (3)$$

En divisant par la masse, on fait apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ et la durée de relaxation en énergie $\tau_e = m/\alpha$. L'équation précédente prend alors la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau_e} + \omega_0^2 X = E_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad (4)$$

avec $E_m = \frac{KD_m}{m} = \frac{F_m}{m}$ en posant $F_m = KD_m$. E_m amplitude du terme d'excitation.

1.2 Oscillations forcées

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

– La solution générale de l'équation sans second membre :

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right) \cos(\omega_a t + \phi_a)$$

– La solution particulière de l'équation totale :

$$B \cos(\omega t + \phi_x)$$

Entre l'instant initial et une certaine durée, qui dépend de τ_e , au delà de laquelle le premier terme est négligeable devant le second, le régime est transitoire.

Une fois le régime transitoire achevé, on observe le régime forcé ou établi de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_x) \quad (5)$$

Dans la suite, nous étudierons uniquement ce régime forcé.

1.3 Élongation de l'oscillateur

Afin de déterminer la solution particulière de l'équation différentielle canonique, nous allons utiliser la méthode complexe qui consiste à associer, à l'équation différentielle précédente, l'équation différentielle suivant à laquelle satisfait la grandeur complexe : $\underline{x} = x + jy$ avec $j^2 = -1$:

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{\dot{\underline{x}}}{\tau_e} + \omega_0^2 \underline{x} = E_m \exp[j(\omega t + \phi_e)] \quad (6)$$

La solution réelle $x(t)$ s'obtient alors en prenant la partie réelle de $\underline{x}(t)$. Cherchons une solution de la forme :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t) \text{ où } \underline{X}_m = X_m \exp(j\phi_x)$$

est l'amplitude complexe de l'élongation. Comme $\ddot{\underline{x}} = -\omega^2 \underline{x}$ et $\dot{\underline{x}} = j\omega \underline{x}$, on a :

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega}{\tau_e} + \omega_0^2\right) \underline{X}_m = E_m \exp[j(\omega t + \phi_e)] = \underline{E}_m \exp(j\omega t) \quad (7)$$

$E_m \exp(j\phi_e)$ étant l'amplitude complexe de l'excitation. On en déduit en introduisant le facteur de qualité $Q = m\omega_0/\alpha$:

$$\underline{X}_m = \frac{\underline{E}_m}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + j(\omega/\tau_e)} \text{ soit } \underline{X}_m = \frac{Q\underline{E}_m/\omega_0^2}{u[Q(1/u - u) + j]}$$

En introduisant le rapport des pulsations $u = \omega/\omega_0$. Il en résulte que $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_x)$ avec :

$$X_m = \frac{E_m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau_e^2]^{1/2}} = \frac{QE_m/\omega_0^2}{u[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}}$$

et

$$\tan(\phi_x - \phi_e) = \frac{\omega/\tau_e}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{Q(u - 1/u)} = \frac{u}{Q(u^2 - 1)}$$

1.4 Vitesse l'oscillateur

Comme la vitesse de l'oscillateur est donnée par \dot{x} , écrivons $\underline{\dot{x}}$ sous la forme :

$$\underline{\dot{x}} = \frac{dx}{dt} = \underline{V}_m \exp(j\omega t) = V_m \exp[j(\omega t + \phi_v)]$$

\underline{V}_m étant l'amplitude complexe de la vitesse, V_m son amplitude et ϕ_v sa phase à l'origine. Or, d'après ce qui précède :

$$\underline{\dot{x}} = j\omega \underline{X}_m \exp(j\omega t) = j\omega \frac{Q\underline{E}_m/\omega_0^2}{u[Q(1/u - u) + j]} \exp(j\omega t)$$

En identifiant on obtient :

$$\underline{V}_m = \frac{\underline{E}_m \tau_e}{1 + jQ(u - 1/u)}$$

On en déduit :

$$V_m = \omega X_m = \frac{E_m \tau_e}{[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}}$$

et :

$$\tan(\phi_v - \phi_e) = -Q \left(\frac{u - 1}{u} \right)$$

La vitesse \dot{x} est ainsi en avance de phase $\pi/2$ par rapport à l'élongation x :

$$\phi_v = \phi_x + \frac{\pi}{2} \text{ soit } \phi_v - \phi_e = \phi_x - \phi_e + \frac{\pi}{2}$$

1.5 Admittance généralisée - Résonance

Admittance généralisée

Par définition, on appelle admittance généralisée Y_g le rapport de l'amplitude complexe de la "sortie/vitesse" sur celle de "l'entrée/excitation" :

$$Y_g = \frac{V_m}{\underline{E}_m} \text{ soit } Y_g = \frac{\tau_e}{1 + jQ(u - 1/u)}$$

Ainsi définie, Y_g a la dimension d'une durée. On en déduit le module et sa phase :

