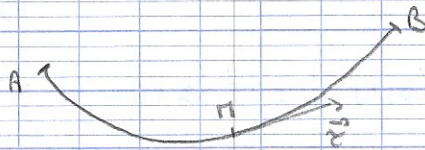


Physique des ondes

Ondes mécaniques unidimensionnelles

Corde vibrante

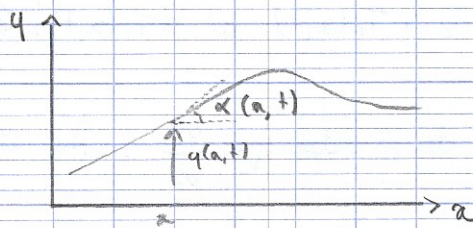
Soit une corde de longueur L , sans raideur, de masse m et masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$



↳ La portion de fil MB exerce sur AM une force \vec{T} , appelée tension du fil, tangente au fil en M pour un fil sans raideur. $\vec{T} = T(M) \vec{e}_t \rightarrow$ act° réciproque act° de AM sur MB $-\vec{T}$

Modèle: soit au repos la tension T_0 . Corde horizontale \rightarrow on néglige l'effet de la pesanteur devant la tension

On s'intéresse aux petits mouvements transversaux, c-à-d orthogonaux à la direct° initiale de la corde.



Le pt de la corde situé à l'abscisse x au repos s'est déplacé à l'instant t de $y(x, t)$ selon Oy

$\alpha(x, t)$ angle que fait la tangente à la corde

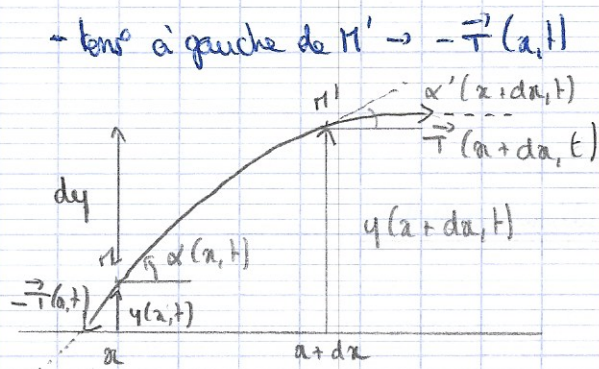
Les mvts étudiés sont petits $\Rightarrow |y(x, t)| \ll L$

$$|\alpha(x, t)| \ll 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = |\tan \alpha| \ll 1$$

Equation d'onde = soit un élément de corde MM' compris au repos entre les abscisses x et $x+dx$
 $dx \ll y(x, t)$

l'air négligé \rightarrow l'élément de corde de masse $dm = \mu dx$ est soumis à:

- tens° de la part° du fil située à droite de M' $\vec{T}(x+dx, t)$



Le mvmt de la corde a lieu selon $Oy \rightarrow \vec{a}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \vec{u}_y$

Princ de mvmt: $dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \vec{u}_y = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$

En projeté sur Oy $dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = (T \sin \alpha')(x+dx, t) - (T \sin \alpha)(x, t)$

au 1^{er} ordre en $\frac{\partial y}{\partial x} = \sin \alpha(x, t) = \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$

on se limitant à l'ordre 1 en $\frac{\partial y}{\partial x}$: $\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial(T\alpha)}{\partial x}(x, t) dx$

Le module de tense doit é écrit comme une légèr perturbation par rapport à sa valeur T_0 au repos: $T(x, t) = T_0 + T_1(x, t)$ où $|T_1(x, t)| \ll T_0$, $\frac{|T_1(x, t)|}{T_0}$ étant un

infinitement petit au moins du m^{em} ordre que $\frac{\partial y}{\partial x}$. Au 1^{er} ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$ on a $T\alpha = T_0 \alpha$

$\rightarrow \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$

L'élongat^o vérifie l'équat^o

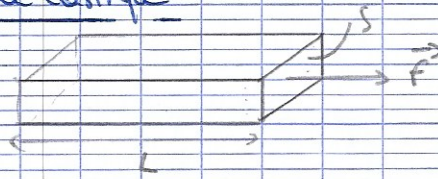
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

equat^o de d'Alembert unidimensionnelle

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

Onde acoustique dans solide élastique

Module d'Young

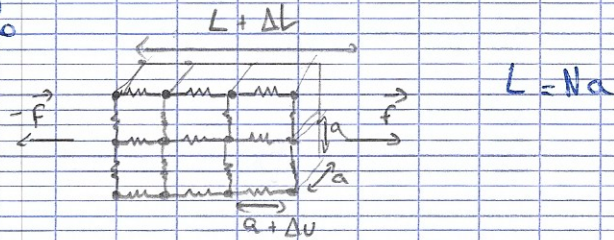


Allongement relatif $E = \frac{\Delta L}{L}$ et contrainte $\sigma = \frac{F}{S}$

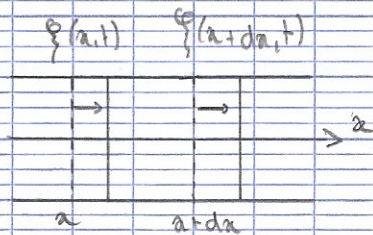
$\rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

modèle microscopique: le solide est constitué de atomes comme des pts matériels A_i identiques, de masse m , reliés par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide l_0

allongement ressort $\Delta u = \frac{\Delta L}{N}$



$\hookrightarrow E = \frac{k}{a}$



Onde de déformations longitudinales

la force de traction T permettront à la barre de section S et de longueur L de s'allonger ΔL est donnée par la loi de Hooke $T = ES \frac{\Delta L}{L}$

$\rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} (x,t) = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (x,t) \rightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$

Soluto de l'equatio de d'Alembert

• Une onde progressive se propageant a la vitesse c dans le direct de l'axe (Ox) , dans le sens positif de cet axe, sans attenuatio ni deformatio, est de la forme suivante:

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

ou f est une fct quelconque dont l'argument a la dimensi d'un tps

• Une onde progressive se propageant a la vitesse c dans le direct de l'axe (Ox) , dans le sens negatif de cet axe, sans attenuatio ni deformatio, est de la forme:

$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

ou g est une fct quelconque dont l'argument a la dimensi d'un tps

Soluto en onde progressive harmonique

On cherche soluto de la forme $s(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

Une onde progressive sinusoidale de pulsatio ω se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) a pour representio:

$$s(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

k = module du vecteur d'onde

periode temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$ \rightarrow periode spatiale longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

frequence spatiale \rightarrow nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

Une onde progressive sinusoidale se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) peut s'ecrire:

$$s(x, t) = a_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

	Période	Longueur	Amplitude
Temps	T	λ	ω
Espace	λ	σ	k

relat° de dispersion : $k = \frac{\omega}{c}$

on peut également avoir : $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$

Notat° complexe : $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$\hookrightarrow \underline{s}(x, t) = s_0 \exp(i(\omega t - kx + \varphi_0)) = \underline{s_0} \exp(i(\omega t - kx))$

\hookrightarrow avec $\underline{s_0} = s_0 \exp(i\varphi_0)$

Solut° en onde progressive

on voit qu'on a $\int s(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) = f(x - ct)$ dans sens positif
 $s(x, t) = g(t + \frac{x}{c}) = G(x + ct)$ dans sens négatif

superposit° $s(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c}) = f(x - ct) + G(x + ct)$

