

Optique ondulatoire

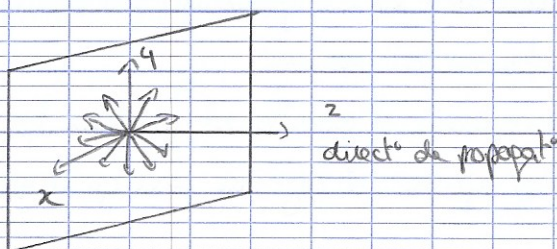
Modèle scalaire des ondes lumineuses

Modèle scalaire de la lumière

Nature de l'onde lumineuse

↳ la lumière est une onde électromagnétique composée de 2 champs de vecteurs couplés, le champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} se propageant à $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le vide.

↳ Pour une onde plane $(\vec{E} \perp \vec{B}) \perp \vec{k}$, \vec{k} direct^o de propagat^o



Pour la lumière naturelle, le direct^o de \vec{E} change de manière aléatoire au cours du temps; la durée moyenne entre 2 changements est le tps de cohérence τ_c qui sera défini plus loin. Ainsi, il n'est pas possible d'attribuer une direct^o à \vec{E} : la lumière naturelle est non polarisée.

↳ pour y remédier on utilise un polariseur pour donner à \vec{E} une direct^o fixe.

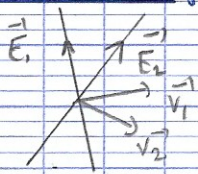
Vibrat^o lumineuse : pour une lumière non polarisée E_x et E_y dans le plan perpendiculaire à \vec{k} sont parfaitement équivalentes.

On appelle vibrat^o lumineuse une composante quelconque des champs électrique par rapport à une ax^e perpendiculaire à la direct^o de propagat^o.

Propriétés de la vibrat^o lumineuse

La v_{ph} lumineuse se propage dans les milieux transparent, le long des rayons lumineux, à la vitesse $v = \frac{c}{n}$ où n est l'indice optique du milieu.

Théorème de superposition : Si plusieurs v_{ph} $s_i(M, t)$ se propagent simultanément dans l'espace, chacune se propage comme si elle était seule et la v_{ph} résultante en un pt M est :



$$s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

Eclairement et intensité lumineuse

- ↳ L'éclairement est une grandeur fondamentale car elle correspond à ce que l'on peut observer ou mesurer.
- ↳ Les récepteurs et caractérisés par leur temps de réponse τ qui est le temps minimum qui doit séparer 2 signaux pour qu'ils soient perçus individuellement.

ODG : œil $\tau \approx 0,1s$, photodiode $\tau \approx 10^{-6}s$, photorésistance $\tau \approx 10^{-2}s$, thermopile $\tau \approx 1s$

Ces périodes sont très grand par rapport à la période de v_{ph} d'une lumière visible ($\tau = 10^{-14}s$)

- ↳ Les récepteurs ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent.

On appelle éclairement E la puissance lumineuse surfacique moyenne reçue par une surface :

$$E(M) = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

K = cste positive

$\langle \dots \rangle$: moyenne dans le temps

$s(M, t)$ = v_{ph} lumineuse

$$[E] = W/m^2$$

L'intensité lumineuse : $I = \langle \|\vec{E}(M, t)\|^2 \rangle$

lumière monochromatique

Def: On appelle lumière monochromatique une onde idéale purement sinusoidale dans de la forme :

$$s(M,t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

amplitude | | retard de phase au pt M.
 pulsat° esté

La onde monochromatique présente une double périodicité dans le tps et dans l'espace caractérisée par :

- caracté temporelle : période T et fréquence ν $\nu = \frac{1}{T}$ et $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$

- caracté spatiale : longueur d'onde λ , nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, module d'onde $k = 2\pi\sigma = \frac{2\pi}{\lambda}$

\rightarrow dans le vide l'onde se propage à la vitesse $c = \lambda = cT$ ou $k_0 = \frac{\omega}{c}$

dans un milieu matériel l'onde se propage à la vitesse $v = \frac{c}{n} = \lambda = vT$ $k = \frac{\omega}{v}$

Pour une fréquence donnée, la longueur d'onde et le module d'onde dans un milieu transparent st reliés à leurs valeurs dans le vide :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{et} \quad k = n k_0$$

Notate complexe : soit la notate complexe de $s(M,t)$:

$$\underline{s}(M,t) = A(M) \exp(i(\omega t - \varphi(M)))$$

On définit l'amplitude complexe = $\underline{a}(M) = A(M) \exp(-i\varphi(M))$

On retrouve la onde réelle, son amplitude et son retard de phase par les relat° :

$$s(M,t) = \text{Re}(\underline{s}(M,t)) = \text{Re}(\underline{a}(M) \exp(+i\omega t))$$

$$A(M) = |\underline{s}(M,t)| = |\underline{a}(M)| \quad \varphi(M) = -\arg(\underline{a}(M))$$