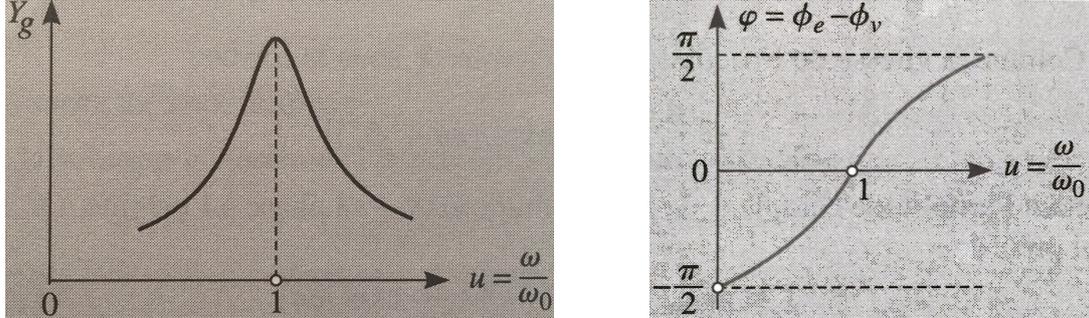
$$Y_g = |Y_g| \exp(j\phi_y) \text{ avec } |Y_g| = \frac{\tau_e}{[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}} \text{ et } \phi_y = \phi_v - \phi_e$$

Conventionnellement, on introduit la différence de phase, noté φ , entre la phase de l'excitation et celle de la vitesse :

$$\varphi = -\phi_y = \phi_e - \phi_v \text{ avec } \tan(\varphi) = Q(u - \frac{1}{u})$$

Résonance

Sur la figure est représenté $|Y_g|$ et φ en fonction de u et Q . On voit que, pour $u = 1$, c'est à dire pour une pulsation de l'excitation égale à la pulsation propre du système, le module de l'admittance généralisée passe par un maximum, qui vaut τ_e : en outre la vitesse est en phase avec l'excitation. Notons que l'admittance prend une valeur infinie dans le cas limite ou il n'y a pas d'amortissement.



On appelle résonance le phénomène d'exaltation de l'admittance généralisée d'un système qui fait correspondre un signal de sortie à un signal d'entrée, que l'on observe pour :

$$\omega = \omega_0$$

1.6 Excitation maximale indépendante de la pulsation

On admet ici que l'amplitude de l'excitation est indépendante de la pulsation ω , ce qui est fréquemment réalisé. On a alors :

$$E_m = \frac{F_m}{m}$$

On définit l'impédance de l'oscillateur comme étant :

$$Z_m = \frac{F_m}{V_m} = \frac{m}{Y_g} = \alpha \left[1 + jQ \left(u - \frac{1}{u} \right) \right]$$

Il vient alors ($Q = m\omega_0/\alpha$, $u = \omega/\omega_0$ et $m\omega_0^2 = K$) :

$$Z_m = \alpha + j \left(m\omega - \frac{K}{\omega} \right)$$

On en déduit le module et la phase :

$$Z_m = |Z_m| \exp(j\varphi) \text{ avec } |Z_m| = \left[\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{K}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

et

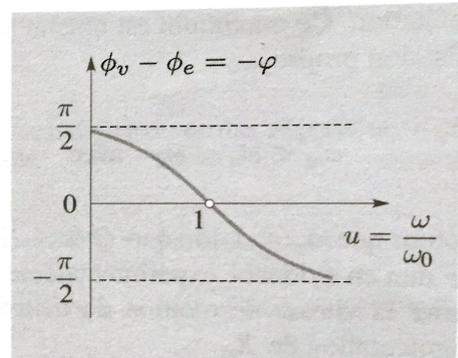
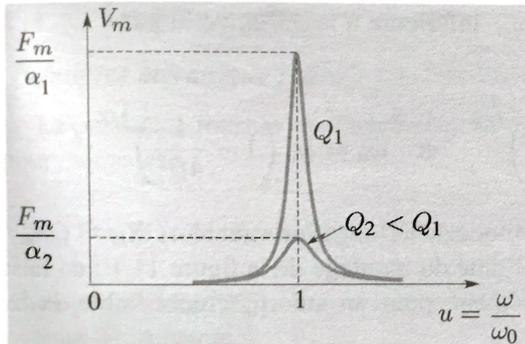
$$\varphi = \phi_e - \phi_v \text{ tel que } \tan(\varphi) = \frac{m\omega - K/\omega}{\alpha}$$

Vitesse ou intensité au voisinage de la résonance

L'amplitude de la vitesse s'écrit, en fonction de u et Q :

$$V_m = \frac{F_m/\alpha}{[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}} \quad (8)$$

Pour $u = 1$, V_m est maximal et vaut F_m/α . Ainsi, comme l'admittance généralisée, l'amplitude de la vitesse passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$, quel que soit l'amortissement et donc Q . Il en résulte qu'un moyen d'analyser le phénomène de résonance est d'étudier la variation de la vitesse du système considéré en fonction de la pulsation ω : on dit qu'il y a résonance de vitesse.



Cette variation de la vitesse en fonction de la fréquence peut être mise en évidence dans l'expérience initiale faite avec le pendule élastique. Il suffit d'utiliser un circuit dérivateur qui permet d'avoir la dérivée par rapport au temps du signal électrique proportionnel à l'élongation. On constate bien que l'amplitude de la vitesse est maximale pour $\omega = \omega_0$ quel que soit l'amortissement.