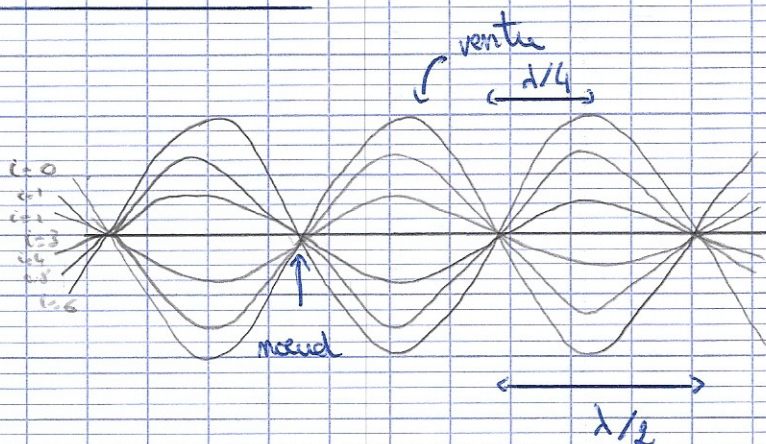
Ondes stationnaires

Les solut° en ondes stationnaires sont de la forme

$$s(x, t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \\ = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$

Etude de l'onde stationnaire



Chaque pt de la corde a un movt sinusoidal, tous les pts vibrent en phase ou opposés de phase. En un pt de la corde, l'amplitude de la vibat° est $|y \cos(kx + \varphi)|$.
 Il existe des pts qui ne bougent jamais ($y(x,t) = 0 \forall t$) : noeuds. Ils se situent en x_n tq $kx_n + \varphi = (n + \frac{1}{2})\pi$. Les noeuds sont distants de $\frac{\lambda}{2}$.

Pts amplitude max \rightarrow vents. situés en x'_m tq $kx'_m + \varphi = m\pi$.

Régime libre d'une corde fixée à ses deux extrémités

Conditi° aux limites et conditi° initiales

$$\hookrightarrow y(0,t) = 0 \text{ et } y(L,t) = 0 \quad \forall t \in (0, L)$$

$$\begin{cases} y(x,0) = a(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = b(x) \end{cases} \quad (C.I.)$$

On veut $y(x,t)$ se la forme $y(x,t) = \cos(\omega t + \varphi) (A \cos(kx) + B \sin(kx))$

$$y(0,t) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$y(L,t) = 0 \quad kL = m\pi$$

Le nombre des valeurs d'ondes k et la pulsati° ω ne peuvent prendre que des valeurs discrètes

$$k_m = m \frac{\pi}{L} \text{ et } \omega_m = k_m c = m \frac{\pi c}{L} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Les fréquences ν_m et donc toutes multiples de ν_0 fréquence fondamentale

$$\nu_m = m \nu_0 \quad \text{avec} \quad \nu_0 = \frac{c}{2L} \quad \text{et} \quad L = m \frac{\lambda_m}{2}$$

Les solutions particulières en ondes stationnaires sont :

$$y_m(x, t) = C_m \cos\left(m \frac{\pi c}{L} t + \varphi_m\right) \sin\left(m \frac{\pi}{L} x\right) \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Ce sont les modes propres, les pulsats ω_m étant les pulsats propres. Pour $m=1$ on parle de mode fondamental et pour $m > 1$ de m -ième harmonique

Solⁿ générale = superpositⁿ de tous les modes propres :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{\pi c}{L} t\right) \right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

conditⁿ initiales : $y(x, 0) = a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Quand $kL = m\pi$ de quand la fréquence excitatrice est une des fréquences propres de la corde, $y(x, t)$ tend vers ∞ = il y a résonance.

↳ pour obtⁿ de m^êm pulsatⁿ que l'excitatⁿ

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \quad \omega = kc$$

$$\rightarrow y(x, t) = \cos(\omega t) \left(\cos(kx) - \frac{\cos(kL)}{\sin(kx)} \sin(kx) \right)$$

$$= y_0 \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Ondes acoustiques dans les fluides

Approximat° acoustique

Le fluide est considéré comme parfait et on néglige l'influence de la pesanteur

Au repos $\rightarrow p_0$, masse volumique ρ_0 , vitesse particulière nulle

L'onde sonore est une perturbation par rapport à cet état d'équilibre

\hookrightarrow le fluide est donc décrit par:

- press° $p(M,t) = p_0 + p_1(M,t)$ avec $|p_1(M,t)| \ll p_0$

- masse volumique $\rho(M,t) = \rho_0 + \rho_1(M,t)$ avec $|\rho_1(M,t)| \ll \rho_0$

- vitesse particulière $\vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t)$ avec $\|\vec{v}_1(M,t)\| \ll v_0$ où v_0 est une vitesse

p_1 est appelé press° acoustique ou surpression

Flux en équat° Eulerienne

Soit dans un fluide : $\frac{\partial p}{\partial t}(M,t) + \text{div}(p\vec{v})(M,t) = 0$

$$\rho(M,t) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M,t) + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}(M,t) \right) = -\text{grad} p(M,t)$$

Soit $p = f(p)$

\hookrightarrow à l'ordre 1, l'équat° locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}(M,t) + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1(M,t) = 0$$

$$\text{Soit } \left\| \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right\| \sim \frac{U}{T} \text{ et } \|(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1\| \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\rightarrow \frac{\|(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right\|} \sim \frac{U^2}{L} \cdot \frac{T}{U} = \frac{U}{L/T} \ll 1$$

On $\frac{L}{T} = c$ célérité des ondes sonores dans le milieu $\Rightarrow c \ll c$
 \hookrightarrow vitesse particulière négligeable devant la célérité des ondes

L'équation d'Euler linéarisée dans le cadre de l'approximation acoustique est:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t) = -\vec{\text{grad}} p_1(M, t)$$

On a $p = f(p)$ \rightarrow au 1^{er} ordre $p = f(p_0 + p_1) = f(p_0) + f'(p_0) p_1$
 $\hookrightarrow p = p_0 + \left(\frac{dp}{dp}\right)_{p_0} p_1$

$$\text{soit } p_1 = \left(\frac{dp}{dp}\right)_{p_0} p_1$$

Alors $p_1(M, t) = \rho_0 \chi_0 p_1(M, t)$ où $\chi_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dp}{dp}\right)_{p_0}$

Les eq à considérer sont donc:

$$\chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}(M, t) = -\text{div} \vec{v}_1(M, t)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M, t) = -\vec{\text{grad}} p_1(M, t)$$

Eq de propagation pour la supersonique

\hookrightarrow on suppose $p_1(M, t) = p_1(x, t) \rightarrow \vec{\nabla} p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x} \vec{u}_x \rightarrow \vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$

$$\chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x, t)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x, t)$$

Théorème de Schwarz $\rightarrow \chi_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial a} \right)$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = - \frac{\partial^2 p_1}{\partial a \partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial a} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} (a, t) = \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} (a, t)$$

$$p_1 = p_1(a, t) \rightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial a^2} = \Delta p_1$$

La composante p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à 3 dimensions :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} (M, t) = c^2 \Delta p_1 (M, t) \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p=p_0}}}$$

Vitesse du son

La vitesse du son dans un fluide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$$

$$[\rho_0] = \text{ML}^{-3}$$

$$[\chi_0] = \text{M}^{-1} \text{L T}^{-2}$$

$$\text{ou } \chi_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{p=p_0}$$

Vitesse dans un gaz = gaz parfait \rightarrow loi de Laplace = $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ capacité thermique à } p \text{ et } v \text{ cste}$$

$$p = A \rho^{1/\gamma}$$

$$\frac{dp}{d\rho} (p=p_0) = \frac{A}{\gamma} \rho^{1/\gamma - 1} = \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0}$$

$$\chi_0 = \frac{1}{\gamma \rho_0}$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

γ : rapport adiabatique
 T_0 : T° au repos

↳ la célérité du son dans un liquide est ~ 5 fois plus grande que dans un gaz

Ondes planes progressives harmoniques

↳ sous la forme $p_i^{(n,t)} = p_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)$ $\vec{k} = k \vec{m} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{m}$ et $\vec{x} = \vec{or}$