Expression de l'éclaircie :

↳ l'expression de l'éclaircie est :

$$E(M) = K \langle |s(M, t)|^2 \rangle = \langle A(M)^2 \cos^2(\omega t - \varphi(M)) \rangle = \frac{1}{2} K A(M)^2$$

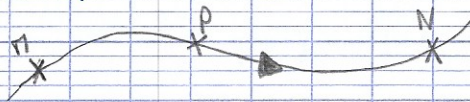
↳ l'éclaircie (et l'intensité vibratoire) est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration

↳ en complexe = $E(M) = \frac{1}{2} K |a(M)|^2 = \frac{1}{2} K \underline{a(M)} \overline{a(M)}$ ^{conjugué}

$$E(M) = \frac{1}{2} K |s(M, t)|^2 = \frac{1}{2} K \underline{s(M, t)} \overline{s(M, t)}$$

Chemins optiques

Def : La vibration lumineuse se propage le long des rayons lumineux. Soit un rayon lumineux passant par M puis par N



↳ chemin optique parcouru par la lumière entre M et N est :

$$(MN) = c t_{MN}$$

↑ tps pour aller de M à N

↳ il s'agit de la distance que parcourt la lumière durant t_{MN} si elle se propageait dans le vide

↳ à partir de P $t_{MN} = t_{MP} + t_{PN} \rightarrow (MN) = (MP) + (NP)$

Calcul pratique des chemins optiques

↳ (souvent en milieu ou milieu des milieux transparents (verre, quartz, pleiglass...)). Il est suffisant car que v et $n = \frac{c}{v}$

Ici hyp : onde monochromatique, n homogène dans chacun des milieux

(→ lumière se propage en ligne droite), on néglige l'absorption de l'énergie lumineuse par le milieu → l'indice n est réel.

Cas où la lumière traverse un milieu homogène

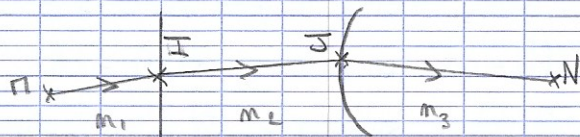
↳ soit le milieu d'indice n se propageant en ligne droite de M à N à la vitesse c/n

$$(MN) = c \frac{MN}{c/n} = n \underbrace{MN}_{\text{distance entre M et N}}$$

Cas où la lumière traverse plusieurs milieux homogènes

$$\begin{aligned} (MN) &= (MI) + (IJ) + (JN) \\ &= n_1 MI + n_2 IJ + n_3 JN \quad \rightarrow 3 \text{ milieux} \end{aligned}$$

→ Le chemin optique le long d'un rayon lumineux est égal à la longueur du rayon multipliée par l'indice du milieu transparent qu'il traverse.



Relation entre chemin optique et le retard de phase

Le signal lumineux en N reproduit le signal en M avec un retard de propagation t_{MN} et une atténuation éventuelle représentée par un coeff α (dépendant de M et N) compris entre 0 et 1

$$s(N, t) = \alpha s(M, t - t_{MN})$$

↳ lumière monochromatique $\rightarrow A(N) \cos(\omega t - \varphi(N)) = \alpha A(M) \cos(\omega(t - t_{MN}) - \varphi(M))$

$$\Rightarrow \varphi(N) = \varphi(M) + \omega t_{MN} = \varphi(M) + \frac{\omega}{c} (MN) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (MN)$$

Le retard de phase accumulé par le signal lumineux suit proportionnellement au chemin optique qu'elle parcourt selon la relation

$$\varphi(N) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0} (MN)$$

do longueur d'onde dans le vide

Exempt^o = en plus du déphasage lié à la propagat^o, la lumière subit un déphasage supplémentaire de π dans les situat^o suivantes :

- qd un rayon subit une réflex^o sur une surface métallique, l'amplitude de l'onde réfléchie est opposée à l'amp. de l'onde incidente \rightarrow déphasage π

$$\varphi(N) = \varphi(M) + \frac{d\varphi}{d\lambda}(MN) + \pi$$

- qd un rayon subit une réflex^o sur un milieu plus réfringent ($n' > n$)
 - au passage par un pt de convergence

Surface d'onde

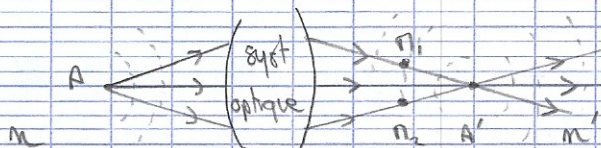
Def : Une surface d'onde relative au point source S est une surface fermée des pts M tels que $(SM) = \text{cte}$, ou encore, $\varphi(M) = \text{cte}$

\hookrightarrow la phase a la m[^]me valeur en tous les pts d'une surface d'onde

Théorème de Malus

Les surfaces d'ondes relatives au pt source S sont orthogonales aux rayons lumineux issus de S .