Quant à la différence entre la phase de la vitesse et celle de la force excitatrice, on l'obtient directement à partir de φ puisque :

$$\phi_v - \phi_e = -\varphi$$

Il en résulte que la vitesse et la force excitatrice sont en phase à la résonance. Lorsque u varie de 0 jusqu'à l'infini, la différence de phase passe de $\pi/2$ à $-\pi/2$. Si l'amortissement est nul, l'amplitude de la vitesse est infinie ; la phase, elle, vaut $\pi/2$ pour $\omega < \omega_0$ et $-\pi/2$ pour $\omega > \omega_0$.

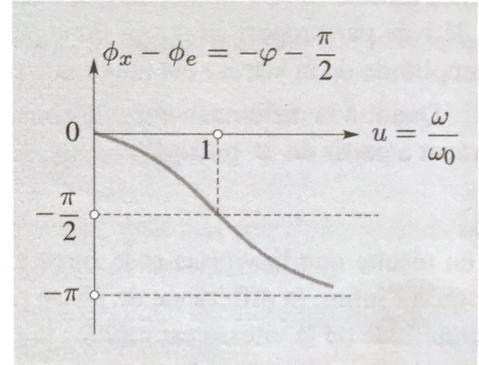
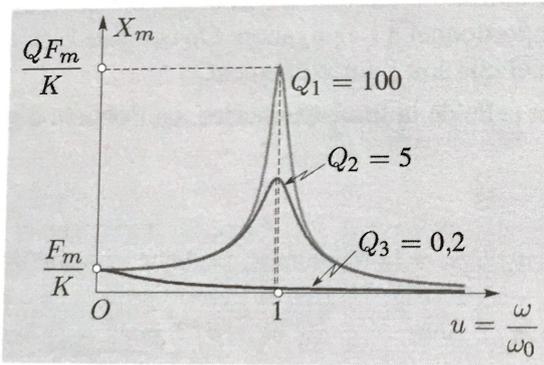
Ces résultats sur la vitesse se transposent directement à l'intensité dans le circuit série RLC excité par un générateur de tension sinusoïdale. On obtient alors la résonance d'intensité.

Élongation au voisinage de la résonance

L'amplitude réelle X_m de l'élongation s'écrit, en fonction de u et Q :

$$X_m = \frac{QE_m/\omega_0^2}{u[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}} = \frac{QF_m/K}{u^2 + Q^2(u^2 - 1)^2]^{1/2}} \quad (9)$$

Notons que $u_m \approx 1$ lorsque $Q \gg 1$. L'amplitude de l'élongation vaut alors $X_m \approx QF_m/K$. On met en évidence expérimentalement ce maximum à l'aide du montage en faisant varier la vitesse de rotation du moteur, on observe aisément, pour un amortissement faible, la forte augmentation de X_m .



En ce qui concerne la différence de phase ($\phi_x - \phi_e$), on l'obtient immédiatement en retranchant $\pi/2$ à la différence de phase ($\phi_v - \phi_e$) :

$$\phi_x - \phi_e = -\varphi - \frac{\pi}{2}$$

Elle varie donc entre 0 et $-\pi$ lorsque u passe de 0 à l'infini. Ainsi l'élongation de l'oscillateur est toujours en retard sur l'excitateur et ce retard vaut $\pi/2$ à la résonance. Lorsque l'amortissement est nul, le maximum est infini et se produit pour $\omega = \omega_0$; la phase vaut alors 0 si $\omega < \omega_0$ et π si $\omega > \omega_0$.

1.7 Étude énergétique

Puissance mécanique fournie par l'excitateur à l'oscillateur

La puissance fournie par l'excitateur à l'oscillateur, par l'intermédiaire du terme $F_m \cos(\omega t + \phi_e)$ a pour expression :

$$\mathcal{P} = F \cdot v = F_m \cos(\omega t + \phi_e) \cdot V_m \cos(\omega t + \phi_v) = \frac{F_m^2}{2|Z_m|} [\cos(2\omega t + \phi_e + \phi_v) + \cos(\varphi)] \quad (10)$$

Puisque $V_m = F_m/|Z_m|$. La puissance varie donc sinusoidalement avec le temps autour de la valeur moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ suivante :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\dot{X}} \cdot \underline{F}) = \alpha \frac{V_m^2}{2}$$

D'après la relation $\cos(\varphi) = \alpha/|Z_m|$, que l'on établit à l'aide de la représentation de Fresnel de l'impédance. En remplaçant V_m par son expression, on trouve :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\alpha}{2m^2} \frac{\omega^2 F_m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau_e^2} = \frac{F_m^2}{2\alpha} \frac{1}{1 + Q^2(u - 1/u)^2} \quad (11)$$

Variation de la puissance mécanique fournie par l'excitateur en fonction de la pulsation