↳ solution de l'éq de d'Alembert si $\omega = kc$

↳ complexe $p_i(M,t) = p_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}))$ $p_0 = p_0 \exp(i\varphi)$

$$\text{grad } p_i = -i \vec{k} p_i \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{v}_i = -i \vec{k} \cdot \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v}_i = \omega k_0 p_i$$

$$p_0 \omega \vec{v}_i = p_i \vec{k}$$

↳ vitesse est colinéaire à \vec{k} donc à la direction de propagation = onde de vitesse longitudinale

Impédance acoustique : on a $Z_a = \frac{\omega p_0}{k} \vec{v}_i = \rho_0 c \vec{v}_i$

On définit l'impédance acoustique du milieu par le rapport $\frac{p_i(M,t)}{v_i(M,t)}$ dans le cas d'une onde plane progressive harmonique

$$Z_a = \frac{p_i(M,t)}{v_i(M,t)} = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_0}}$$

$$\text{ou} \quad \vec{v}_i(M,t) = \frac{1}{Z_a} p_i(M,t) \vec{m} = \frac{1}{\rho_0 c} p_i(M,t) \vec{m}$$

$$Z_{a, \text{solide}} > Z_{a, \text{liquide}} \gg Z_{a, \text{gaz}}$$

Aspect énergétique

↳ puissance transférée à travers une surface S : $\mathcal{P} = \iint_{\text{ncv}} (\rho_0 + \rho_1(M,t)) d\vec{S}_n \cdot \vec{\Pi}(M,t)$

vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$ \rightarrow vecteur de Poynting sonore

$$\vec{\Pi}(M,t) = (\rho_0 + \rho_1(M,t)) \vec{v}_1(M,t)$$

↳ exprime transfert énergie dû à la
oscillation

↳ Densité volumique d'énergie = densité volumique d'énergie cinétique

$$d\mathcal{E}(M,t) = \frac{1}{2} \rho(M,t) v_1^2(M,t) d\mathcal{E}_n$$

$$e_c(M,t) = \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2(M,t)$$

on a aussi $d\mathcal{E}_p(M,t) = e_p(M,t) d\mathcal{E}_n$

$$\hookrightarrow e(M,t) = e_c(M,t) + e_p(M,t)$$

bilan énergétique = eq. locale de conservat° de l'énergie

$$\frac{\partial e}{\partial t}(M,t) + \text{div} \vec{\Pi}(M,t) = 0$$

↳ densité volumique énergie potentielle = à l'ordre de ρ_1^2

$$e_p(M,t) = \kappa_0 \rho_0 p_1(M,t) + \frac{1}{2} \kappa_0 \rho_1^2(M,t)$$

\rightarrow à l'ordre 1 $e_1(M,t) = \kappa_0 \rho_0 p_1(M,t)$

$$\text{ordre 2 } e_2(M,t) = \frac{1}{2} \kappa_0 \rho_1^2(M,t) + \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2(M,t)$$

bilan énergétique global = $\oint_{\text{ncv}} \vec{\Pi}(M,t) \cdot d\vec{S}_p + \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ avec $\mathcal{E}(t) = \iiint_{\text{ncv}} e(M,t) d\mathcal{E}_n$

Cas général = Une onde plane dans le cas général s'écrit comme la superposition de 2 ondes planes progressives en sens inverse

$$v_1(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$p_1(x,t) = Z_a (f(x-ct) - g(x+ct)) = \rho_0 c (f(x-ct) - g(x+ct))$$

d'où

$$e(x,t) = \frac{1}{2} \rho_0 (f(x-ct) + g(x+ct))^2 + \frac{1}{2} \rho_0 c^2 (f(x-ct) - g(x+ct))^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 Z_a}} \Rightarrow e(x,t) = \rho_0 (f'(x-ct) + g'(x+ct))$$

$$\vec{\pi}(x,t) = \rho_0 c (f'(x-ct) - g'(x+ct)) \vec{u}_x$$

Intensité sonore

Intensité sonore en decibels : $I = \langle \pi \rangle$ ou $I = \langle \vec{\pi} \cdot \vec{n} \rangle$

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{où } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

↳ intensité minimale que peut détecter l'humain

Pour une onde progressive harmonique $I = \frac{P_{eff}}{\rho_0 c}$ avec $P_{eff} = \frac{P_{max}}{\sqrt{2}}$

$$\text{↳ } I_{dB} = 10 \log \frac{P_{eff}}{P_{eff,0}} \quad \text{où } P_{eff,0} = \sqrt{\rho_0 c I_0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

Onde sphérique harmonique

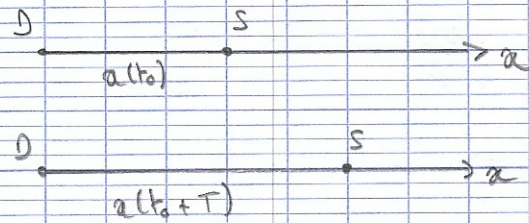
On sait que $\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1(x,t)$

En sphérique $\Delta p_1(x,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} (x,t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} (x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} (x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial t^2} (x,t)$$

Effet Doppler longitudinal

Quand un émetteur d'onde sinusoidal est en mouvement par rapport à un récepteur, celui-ci attribue aux vibrations qu'il reçoit une fréquence différente de la fréquence émise \rightarrow C'est l'effet Doppler



D détecteur
S source se déplaçant à v
S émet une onde de période T
célérité du son = c

t_0 instant de l'émission de S

Le détecteur D en $x(t_0)$ de la source reçoit à $t_0' = t_0 + \frac{x(t_0)}{c}$

$t_1 = t_0 + T$ l'instant d'émission d'une période

D reçoit à $x(t_0 + T)$ de la source et reçoit le signal à $t_1' = t_0 + T + \frac{x(t_0 + T)}{c}$

Période perçue par le détecteur $T' = t_1' - t_0' = T + \frac{x(t_0 + T) - x(t_0)}{c}$

Source se déplaçant à une vitesse v $\rightarrow x(t_0 + T) - x(t_0) = Tv$

$$\Rightarrow T' = T \left(1 + \frac{v}{c} \right) \Rightarrow f' = \frac{1}{T'} = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}$$

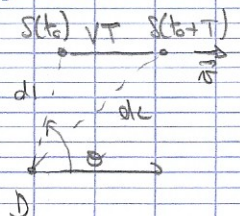
en pratique $v \ll c$

f' est relié à f émise par la source $f' = f \left(1 - \frac{v}{c} \right)$

$v > 0$ source s'éloigne $\Rightarrow f' < f$ son grave + grave
 $v < 0$ " s'approche $\Rightarrow f' > f$ son aigu + aigu

Δ si la source se déplace pas en direct du détecteur $v \Rightarrow v \cos \theta$

$$f' = f \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c} \right)$$



Onde électromagnétique dans le vide

Dans le vide $\rho(M,t) = 0$ et $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = 0 & (MG) \\ \operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 & (M\phi) \\ \operatorname{rot} \vec{E}(M,t) = - \frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} & (MF) \\ \operatorname{rot} \vec{B}(M,t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} & (MA) \end{cases}$$

$$\text{soit (MF)} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = - \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial (\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Et plus } \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = - \Delta \vec{E}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

à la même façon

$$\Delta \vec{B}(M,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2} \quad \rightarrow \text{eq de d'Alembert}$$

Ondes planes progressives harmoniques

Onde plane : si l'ensemble des pts M tq $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, et des plans, alors l'onde est plane. À chaque valeur de \vec{k} correspond un plan affine (plan d'onde), tous ces plans st // entre eux. Le champ élec. ne dépend que de la variable d'espace $\vec{\rho} = \vec{OM} \cdot \vec{m}$ et du tps.