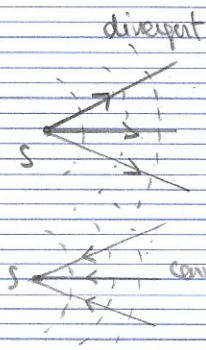
Égalité des chemins optiques entre pts conjugués



Quelque 2 pts A et A' sont conjugués par un syst. optique, le chemin optique (AA') est le m[^]me pour tous les rayons allant de AA'

Onde sphérique

Def : Une onde sphérique est une onde ayant l'une des caractéristiques suivantes :



- les rayons lumineux sont des droites concourantes en un pt S
- les surfaces d'ondes et des sphères centrées sur S
- ↳ l'onde émise par une source ponctuelle S située à distance finie est une onde sphérique
- ↳ Par un syst. optique donné d'une source ponctuelle S une image S', l'onde issue du syst. optique est une onde sphérique de centre S'. Tout se passe comme s'il y avait une réelle source en S'.

Exposés d'une onde sphérique monochromatique ou harmonique

- ↳ Une onde sphérique divergente de centre S, monochromatique, se propageant au sein d'un milieu homogène d'indice n:

$$D(r, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0) \quad \text{si } r = SM$$

φ_0 retard de phase à la source

$$\varphi(M) = \varphi_0 + kr$$

en complexe $\underline{D}(M, t) = \frac{\alpha}{r} \exp(i(\omega t - kr - \varphi_0))$

$$\underline{a}(M) = \frac{\alpha}{r} \exp(-i(\varphi_0 + kr))$$

- ↳ Une onde sphérique convergente de centre S, monochromatique, se propageant dans un milieu homogène d'indice n:

$$D(M, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t + kr - \varphi_0)$$

$$\varphi(M) = \varphi_0 - kr$$

en complexe $\underline{D}(M, t) = \frac{\alpha}{r} \exp(i(\omega t + kr - \varphi_0))$

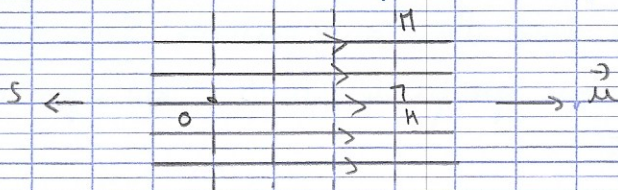
$$\underline{a}(M, t) = \frac{\alpha}{r} \exp(-i(\varphi_0 - kr))$$

Onde plane

Def = Une onde plane est une onde ayant l'une des caractéristiques suivantes =

- les rayons lumineux st des droites parallèles entre elles
- les surfaces d'ondes sont des plans parallèles entre eux appelés **plan d'onde**

|| Les plans d'ondes sont orthogonaux aux rayons lumineux



On note \vec{u} le vecteur unitaire // aux rayons dirigé dans le sens de propagation de la lumière. Une onde plane est considérée comme l'onde émise par une source ponctuelle S située à l'infini dans le direct $-\vec{u}$

Expos:

↳ on suppose que S se trouve à très grande distance l_0 de l'origine O puis on fera tendre l_0 vers l'infini. Soit \vec{u} le vecteur unitaire tq $\vec{OS} = -l_0 \vec{u}$

Pour un pt M quelconque on a:

$$r^2 = SM^2 = (\vec{SO} + \vec{OM})^2 = (l_0 \vec{u} + \vec{OM})^2 = l_0^2 + 2l_0 \vec{u} \cdot \vec{OM} + OM^2$$

d'où puisque $l_0 \gg OM$

$$r = l_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{l_0} + \frac{OM^2}{l_0^2}} \approx l_0 \left(1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{l_0}\right) = l_0 + \vec{u} \cdot \vec{OM}$$

L'onde émise par S est une onde sphérique. On fait les approximations suivantes:

$$\bullet A(r) = \frac{A_0}{r} \approx \frac{A_0}{l_0} = A_0$$

$$\bullet \varphi(r) = \varphi_0 + kr \approx \varphi_0 + kl_0 + k\vec{u} \cdot \vec{OM} = \varphi(0) + k\vec{u} \cdot \vec{OM}$$

$$\Rightarrow \boxed{a(r, t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi(0) - k\vec{u} \cdot \vec{OM})} \text{ indépendante de } l_0$$

↳ onde monochromatique se propageant dans le direct \vec{u} au sein d'un milieu d'indice n .