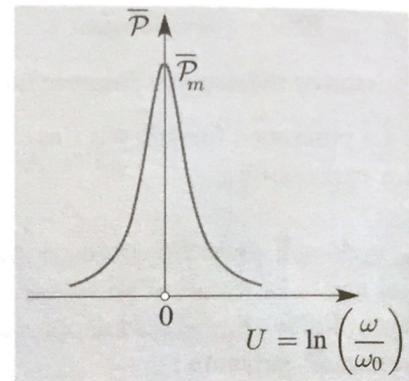
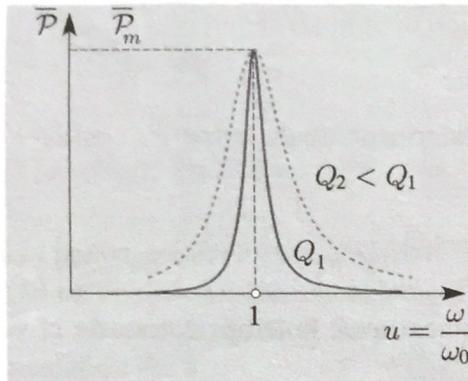
Étudions, en fonction de $u = \omega/\omega_0$, l'expression de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ transférée par la force excitatrice à l'oscillateur. Cette puissance s'annule pour les valeurs extrêmes de u et passe par un maximum pour $u = 1$:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_{max} \rangle}{1 + Q^2(u - 1/u)^2} \text{ avec } \langle \mathcal{P}_{max} \rangle = \frac{F_m^2}{2\alpha}$$

Si l'on représente cette puissance moyenne en fonction, non de u , mais de $U = \ln(u)$, on obtient une courbe symétrique d'équation :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_{max} \rangle}{1 + Q^2[\exp(U) - \exp(-U)]^2} = \frac{\langle \mathcal{P}_{max} \rangle}{1 + 4Q^2 \sinh^2(U)} \quad (12)$$

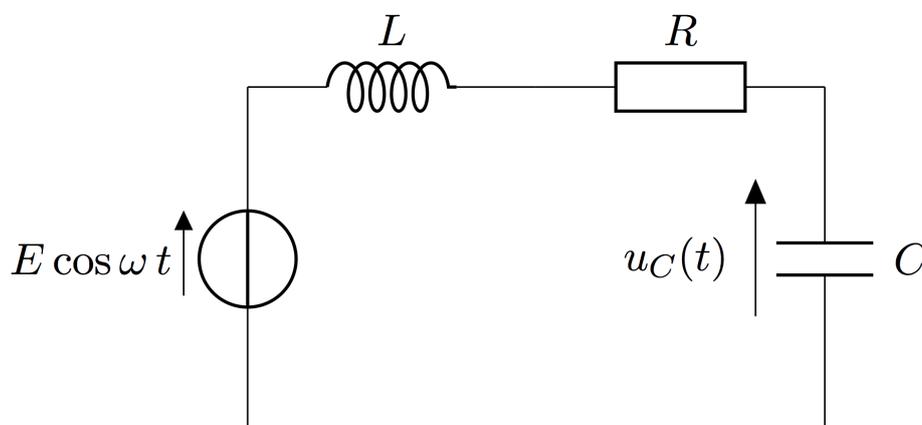
On voit que transfert maximal de la puissance moyenne de l'excitateur vers l'oscillateur est maximale à la résonance. C'est la raison pour laquelle, en physique moderne où l'aspect énergétique s'exprime plus simplement, on définit souvent la résonance par le transfert maximal d'énergie moyenne entre l'excitateur et l'oscillateur.



2. Généralisation au circuit R, L, C

Il existe une analogie formelle très intéressante entre la mécanique et l'électrocinétique. La position x est l'équivalent de la charge q , et ensuite, toutes les grandeurs classiques de mécanique ont un équivalent en électrocinétique qui assure la compatibilité des équations.

* **Warning** : La bobine possède une résistance interne. Si on se place à haute fréquence les effets capacitifs sont supérieurs aux effets inductifs donc on fait des manipulations avec des fréquences assez basses (<5kHz).



Résonance en intensité

Connaissant :

- la tension aux bornes du condensateur : $u_C = q/C$;

– la tension aux bornes de la résistance : $u_R = Ri$;

– la tension aux bornes de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$;

On peut en déduire l'équation en application la loi des mailles en supposant qu'on impose une tension de la forme $e(t)$ et sachant que $i = C \frac{du_C}{dt}$:

$$\begin{aligned} e(t) &= L \frac{di}{dt} + Ri + u_C \\ \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt} &= \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} \end{aligned} \quad (13)$$

En notation complexe on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}(j\omega)\underline{e} &= (j\omega)^2\underline{i} + \frac{R}{L}j\omega\underline{i} + \frac{\underline{i}}{LC} \\ \Rightarrow \underline{i} &= \frac{\underline{e}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} \end{aligned} \quad (14)$$

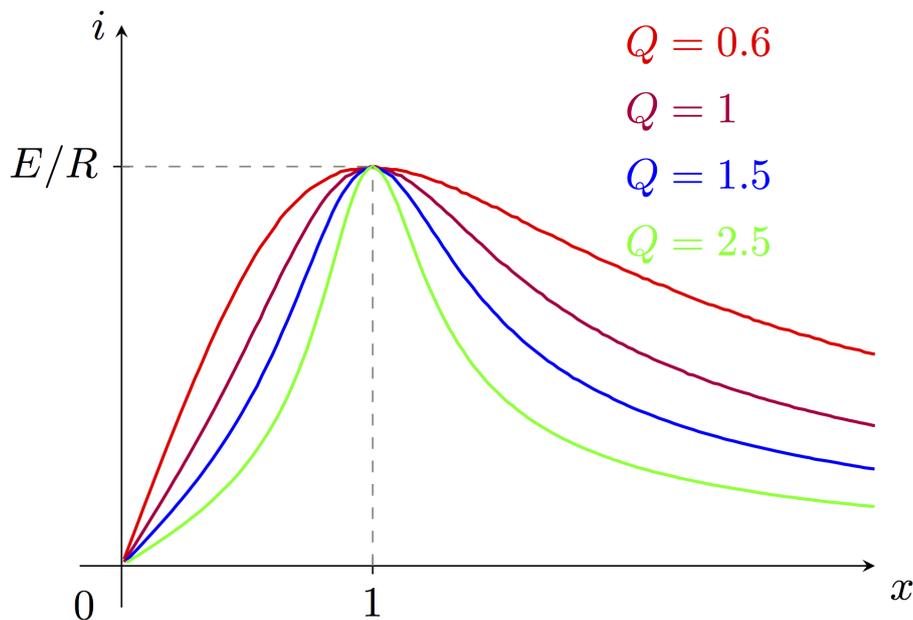
On a l'habitude d'introduire la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. L'expression devient alors :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R(1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))} \quad (15)$$