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{\rho}, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{\rho}, t)}{\partial \rho^2}$$

Onde progressive harmonique

↳ Les 3 composantes cartésiennes de $\vec{E}(M,t)$ et des ondes planes progressives harmoniques, de même pulsation ω et de même vecteur d'onde $\vec{k} = k \cdot \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \rightarrow$ pareil pour $\vec{B}(M,t)$

→ seules leur phase et leur amplitude diffèrent a priori

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \vec{u}_x \\ &+ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \vec{u}_y \\ &+ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Les eq. de Maxwell et invariantes par translation dans le temps et les espaces

$$\rightarrow \vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

$$\text{avec } \vec{E}_0 = E_0 \exp(i\varphi_x) \vec{u}_x + E_0 \exp(i\varphi_y) \vec{u}_y + E_0 \exp(i\varphi_z) \vec{u}_z$$

Eq de Maxwell en notat° complexe

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \vec{E}) &\left\{ \begin{aligned} -ik \cdot \vec{E}(M,t) &= 0 \\ -ik \cdot \vec{B}(M,t) &= 0 \end{aligned} \right. \\ (\nabla \wedge \vec{E}) &\left\{ \begin{aligned} -ik \wedge \vec{E}(M,t) &= -i\omega \vec{B}(M,t) \\ -ik \wedge \vec{B}(M,t) &= i\omega \epsilon_0 \rho_0 \vec{E}(M,t) \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{aligned} \text{div } \vec{a} &= -ik \cdot \vec{a} \\ \text{rot } \vec{a} &= -ik \wedge \vec{a} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = i\omega \rho_0$$

Structure de l'onde plane progressive harmonique

$$(\nabla \cdot \vec{B}) \rightarrow \vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M,t)}{\omega}$$

$$\text{ou } \vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M,t)}{\omega} \quad \text{la partie réelle}$$

Les vecteurs \vec{E} et \vec{k} sont orthogonaux, alors

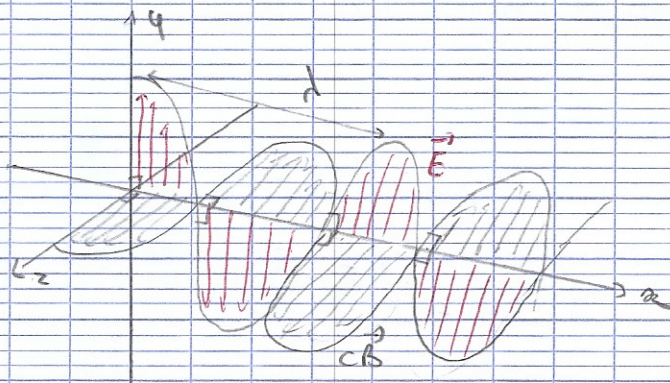
$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\| \cdot \|\vec{k}\|}{\omega} = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

\vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux en phase

$$\text{Et } \vec{n} \cdot \vec{A} \rightarrow \vec{E}(M,t) = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}(M,t) \quad \text{avec } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

Alors pour une onde plane progressive, les vecteurs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ et \vec{n} forment un trièdre direct, le norme de $\vec{B}(M,t)$ étant égale à $\frac{1}{c} \times \|\vec{E}\|$ ou :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}(M,t)}{c} \quad \text{maude que pour les OPP. A}$$



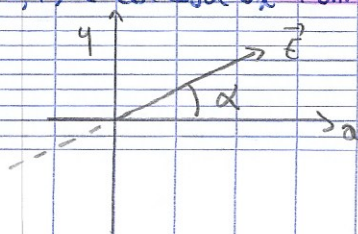
Polarité des ondes planes progressives harmoniques

Soit une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens z croissant. Son vecteur d'onde est $\vec{k} = k \vec{u}_z = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$. Son champ elec. est transverse, de sa coordonnée selon \vec{u}_z est nulle. Il s'écrit de manière générale de la façon :

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y$$

On va s'intéresser à la manière dont s'effectue la variation sinusoidale du champ électrique dans un plan d'onde. Plus précisément on va étudier le contour décrit par l'extrémité du vecteur \vec{E} dans un plan d'onde orienté de telle sorte que l'observateur voit arriver l'onde vers lui.

Polarité rectiligne : $\vec{E}(z,t) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz - \varphi)$



en complexe: $\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}$ où $\vec{u} = \cos\alpha \vec{u}_x + \sin\alpha \vec{u}_y$
 et $\underline{E}_0 = E_0 \exp(-i\varphi)$

polarisation elliptique = le cas le plus générale d'onde polarisée

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y$$

↳ la courbe décrite par l'extrémité de \vec{E} est une ellipse dont les axes ne st en générale pas les axes O_x et O_y

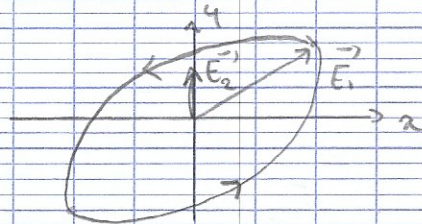
$$\text{soit } \cos(\omega t - kz - \varphi) = \cos(\omega t - kz) \cos\varphi + \sin(\omega t - kz) \sin\varphi$$

en résolvant le syst. en $\cos(\omega t - kz)$ et en $\sin(\omega t - kz)$ puis en éliminant le tps par la relat° $\cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz) = 1$, on a l'équat° de la courbe pour $\sin\varphi \neq 0$:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y - \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \cos\varphi}{E_{0y} \sin\varphi}\right)^2 = 1$$

les axes de l'ellipse sont O_x et O_y uniquement qd $\cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

Si $\varphi = 0$ ou π l'ellipse se réduit à un segment de droite: l'onde est polarisée rectilignement!





en complexe $\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kz))$ $\underline{E}_0 = E_{0y} \exp(-i\varphi) \vec{u}_y + E_{0x} \vec{u}_x$

Sens de parcours de l'ellipse? $\frac{\partial E_y}{\partial t}(t=0) = -\omega \sin(-\frac{\pi}{4}) > 0$

La composante selon O_y augmente, l'ellipse est bien décrite dans le sens horaire
 $\varphi = 0$ rectiligne (\rightarrow); $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ elliptique gauche (\curvearrowright), $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (\odot) ellipt. droite

$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (\odot) ellipt. gauche; $\varphi = \pi$ rectiligne (\leftarrow); $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ (\curvearrowleft) ellipt. droite

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$ () ellip. droit ; $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ () ellip. droit

Particularité circulaire = $E_x = E_y$ et où $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

↳ circulaire gauche : $\vec{E}(z,t) = E_0(\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y)$

↳ $\vec{E}(z,t) = E_0 \exp(i(\omega t - kz))(\vec{u}_x - i\vec{u}_y)$

circulaire droit : $\vec{E}(z,t) = E_0(\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x - \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y)$

↳ $\vec{E}(z,t) = E_0 \exp(i(\omega t - kz))(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)$

Aspect énergétique

La densité volumique d'énergie $u_{em}(M,t)$ est composée de la densité volumique d'énergie électrique :

$$u_e(M,t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M,t)}{2}$$

densité volumique d'énergie magnétique

$$u_m(M,t) = \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}$$

or $\|B\| = \frac{\|E\|}{c} \Rightarrow u_m(M,t) = \frac{E^2(M,t)}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2(M,t)}{2} = u_e(M,t)$

Vecteur de Poynting

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M,t) &= \vec{E}(M,t) \wedge \frac{\vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} (E^2 \vec{n} - \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E}}_{=0}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E^2(M,t) \vec{n} = \epsilon_0 c E^2(M,t) \vec{n} \end{aligned}$$

↳ il est dirigé selon la direct° de propagat° de l'onde.