$\vec{k} = k\vec{u}$ vecteur d'onde. A_0 est l'amplitude et $\varphi(0)$ est le retard de phase en un pt de référence O . Le retard de phase en M est $\varphi(M) = \varphi(0) + k\vec{u} \cdot \vec{OM}$

intervalle de largeur $\Delta\nu = \frac{2}{T_c} \Rightarrow \Delta\nu \times T_c = 2$

1^{er} cas $f(t) = A \exp\left(-\frac{|t|}{T_c}\right) \cos(2\pi\nu_m t)$

TF $\Rightarrow \hat{f}(\nu) = A T_c \left(\frac{1}{1 + (2\pi(\nu - \nu_m) T_c)^2} + \frac{1}{1 + (2\pi(\nu + \nu_m) T_c)^2} \right)$

fité du type $\frac{1}{1+x^2}$

Si $\nu T_c \gg 1 \rightarrow \hat{f}(\nu) \approx A T_c \frac{1}{1 + (2\pi(\nu - \nu_m) T_c)^2}$ pour $\nu \geq 0$

$\hat{f}(\nu)$ max en ν_m - peu caractériser le pic il est habituel de calculer la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ - Il faut faire la \neq entre ν_1 et ν_2 pour lesquelles

$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2} \hat{f}(\nu_m) \Rightarrow \nu_1 = \nu_m - \frac{1}{2\pi T_c} \quad \nu_2 = \nu_m + \frac{1}{2\pi T_c}$

$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{1}{\pi T_c} \Rightarrow \Delta\nu \times T_c = \frac{1}{\pi}$

2^{em} cas $f(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{T_c^2}\right) \cos(2\pi\nu_m t)$

TF $\Rightarrow \hat{f}(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A T_c \left(\exp(-\pi^2(\nu - \nu_m)^2 T_c^2) + \exp(-\pi^2(\nu + \nu_m)^2 T_c^2) \right)$

Si $\nu T_c \gg 1 \rightarrow \hat{f}(\nu) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} A T_c \exp(-\pi^2(\nu - \nu_m)^2 T_c^2)$

$\hat{f}(\nu)$ max en ν_m et $\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2} \hat{f}(\nu_m)$ pour $\nu = \nu_m \pm \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi T_c}$

$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi T_c} \Rightarrow \Delta\nu \times T_c = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi}$

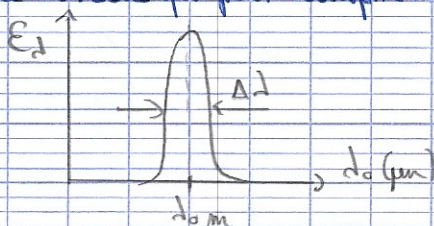
Un signal limité dans le tps, dont la durée est de l'ordre du tps T_c , a un spectre en fréquence dont la largeur $\Delta\nu$ est tq

$\Delta\nu \times T_c \sim 1$

Trains d'onde

Profil des raies spectrales

- On peut mesurer le profil fin des raies spectrales. Ces raies sont caractérisées :
- la longueur d'onde $\lambda_{0,m}$ correspondant au max d'émission
 - la largeur à mi hauteur $\Delta\lambda$ qui est tq $\Delta\lambda \ll \lambda_{0,m}$
 - la forme de la raie qui peut correspondre à \neq fct^{ns} mathématiques



En terme de fréquence, la raie est caractérisée par la fréquence moyenne $\nu_{0,m} = \frac{c}{\lambda_{0,m}}$ et la largeur $\Delta\nu$. Comme $\Delta\lambda \ll \lambda_{0,m}$ et $\Delta\nu \ll \nu_{0,m}$ alors

$$\Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda_0}\right) = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_{0,m}^2} = \nu_{0,m} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{0,m}}$$

Alors
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{0,m}} = \frac{\Delta\nu}{\nu_{0,m}}$$

Des atomes émettent la lumière par trains d'onde de durée limitée τ_c tq

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau_c}$$

La durée moyenne des trains d'onde est appelée temps de cohérence

↳ lié à la durée moyenne entre 2 chocs d'atomes (dans les gaz)

Chaque train d'onde a une amplitude et une phase aléatoire

On modélise la lumière quasi-monochromatique d'une raie spectrale de manière simplifiée comme une onde monochromatique :