L'amplitude est le module de l'intensité complexe soit en posant $x = \omega/\omega_0$:

$$I = |\underline{i}| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}} \quad (16)$$

\Rightarrow Il y a toujours résonance en intensité quelque soit la valeur du facteur de qualité, cette résonance a toujours lieu pour $\omega = \omega_0$ et le maximum atteint a toujours la valeur de E/R .



Résonance aux bornes de la capacité

La tension aux bornes de la capacité vaut :

$$\underline{u}_C = \frac{i}{jC\omega} = \frac{\underline{e}}{jC\omega(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}))} = \frac{\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \quad (17)$$

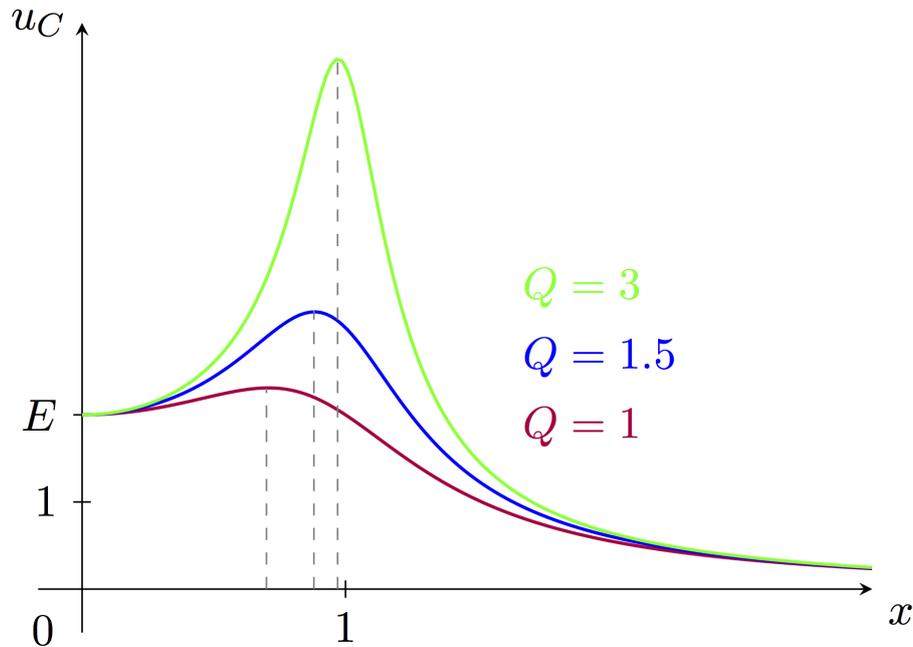
Soit en fonction de ω_0 et Q :

$$\underline{u}_C = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (18)$$

L'amplitude est donc :

$$|\underline{u}_C| = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad (19)$$

On remarque que la résonance aux bornes du condensateur n'existe pas toujours contrairement à la résonance en intensité. D'autre part, la fréquence de résonance aux bornes du condensateur n'est pas la même que celle obtenue pour la résonance en intensité.

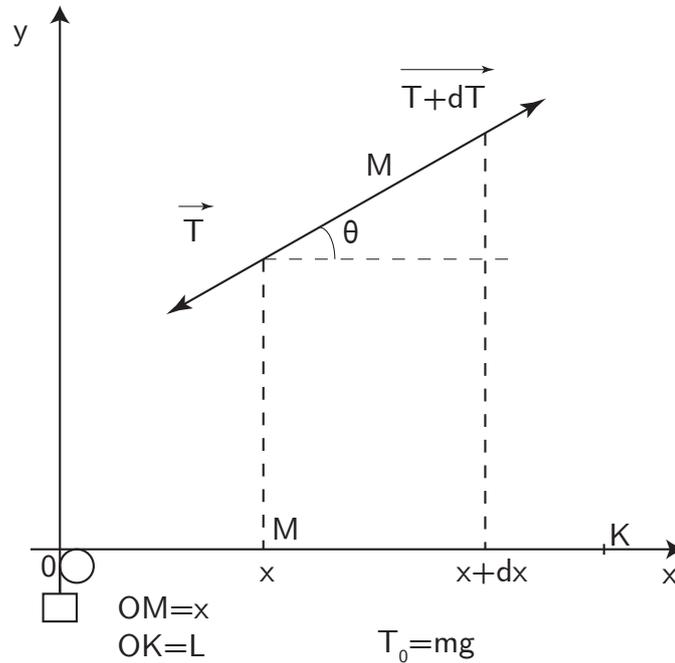


De plus on observe que :

- La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand ;
- Plus ce facteur est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit ;
- La surtension est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.