On a aussi $\vec{\Pi}(M,t) = c u_{em}(M,t) \vec{n}$

Valeurs moyennes

Soit une OPPH se propageant dans le sens des z croissants :

$$\vec{E}_{\text{real}}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y$$

et $\vec{B}_{\text{real}}(z, t) = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{\text{real}}(z, t)}{c} = \frac{-E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)}{c} \vec{u}_x + \frac{E_{0x} \cos(\omega t - kz)}{c} \vec{u}_y$

ou en complexe : $\underline{\vec{E}}(z, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - kz))$ et $\underline{\vec{B}}(z, t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp(i(\omega t - kz))$

$$\text{avec } \underline{\vec{B}}_0 = \frac{1}{c} \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}_0$$

Densité volumique d'énergie électrique : $\langle u_e(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E_{\text{real}}^2(z, t) \rangle$

$$= \frac{1}{4} \epsilon_0 E^2$$

Densité volumique d'énergie magnétique : $\langle u_m(z, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \langle B_{\text{real}}^2(z, t) \rangle = \langle u_e(z, t) \rangle$

Densité volumique d'énergie électromagnétique : $\langle u_{em}(z, t) \rangle = \langle u_e(z, t) \rangle + \langle u_m(z, t) \rangle$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Vecteur de Poynting : $\langle \vec{\Pi}(z, t) \rangle = \langle \vec{E}_{\text{real}}(z, t) \wedge \frac{\vec{B}_{\text{real}}(z, t)}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$

Phénomène de propagation linéaire - Dispersion, absorption

Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense

Un plasma est un milieu ionisé, constitué d'ions positifs, de charge $+e$ et de masse M , et d'électrons, de charge $-e$ et de masse m . Le plasma est supposé peu dense, de telle sorte que les interactions entre les charges élect. puissent être négligées.

↳ milieu neutre (n_0 ions et n_0 électrons par unité de volume)

Soit la propagation dans le plasma d'une onde électromagnétique, plane, harmonique et harmonique (Oz direction de propagation). Le champ élec. \vec{E} s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)) \quad \vec{E}_0 \text{ orthogonal à } Oz \text{ car onde transverse.}$$

Le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{k}{\omega} (\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0) \exp(i(\omega t - kz))$$

Sous l'acte du champ électromagnétique, les particules chargées vont se mettre en mouvement. Les ions étant plus lourds que les électrons, on les suppose fixes et on ne considère que le mouvement des électrons.

• Pt de vue mécanique du pt = $\vec{R}(t)$ posit^{on} de l'électron.

↳ laide la qte de mvtt :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}(\vec{R}(t), t) - e \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(\vec{R}(t), t)$$

L'éq se simplifie car les e^- ne se déplacent pas rapidement.

↳ l'acte du champ magnétique de l'onde est négligeable devant celle du champ électrique

- le champ élec. uniforme à l'échelle du déplacement des e^-

$$\text{On a } \|\vec{E}_0\| \sim eVB \text{ ou } \|\vec{B}\| \sim \frac{kE}{\omega} \Rightarrow \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

l'amplitude A du mvnt est tq: $\frac{A}{d} \sim \frac{v}{\omega d} \sim \frac{kv}{\omega} \sim \frac{v}{c} \ll 1$

↳ le terme kz peut être considéré en et inclus dans \vec{E}_0

Alors on a : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}_0 \cos(\omega t)$

• Pt de vue meca flux : particule de fluide de volume $d\tau$, contenant $n_0 e^-$ par unité de volume, animée de la vitesse $\vec{v}(M, t)$

l'eq. d'Euler :

$$m_0 m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -m_0 e \vec{E}(M, t) - m_0 e \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

↳ acc^o de \vec{B} négligeable devant \vec{E}

accélération convective négligeable devant l'accélération locale.

↳ $\|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\| \sim \frac{v^2}{d}$ et $\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\| \sim \frac{v}{T}$

donc $\frac{\|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\|}{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|} \sim \frac{v^2/d}{v/T} = \frac{vT}{d} = \frac{vk}{\omega} \sim \frac{v}{c} \ll 1$

On obtient : $m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E}(M, t)$

Conductivité du plasma

On a $m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E}(M, t)$

en intégrant $\rightarrow \vec{v}(M, t) = \frac{e}{m\omega} \vec{E}(M, t)$

Alors le vecteur densité de courant élec. dans le plasma :

$$\vec{j}(M, t) = -n_0 e \vec{v}(M, t) = -i \frac{n_0 e^2}{m\omega} \vec{E}(M, t)$$

On a $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$ **plasma**

On a alors $\vec{j} = -i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$

Conductivité complexe du plasma :

$$\underline{\gamma} = -i \frac{m_0 e^2}{m c \omega} = -i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{m_0 e^2}{m \epsilon_0}}$$

↳ la conductivité est imaginaire pure.

Relat° de dispersion

Eq de Maxwell pour le plasma :

(RG) $\text{div } \vec{E}(M,t) = 0$

(RNF) $\text{div } \vec{B}(M,t) = 0$

(RFI) $\text{rot } \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t) = -i\omega \vec{B}(M,t)$

(RFI) $\text{rot } \vec{B}(M,t) = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t) = \mu_0 (\underline{\gamma} + i\omega \epsilon_0) \vec{E}(M,t)$

(RFI) $\rightarrow \text{rot } \vec{B}(M,t) = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\underline{\gamma}}{i\omega \epsilon_0}\right) i\omega \vec{E}(M,t) = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t)$

Les eq. de Maxwell dans le plasma prennent donc la m[^]me forme que dans un milieu vide de charge et de courant, à condit° de remplacer ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$

La relat° de disper° s'écrit :

$$k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 = \epsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_p^2) = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

• $\omega > \omega_p$

↳ k réel

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

Des ondes PP de pulsat° \neq se x propagent de pas à la même vitesse \rightarrow milieu dispersif

• $\omega < \omega_p$

↳ k imaginaire

$k = \pm i k_2$ avec

$$k_2 = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \frac{1}{\delta}$$

+ \rightarrow facteur $\exp(+k_2 z)$ si - \rightarrow $\exp(-k_2 z)$

On a $\vec{E} = \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(i\omega t)$

supposons onde polarisée verticalement $\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos(\omega t - \varphi) \vec{v}_z$

δ distance caractéristique d'atténuation

Pour qu'une onde se propage dans le plasma, il faut que sa fréquence soit supérieure à la pulsation plasma ω_p , celle-ci apparaît donc comme une pulsation de coupure basse

Propriétés d'une onde dans un conducteur

Pour décrire le comportement des électrons d'un conducteur métallique

↳ modèle de Drude → électrons libres soumis à la force qu'exerce le champ électromagnétique et à la force de frottement visqueux qui traduit l'effet des collisions à l'intérieur du milieu $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t) \quad \vec{E} = \cos t$

pt de vue méca du pt

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t) - e\vec{E}(\vec{R}(t), t) - e\vec{v}(t) \wedge \vec{B}(\vec{R}(t), t)$$

hyp: \vec{B} négligeable devant \vec{E}
 \vec{E} uniforme à l'échelle des déplacements des e^- .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t) - e\vec{E}_0 \exp(i\omega t)$$

pt de vue méca flu

$$m_0 m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}(M, t) \right) = -\frac{m_0 m}{\tau} \vec{v}(M, t) - m_0 e \vec{E}(M, t) - m_0 e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

hyp: \vec{B} négligeable devant \vec{E} et accélération convective \ll accélération locale

$$\Rightarrow m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\mathbf{M}, t) = -\frac{m}{\hbar} \vec{v}(\mathbf{M}, t) - e \vec{E}(\mathbf{M}, t)$$

Conductivité complexe

$$\vec{v}(\mathbf{M}, t) = \vec{v}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

$$\hookrightarrow (im\omega + \frac{m}{\hbar}) \vec{v}(\mathbf{M}, t) = -e \vec{E}(\mathbf{M}, t)$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}' = \frac{-e\hbar}{m(1+i\hbar\omega)} \vec{E}(\mathbf{M}, t)$$

Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(\mathbf{M}, t) = -n_0 e \vec{v}(\mathbf{M}, t)$

$$\vec{j}(\mathbf{M}, t) = \frac{\gamma_0}{1+i\hbar\omega} \vec{E}(\mathbf{M}, t) \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}(\mathbf{M}, t)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_0}{1+i\hbar\omega} \quad \text{car } \gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \hbar}{m}$$