3. Résonance avec propagation

3.1 La corde de Melde



L'étude théorique classique de la propagation d'une déformation le long d'un fil ou d'une corde est basée sur un certain nombre d'hypothèses qui paraissent assez réalistes :

- Corde de poids négligeable devant sa tension assurée par une masse m accrochée à l'extrémité d'un fil passant sur une poulie ;
- Déformations transversales qui restent dans le plan de vibration de la source (pas de couplage des degrés de liberté aux points d'attache) ;
- Corde de raideur négligeable ;
- Déplacements visibles (c'est l'intérêt du dispositif) mais restant petits par rapport à la longueur totale de la corde ;
- Variations de la tension de la corde négligeables par rapport à la situation d'équilibre.
- Toutes les forces de tension ont pour intensité T_0 ;
- Frottements négligeables.

On connaît l'équation caractéristique d'une propagation y avec la célérité : $c = \sqrt{T_0/\mu}$ avec μ la masse linéique :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (20)$$

On sait que les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(x, t) = F(\alpha) + G(\beta) \quad (21)$$

Avec $\alpha(x, t) = t - x/c$ et $\beta(x, t) = t + x/c$ et ainsi $F(t - x/c) = f(x, t)$ et $G(t + x/c) = g(x, t)$ avec f et g de la forme :

$$f(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \text{ et } g(x, t) = b \sin(\omega t + kx).$$

Or on sait que que $x = 0$ on a $y(0, t) = 0$. Donc on en déduit que $a = b$. Ainsi y est de la forme :

$$y(x, t) = 2a \sin(kx) \cos(\omega t)$$

On sait aussi que $y(L, t) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} 2a \sin(kL) &= 0 \\ \Leftrightarrow kL &= p\pi = \frac{2\pi L}{\lambda} \\ \Leftrightarrow L &= \frac{p\lambda}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

C'est la condition pour avoir des ondes stationnaires ou autrement dit être en résonance. Considérons maintenant avec un vibreur en $x = L$. Alors les conditions aux limites sont :

$$y(L, t) = A \cos(\omega t) \text{ et } y(0, t) = 0$$

Alors $y(L, t) = A \cos(\omega t) = 2a \sin(kL) \cos(\omega t)$. Et on en déduit :

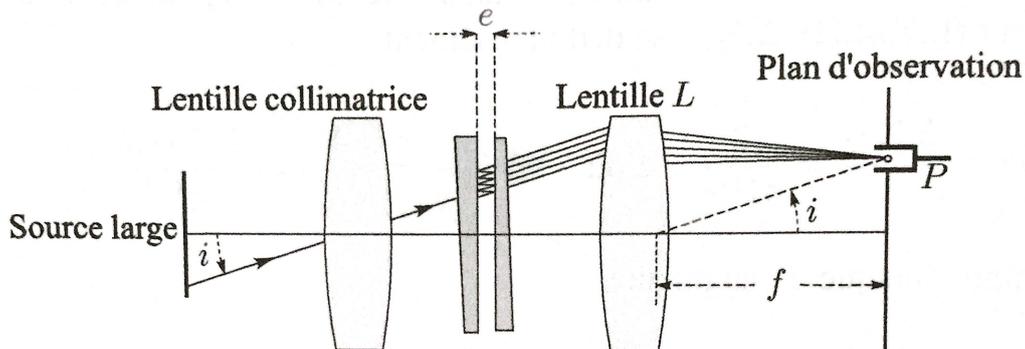
$$y(x, t) = \frac{A}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (23)$$

Si $\sin(kL) = 0$ alors $kL = p\pi$ de même que toute à l'heure.

$$L = \frac{p\lambda}{2} \quad (24)$$

On est sur les modes propres et on a des fuseaux bien distinct (ondes stationnaires).

3.2 La cavité de Fabry-Perot



L'interféromètre de Fabry-Pérot, construit par les physiciens français Fabry et Pérot est très largement utilisé comme spectromètre à haute résolution, ainsi que comme cavité optique dans les lasers.

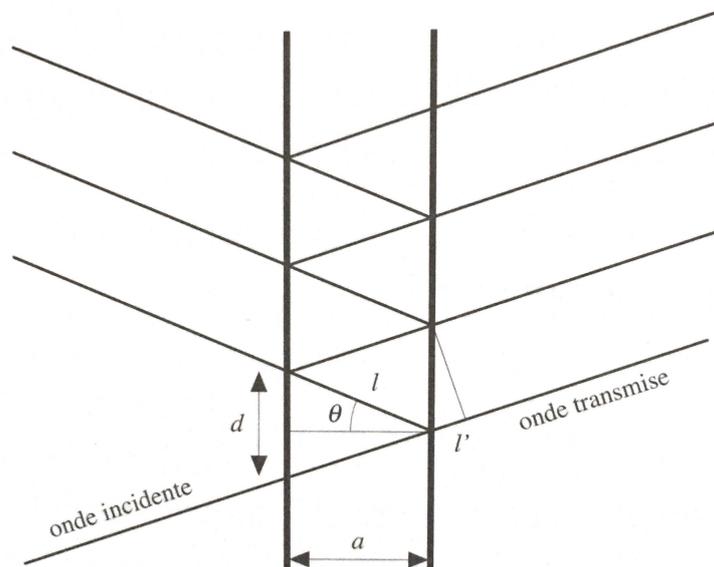
Cet appareil est constitué de deux miroirs semi-réfléchissants plans et parallèles à hauts coefficients de réflexion. La lumière entrante effectue de multiples aller-retour à l'intérieur de cette cavité optique et ressort partiellement à chaque réflexion. Les rayons sortants interfèrent entre eux et produisent des anneaux d'interférence localisés à l'infini.

L'interféromètre est constitué d'une paire de lames semi-réfléchissantes. Les lames sont en généralement en coin, pour éviter des franges d'interférence due aux faces arrières ; les dites faces arrières ont en général un traitement antireflet. Le système peut comporter en sortie une lentille de focalisation.

Le système est éclairé par un faisceau collimaté.

Pour simplifier l'étude, on suppose que l'interféromètre est éclairé par une source de lumière monochromatique. On peut représenter, comme sur la figure, un rayon en particulier, et calculer sa contribution à la lumière sortante.

※ **Warning** : Du fait de la multitude de réflexion il règne dans la cavité un champ électrique très important !



Chaque faisceau sortant de la cavité présente un déphasage ϕ les uns par rapport aux autres, dépendant de l'angle θ , l'angle entre la normale sortante à la lame et le faisceau pénétrant dans la lame.

Ces rayons interfèrent entre eux et on peut alors montrer que, selon la valeur de θ , le rayon est transmis ou pas.

On s'aperçoit en fait que seules quelques valeurs de θ permettent de transmettre la lumière du rayon incident. Chacune de ces valeurs peut être directement visualisée : elles correspondent à une série d'anneaux concentriques observés sur la figure d'interférence. En effet, en place une lentille convergente à la sortie de l'interféromètre, tous les rayons faisant le même angle θ par rapport à l'axe central de la lentille formeront un anneau.

Le déphasage entre deux rayons successifs est donnée par : $\phi = \phi(\theta) = 2kna \cos(\theta)$ où n est l'indice de réfraction de la couche, a son épaisseur, θ l'angle de réfraction et $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde. La phase du m -ième rayon est alors : $\phi_m = \phi_{m-1} + \phi = \phi_0 + m\phi$.

En utilisant le théorème de Malus (Démonstration à la fin) on arrive à calculer la différence de marche entre deux ondes successives. :

$$\delta = 2na \cos(\theta) \quad (25)$$

Or comme $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$ on a :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2na \cos(\theta) \quad (26)$$

Soit $\underline{\psi}_0$ l'amplitude complexe d'une onde plane incidente. Alors les amplitudes complexes des ondes transmises successivement ont pour expressions respectives :

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\psi}_0 T \quad \underline{\psi}_2 = \underline{\psi}_0 T R \exp(i\phi) \quad \underline{\psi}_3 = \underline{\psi}_0 T R^2 \exp(i2\phi) \quad \underline{\psi}_4 = \underline{\psi}_0 T R^3 \exp(i3\phi) \dots$$

L'amplitude complexe de l'onde transmise au point P du plan focal de L est la somme des amplitudes complexes des ondes transmises :

$$\underline{\psi}_t(P) = \sum_i \underline{\psi}_i = \underline{\psi}_0 T [1 + R \exp(i\phi) + R^2 \exp(i2\phi) + R^3 \exp(i3\phi) + \dots R^m \exp(im\phi) + \dots]$$

Comme la raison de cette progression géométrique est $R \exp(i\phi)$ et que $R < 1$, on trouve, après sommation :

$$\underline{\psi}_t(P) = \underline{\psi}_0 T \frac{1}{1 - R \exp(i\phi)} \quad (27)$$

L'intensité de l'onde résulte directement de ce qui précède :

$$I_t(P) = |\underline{\psi}_t(P)|^2 = |\underline{\psi}_0|^2 T^2 \frac{1}{|1 - R \exp(i\phi)|^2} \quad (28)$$

En introduisant l'intensité de l'onde incidente $I_0 = |\underline{\psi}_0|^2$ et en développant, cette expression devient :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R \cos(\phi))^2 + R^2 \sin^2(\phi)} = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\phi)} \quad (29)$$

Soit encore :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (30)$$

avec $M = 4R/(1 - R)^2$.

La fonction est max si $\phi = 2\pi p$ et vaut $I_{max} = I_0 (T/(1 - R))^2$.