Eq de Maxwell dans le conducteur

$$(1-A) \text{ s'écrit } \text{rot } \vec{B}(\mathbf{M}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0}\right) i\omega \vec{E}(\mathbf{M}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\mathbf{M}, t)$$

Relat° de dispersion

$$\text{en prenant } \underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0}\right)$$

$$k^2 = \underline{\underline{\epsilon}} \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\gamma}{i\omega\epsilon_0}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{1+i\hbar\omega}$$

Dispersion, absorption

↳ dans les 2 cas k complexe \rightarrow sa partie réelle et imaginaire jouent des rôles \neq
Et,

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}(z)))$$

On pose $\underline{k}(z) = k_1(z) - ik_2(z)$

Alors $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \exp(-k_2(z)) \exp(i(\omega t - k_1(z)))$

Onde plane rectilignement $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$

↳ $\vec{E}(z,t) = E_0 \exp(-k_2(z)) \cos(\omega t - k_1(z) + \varphi) \vec{u}_x$

Dans un milieu passif $k_2 > 0$ qd on pose $\underline{k} = k_1 - ik_2$

↳ milieu dissipatif de l'énergie \rightarrow l'onde s'atténue

↳ milieu actif \rightarrow onde amplifiée $k_2 < 0$

Vitesse de phase

L'onde se propage à la vitesse $v_p(\omega) = \frac{\omega}{|k_1(\omega)|}$ appelé vitesse de phase

Distance d'atténuation = $\delta(\omega) = \frac{1}{|k_2(\omega)|}$ le milieu est absorbant

Paquets d'ondes

↳ ici on prendra k réel : $k = k(\omega)$

Signal comportant deux fréquences voisines

Signal comportant 2 fréq. voisines

↳ signal de 2 composantes de pulsat° ω_1 et ω_2

$$\Rightarrow s(z, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k(\omega_1)z) + s_0 \cos(\omega_2 t - k(\omega_2)z + \varphi)$$

Les pulsat° et proches l'une de l'autre

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\delta\omega}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} \quad \text{avec} \quad \delta\omega \ll \omega_0$$

En posant $k_0 = k(\omega_0)$:

$$k(\omega_1) = k_0 - \frac{\delta k}{2} \quad \text{et} \quad k(\omega_2) = k_0 + \frac{\delta k}{2} \quad \text{avec} \quad \delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \delta\omega$$

Alors

$$\begin{aligned} s(z, t) &= 2s_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2s_0 \cos\left(\omega_0 t - k_0 z + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}z + \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

A z fixe $\rightarrow \omega_0 \Rightarrow \frac{\delta\omega}{2} \Rightarrow$ variat° temporelles du 1^{er} terme plus rapide que le 2nd terme

↳ le signal est constitué d'une sinusoïde de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dont l'enveloppe est une

sinusoïde de période $\Delta T = \frac{4\pi}{\delta\omega}$ bcp plus grande

1^{er} terme \rightarrow OPPH de célérité ω_0/k_0

$$\text{2nd terme} \rightarrow \text{OPPH " " } \frac{\delta\omega/\delta k}{k_0} = \frac{\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}}$$

L'onde moyenne se propage à la vitesse de phase

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

à la vitesse de l'enveloppe qui, elle, se propage à la vitesse de groupe

$$v_g(\omega) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{(k=k_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{(\omega=\omega_0)}}$$

Paquet d'ondes

↳ def: m. l'OPPH, m. l'onde étudiée dans le paragraphe précédent m'ont de réalité physique → une onde réelle a une extens^o temporelle et une extens^o spatiale limitée (les 2 étant liés d'une manière déterminée par l'eq. d'onde).

Soit $s(z, t)$ une onde se propageant dans le milieu étudié, le plasma perdure.
L'analyse de Fourier permet d'écrire la fct^e $s(z, t)$:

$$s(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)z)) d\omega$$

avec

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(0, t) \exp(-i\omega t) dt$$

Seuls les ω positifs ont un sens physique, on convient que $k(-\omega) = -k(\omega)$

↳ $\underline{A}(-\omega) = \underline{A}^*(\omega)$ car $s(z, t)$ est réelle.

↳ $s(z, t) = \Re(\underline{s}(z, t))$ avec $\underline{s}(z, t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)z)) d\omega$

On parle de paquet d'ondes quand l'amplitude $A(\omega)$ ne prend de valeurs significatives sur un petit intervalle de pulsations $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$, avec $\delta\omega \ll \omega_0$

Dans ce cas, il est indifférent d'écrire $\underline{u}(z, t) =$

$$\underline{u}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} A(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)z)) d\omega$$

Retour au la propagation d'une onde dans un conducteur

Effet de peau

la relat° de dispersion : dans le cas des "basses fréquences", c'est $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, la relat°

de disper° se simplifie car $\frac{\omega^2 \epsilon^2}{\mu_0 \mu \omega} \ll 1$

$$\rightarrow \underline{k}^2 = i\mu_0 \mu \omega \Leftrightarrow \underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta} \text{ ou } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \omega}}$$

la vitesse de phase, vitesse de groupe = le vecteur d'onde s'écrit $\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta} = k_1(\omega) - ik_2(\omega)$

$$k_1(\omega) = \pm \frac{1}{\delta} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \mu \omega}{2}} = k_2(\omega)$$

on choisit $k_1 > 0$

$$\Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k_1} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \mu}}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{2}}}$$

\rightarrow le milieu est dispersif. Un paquet d'onde s'y propage en se déformant

↳ Champ électromag. = est OPH dans le sens z croissant, polarisé rectilignement

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \text{(MF)} \Rightarrow \underline{\vec{B}}(z,t) &= \frac{\vec{\nabla}' \wedge \underline{\vec{E}}(z,t)}{\omega} \\ &= \frac{k}{\omega} E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \\ &= \frac{1-i}{\delta\omega} E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{les champs réels sont } \vec{E}_{\text{real}}(z,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \text{et } \vec{B}_{\text{real}}(z,t) &= \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right) \vec{u}_y \\ &= \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_y \end{aligned}$$

\vec{E} et \vec{B} st déphasés de $\pi/4$

↳ valeur densité de volume s'écrit grâce à la loi d'Ohm (dans la limite des basses fréquences) :

$$\vec{j}(z,t) = \gamma_0 \vec{E}_{\text{real}}(z,t) = \gamma_0 E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

↳ Épaisseur de peau = les amplitudes des champs et des courants dans le conducteur décroissent en $\exp(-z/\delta)$. La longueur caractéristique de cet amortissement est :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On l'appelle épaisseur de peau \rightarrow représente la profondeur de pénétration du champ électromag. et des courants à l'intérieur du conducteur. δ est faible pour un bon conducteur aux fréq moyennes et élevées. $\delta \downarrow$ qd $\gamma \uparrow$ et $f \uparrow$

↳ puissance moyenne

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{T} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

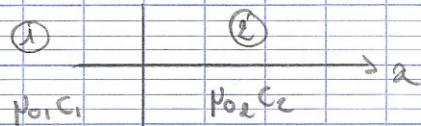
La puissance moyenne transportée par l'onde s'atténue avec une distance caract. = $\frac{\delta}{2}$

Interface entre deux milieux

Reflexion et transmission d'une onde sonore plane progressive à incidence normale

2 milieux caractérisés par leur impédance acoustique $Z_\alpha = \rho_\alpha c$

Relat° de passage



Soit une onde incidente se propageant dans le sens des x croissants arrive à l'interface entre les 2 milieux.

Continuité de la vitesse: à l'interface il n'y a pas de "décollement" entre les 2 milieux
↳ continuité de la composante normale à la surface de la vitesse des particules fluides.

Continuité de la press° = $\rho \partial t$ à dm , de surface dS , située entre $x = -\epsilon$ et $x = +\epsilon$

$$\rho \frac{dm}{dt} \frac{\partial v}{\partial t}(0, t) = (\rho_1 v_1(-\epsilon, t) - (\rho_2 v_2(\epsilon, t))) dS$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow dm \rightarrow 0 \Leftrightarrow p_1(0^-, t) = p_2(0^+, t)$$

→ continuité de la press°

Coefficients de reflex° et de transmis° en amplitude

L'onde incidente est une OPP caractérisée par: $p_i(x, t) = f(t - \frac{x}{c_1})$

$$\text{et } v_i(x, t) = \frac{1}{Z_1} f(t - \frac{x}{c_1})$$

⇒ elle donne naissance à une onde réfléchi (r) dans le milieu 1 et à une onde transmiss (t) dans le milieu 2

$$\text{onde réfléchi} = p_r(x, t) = g(t + \frac{x}{c_1}) \quad \text{et } v_r(x, t) = \frac{1}{Z_1} g(t + \frac{x}{c_1})$$

onde transmitida = $p_t(a,t) = h \left(t - \frac{x}{c_2} \right)$ et $v_t(a,t) = \frac{1}{z_2} h \left(t - \frac{x}{c_2} \right)$

Dans (1) superposit^o de l'onde incidente et reflechie

Dans (2) onde transmitida

En $a=0$

$$\frac{1}{z_1} (f(t) + g(t)) = \frac{1}{z_2} h(t) \quad \text{vibres}$$

$$f(t) + g(t) = h(t) \quad \text{press}$$

Et les coeff^s de reflex^o et de transmis^o en amplitude - vibres :

$$r_v = \frac{v_r(0^-,t)}{v_i(0^-,t)} \quad \text{et} \quad t_v = \frac{v_t(0^+,t)}{v_i(0^-,t)}$$

- press^o

$$r_p = \frac{p_r(0^+,t)}{p_i(0^+,t)} \quad \text{et} \quad t_p = \frac{p_t(0^+,t)}{p_i(0^-,t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_p = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} = -r_v \\ t_p = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z_2}{z_1} t_v \end{cases}$$

Coeff de reflex^o et de transmis^o en energie

Les vecteurs de Poynting sonores s'ecrivent :

• pour onde incidente $\vec{T}_i(a,t) = p_i(a,t) \vec{v}_i(a,t) = \frac{1}{z_1} p_i^2(a,t) \vec{u}_x$

• onde refl. $\vec{T}_r(a,t) = p_r(a,t) \vec{v}_r(a,t) = - \frac{1}{z_1} p_r^2(a,t) \vec{u}_x$

• onde transmitida $\vec{T}_t(a,t) = p_t(a,t) \vec{v}_t(a,t) = \frac{1}{z_2} p_t^2(a,t) \vec{u}_x$

Les coeff de reflex^o R et de transmis^o T en energie sont:

$$R = \frac{|\langle \vec{\Pi}_r(0, t) \cdot \vec{v}_x \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_i(0, t) \cdot \vec{v}_x \rangle|} \quad \text{et} \quad T = \frac{|\langle \vec{\Pi}_t(0, t) \cdot \vec{v}_x \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_i(0, t) \cdot \vec{v}_x \rangle|}$$

$$R = |r_v r_p| = r_p^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$$

$$T = |t_v t_p| = \frac{Z_1}{Z_2} t_p^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

$\Rightarrow R + T = 1$
 \hookrightarrow conservat^o de l'energie a l'interface

Reflex^o et transmis^o d'une onde electromag. PPH a l'interface entre 2 milieux

Soit l'indice complexe du milieu = $\underline{k}(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$

avec $\underline{n}(\omega) = n_1(\omega) - i n_2(\omega) \rightarrow k_1(\omega) = \frac{n_1(\omega)\omega}{c}$ et $k_2(\omega) = \frac{n_2(\omega)\omega}{c}$

$\hookrightarrow n_1(\omega)$ indice de refraction et $n_2(\omega)$ indice d'absorption

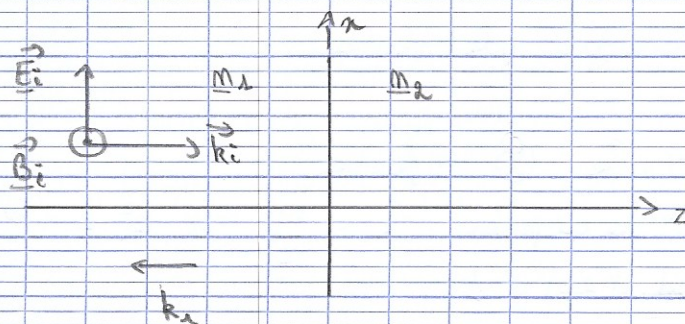
Si λ_0 longueur d'onde de l'onde de m^e porteur dans le vide $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et $n \cdot \lambda$ est

longueur d'onde dans le milieu materiel $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n_1}$$

vitesse de phase $v_p = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{\omega}{n_1 k_0} = \frac{c}{n_1(\omega)}$

Pointe du pb



Soit une OPPH incidente qui arrive sous incidence normale

On a $\underline{k}_i = k_1 \underline{u}_z$ avec $k_1 = \underline{m}_1 \frac{\omega}{c}$

On a aussi $\underline{k}_r = -k_1 \underline{u}_z$ et $\underline{k}_t = k_2 \underline{u}_z$ avec $k_2 = \underline{m}_2 \frac{\omega}{c}$

On admet qu'on conserve la direct° de polarisation de l'onde \vec{E} et \vec{B} ?

• Onde incidente : $\vec{E}_i(z,t) = E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z)) \underline{u}_x$
 $\vec{B}_i(z,t) = \frac{k_1 \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\underline{m}_1}{c} E_{0i} \exp(i(\omega t - k_1 z)) \underline{u}_y$

• Onde transmise : $\vec{E}_t = E_{0t} \exp(i(\omega t - k_2 z)) \underline{u}_x$
 $\vec{B}_t = \frac{\omega}{c} E_{0t} \exp(i(\omega t - k_2 z)) \underline{u}_y$

• Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} \exp(i(\omega t + k_1 z)) \underline{u}_x$
 $\vec{B}_r = -\frac{\underline{m}_1}{c} E_{0r} \exp(i(\omega t + k_1 z)) \underline{u}_y$

relat° de passage : $\begin{cases} \vec{E}_i(0^-,t) + \vec{E}_r(0^-,t) = \vec{E}_t(0^+,t) \\ \vec{B}_i(0^-,t) + \vec{B}_r(0^-,t) = \vec{B}_t(0^+,t) \end{cases}$

Coeff de réflect° et de transmisi° de \vec{E}

$$\underline{r}_E = \frac{\underline{m}_1 - \underline{m}_2}{\underline{m}_1 + \underline{m}_2}$$

$$\underline{t}_E = \frac{2 \underline{m}_1}{\underline{m}_1 + \underline{m}_2}$$

Cas interface vide-plasma

① → vide ② → plasma

relat° de dispersion $k_1 = \frac{\omega}{c}$ et $k_2^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

\underline{m}_1 réel et égal à 1

m_2 il faut distinguer $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$

↳ $\omega > \omega_p$ = m_2 est réel $m_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

et $\underline{t}_E = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$ et $\underline{t}_E = \frac{2\omega}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

↳ $\omega < \omega_p$ = m_2 est imaginaire pur $m_2 = i \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}$

et $\underline{t}_E = \frac{\omega - i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega + i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ et $\underline{t}_E = \frac{2\omega}{\omega + i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$

Coeff de réflexion et de transmission en puissance

↳ $\omega > \omega_p = R = \left(\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \right)^2$ et $T = \frac{4\omega^2}{(\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2})^2}$