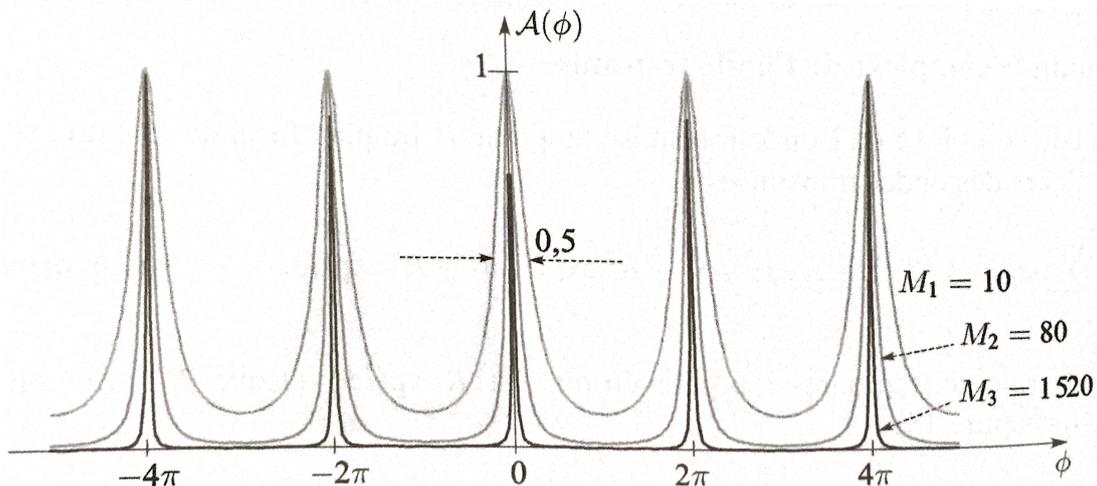
Soit :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a = \frac{4\pi\nu a}{c} \quad (31)$$

On en déduit les mode propres pour $\nu = pc/2a$ et l'intervalle spectrale $\Delta\nu = c/2a$ (distance en fréquence séparant deux pics de la fonction d'Airy) . Seul ces fréquences émergent de la cavité, les autres sont atténuées.

Fonction d'Airy :

$$A(\phi) = \frac{I_t(P)}{I_{max}} = \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (32)$$



Conclusion

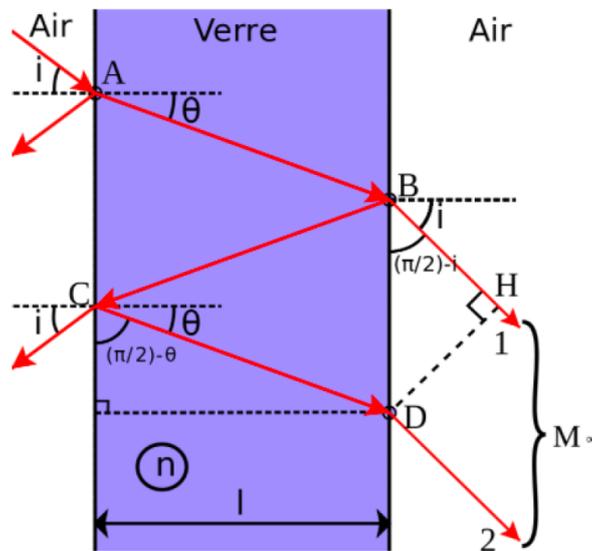
On a pu voir dans cette leçon ce qu'était le phénomène de résonance et la diversité des domaines dans lequel on peut le retrouver. La résonance est une réponse maximale d'un système à une excitation : à la résonance il absorbe le maximum d'énergie, on a le maximum de transfert énergétique.

Le phénomène de résonance est présent dans la quasi-totalité des domaines de la physique.

* Il est également présent dans des phénomènes microscopique, comme durant l'absorption ou l'émission de photon : la fréquence est tel que l'énergie $h\nu$ est égale à l'énergie de transition entre deux niveaux d'énergie, ou bien en RMN dans le domaine de la chimie.

Il permet notamment, dans le modèle de l'électron élastiquement lié, d'expliquer les pics d'absorptions atomiques. On peut l'observer tous les jours en regardant se balancer des branches d'arbres. C'est parfois un phénomène que l'on cherche à favoriser (ex : RMN, laser...) mais qui peut aussi être néfaste dans d'autres cas (ex : du pont Tacoma qui est enté en résonance avec le sillage qu'il a crée dans un vent fort auto-destruction du pont.).

Démo différence de marche



$\delta = (AM)_2 - (AM)_1 = (BM)_2 - (BM)_1 = (BC) + (CD) - (BH)$, d'après le théorème de Malus.

Or :

$$\cos(\pi/2 - i) = BH/BD = \sin(i) \text{ donc } BH = BD \sin(i)$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = l/BC = \cos(\theta) \text{ donc } BC = CD = l/\cos(\theta)$$

Donc :

$$\delta = (BC) + (CD) - (BH) = \frac{nl}{\cos(\theta)} + \frac{nl}{\cos(\theta)} - BD \sin(i)$$

Or :

$$\tan(\pi/2 - \theta) = \frac{l}{BD/2} = \frac{2l}{BD}$$

Donc :

$$BD = \frac{2l}{\tan(\pi/2 - \theta)} = \frac{2l \cos(\pi/2 - \theta)}{\sin(\pi/2 - \theta)} = \frac{2l \sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Ainsi :

$$\delta = \frac{2nl}{\cos(\theta)} - \frac{2l \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \sin(i)$$

Or d'après la lois de Descartes sur la réfraction :

$$\sin(i) = n \sin(\theta)$$

Donc :

$$\delta = \frac{2nl - 2nl \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2nl(1 - \sin^2(\theta))}{\cos(\theta)} = \frac{2nl \cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

D'où :

$$\delta = 2nl \cos(\theta)$$