$R + T = 1$

Cas d'une interface non-conducteur

↳ Cas des hautes fréquences = dans la limite où γ_0 réelle et est cad qd $\omega \delta \ll 1$:

$k_z = \frac{1-i}{\delta}$ où $\delta = \left(\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega} \right)^{1/2}$

Dans ce cas $\underline{m}_2 = \frac{c}{\omega} \times \frac{1-i}{\delta}$

⇒ $\underline{t}_E = \frac{1-i - \omega\delta/c}{1-i + \omega\delta/c}$ et $\underline{t}_E = \frac{2 \frac{\omega\delta}{c}}{1-i + \frac{\omega\delta}{c}}$

si $\frac{\omega\delta}{c} \ll 1$ ⇒ $\delta \ll \lambda_c$ avec $\frac{2\pi c}{\omega}$ ⇒ $\underline{t}_E \approx -1$ et $\underline{t}_E \approx 0$

Analyse d'une lumière polarisée

↳ lumière polarisée et lumière naturelle = 2 façons de la représenter

° superposit° de 2 modes polarisés rectilignement selon 2 direct° \perp

$$\vec{E} = E_{0x}(t) \cos(\omega t - kz + \varphi_x(t)) \vec{u}_x + E_{0y}(t) \cos(\omega t - kz + \varphi_y(t)) \vec{u}_y$$

a),

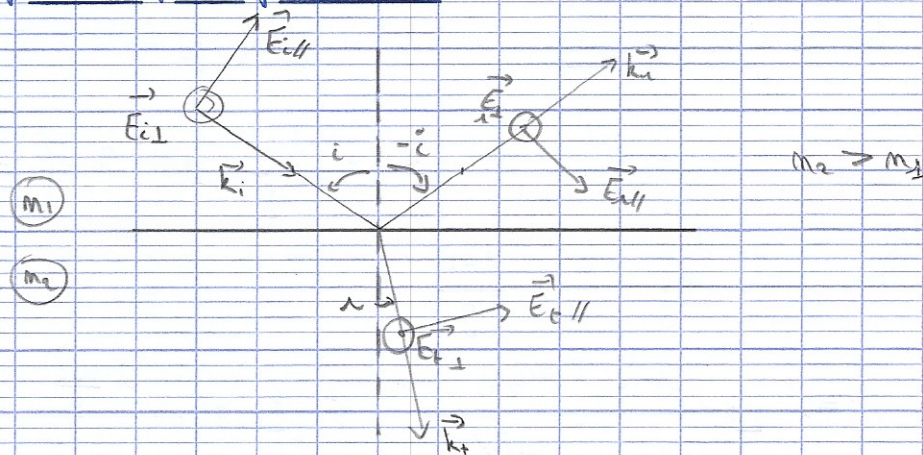
$\varphi_x(t)$ et $\varphi_y(t)$ varient vite et prennent des valeurs aléatoires au cours du temps
d'où $\langle E_{0x}^2(t) \rangle = \langle E_{0y}^2(t) \rangle$

° superposit° de modes polarisés rectilignement dont la direct° est fixée par l'angle $\alpha(t)$ varie en prenant des valeurs entre 0 et π

La lumière naturelle n'est pas polarisée - Les lumières polarisées rectilignement, elliptiquement ou circulairement sont totalement polarisées. La superposit° d'une lumière totalement polarisée et naturelle est dite partiellement polarisée.

lumière polarisée rectilignement

↳ polarisation par réflexion réfractive



Oma

$$r_{||} = \frac{E_{r||}}{E_{i||}} = \frac{\tan(\alpha - \alpha')}{\tan(\alpha + \alpha')} \quad \text{et} \quad r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')}$$

Soit ϵ & μ de Descartes $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, $r_{11} = 0$ pour $\tan i = \frac{n_2}{n_1}$

Pour cette incidence particulière, l'onde réfléchie est polarisée rectilignement.
L'angle $i \rightarrow$ angle de Brewster

Polariseur = réalisé en étirant des films de polymères

\hookrightarrow axe du polariseur = axe sur lequel est polarisé rectilignement l'onde

Art d'une lame cristalline biréfringente

Soit un OPP se propageant selon Oz et en supposant que la lame s'étend entre $z=0$ et $z=e$.
On a $n_x > n_y$. L'axe Ox est donc l'axe lent et l'axe Oy l'axe rapide.

\hookrightarrow les composantes de E selon Ox se propagent avec le indice de phase

$$v_{p,x} = \frac{c}{n_x}$$

Les axes Ox et Oy sont appelés lignes neutres de la lame

en Oy $v_{p,y} = \frac{c}{n_y}$

Soit \vec{E} = avant la lame = $\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - k_z z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \\ 0 \end{cases}$ où $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

dans la lame = $\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - n_x k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - n_y k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{cases}$

à la sortie ($z=e$) = $\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - n_x k_0 e) \\ E_{0y} \cos(\omega t - n_y k_0 e + \varphi) \\ 0 \end{cases}$

après la lame = $\vec{E}' = \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - k_0(z-e) - n_x k_0 e) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0(z-e) - n_y k_0 e + \varphi) \end{cases}$

le terme $z-e$ assure la continuité de la phase en sortie de la lame

La largeur de la lame a introduit un déphasage :

$$\Delta\varphi = n_2 k_0 e - n_1 k_0 e = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 - n_1) e$$

ou encore la différence de marche $\delta = (n_2 - n_1) e$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_a \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_b \cos(\omega t - k_0 z + \Delta\varphi + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lame demi-onde

↳ c'est une lame taillée de façon que $\Delta\varphi = \pi \Leftrightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{2}$

↳ l'épaisseur de la lame vérifie $(n_2 - n_1) e = \frac{\lambda_0}{2}$

Soit une OPH polarisée rectilignement selon une direction faisant un angle α avec l'axe lent de la lame (Ox):

$$\text{avant la lame} : \vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{après la lame} : \vec{E}' = \begin{pmatrix} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - k_0 z + \pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - k_0 z) \\ -E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit une OPH polarisée elliptiquement :

$$\text{avant la lame} : \vec{E} = \begin{pmatrix} E_a \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_b \cos(\omega t - k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après la lame $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_z z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_z z + \varphi + \pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_z z) \\ -E_{0y} \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$

Une lame demi-onde transforme une onde polarisée elliptiquement (ou circulairement) en une onde polarisée elliptiquement (ou circulairement) de même ellipticité mais de sens de rotation différent.

Lame quart d'onde

↳ lame $k_y \Delta \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{4}$

$\Leftrightarrow (n_x - n_y)e = \frac{\lambda_0}{4}$

↳ act° d'une lame quart d'onde sur une onde polarisée rectilignement est une onde faisant un angle α avec (Ox)

avant lame $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k_z z) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k_z z) \\ 0 \end{pmatrix}$

après lame :

$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k_z z) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k_z z + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k_z z) \\ -E_0 \sin \alpha \sin(\omega t - k_z z) \\ 0 \end{pmatrix}$

Une lame $1/4$ d'onde transforme une onde polarisée rectilignement en onde polarisée elliptiquement, les axes de l'ellipse étant les lignes neutres de la lame
si $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ la vibration émergente est circulaire.

si $\alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ polarisation inchangée.

act° sur une onde polarisée elliptiquement

$$\text{avant: } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{après: } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ -E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ \pm E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une lame $\frac{1}{4}$ d'onde = onde pol. elliptiquement \rightarrow onde pol. elliptiquement. Si les lignes principales de la lame et les axes de l'ellipse coïncident, la lame $\frac{1}{4}$ d'onde transforme onde pol. ellip. \rightarrow onde pol. rectilignement

act° d'une lame $\frac{1}{4}$ d'onde sur une onde polarisée circulairement

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \sin(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{après la lame: } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \sin(\omega t - k_0 z + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une lame $\frac{1}{4}$ d'onde transforme une onde pol. circulairement en une onde pol. rectilignement, à 45° de ses lignes principales