- d'amplitude $A(t)$ fixe, égale à la moyenne sur un grand nombre de trains d'onde
- de retard de phase à la source $\varphi(t)$ aléatoire prenant toutes les valeurs possibles entre 0 et 2π et changeant de valeur au bout d'un temps τ_c

En complexe $= \underline{u}(M, t) = A_0 \exp(i(\omega t - \varphi(c) - k^2 \cdot \vec{OM}))$
 $\underline{u}(M, t) = A_0 \exp(-i(\varphi(c) + k^2 \cdot \vec{OM}))$

Effet d'une lentille mince dans l'approximat° de Gauss

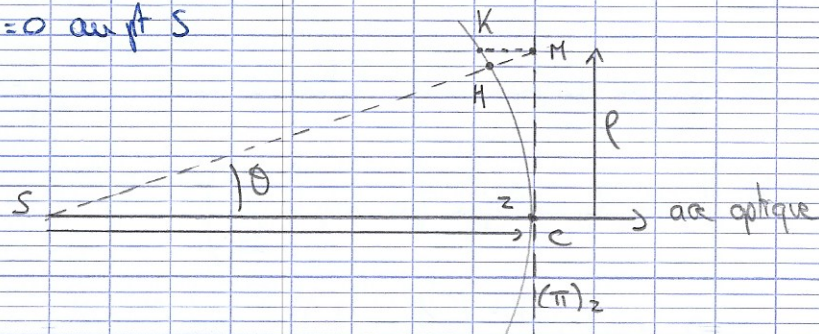
Approximat° paraxiale de l'onde sphérique harmonique

↳ Dans les systèmes optiques, la propagat° de la lumière est souvent étudiée au voisinage d'un axe, ce qui a permis de définir l'approximat° de Gauss (ou approximat° paraxiale) en optique géométrique. On étudie la m^{me} approximat° dans le domaine des ondes.
 L'axe considéré, noté Oz , est un axe de symétrie de révolution dans les systèmes optiques.
 Soit une onde sphérique harmonique de pulsat° ω , de centre S placé sur l'axe Oz .
 On a $k = \frac{\omega}{v}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

On a aussi l'amplitude $\underline{u}(r) = \frac{a}{r} \exp(\pm ikr)$. Le signe + correspond à une lentille convergente (→ divergente)

La plaque Π_0 est incluse dans \underline{u}

On considère un plan $(\Pi)_z \perp$ à Oz et le coupant en un pt C d'abscisse z .
 On prend $z=0$ au pt S



On cherche une express° de $\varphi \neq$ de phase $\varphi(M) - \varphi(C)$ dans l'approximat° de Gauss.

↳ en optique géométrique $\theta \ll 1$. On $\rho = z \tan \theta \Rightarrow \rho \ll z$
 On a $SM = \sqrt{z^2 + \rho^2} = z \left(1 + \left(\frac{\rho}{z}\right)^2\right)^{1/2} \Rightarrow$ pour $\rho \ll z$

$$SM \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z}\right)^2\right) = z + \frac{\rho^2}{2z} \quad \text{et} \quad SM - SC = SM - z \approx \frac{\rho^2}{2z}$$

$$\Rightarrow \varphi(M) - \varphi(C) = k(SM - SC) \approx k \frac{\rho^2}{2z} = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{\lambda z}$$

facteur d'amplitude $\frac{1}{8\pi} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 + (\frac{y}{z})^2)^{3/2}}$

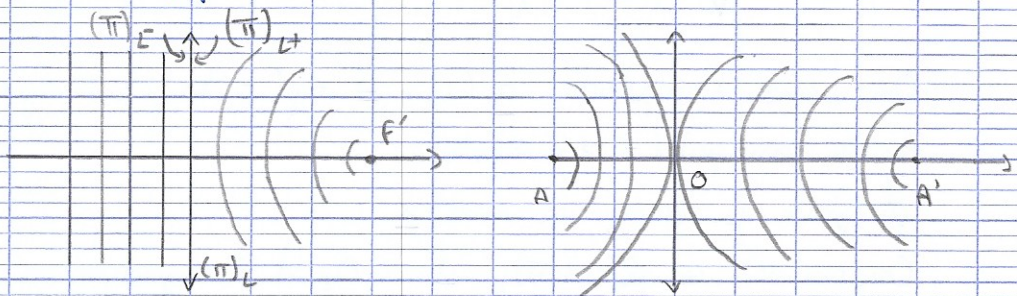
L'expression de l'onde sphérique dans les conditions de Gauss est :

$$u(\rho, z) \approx \frac{\alpha}{z} \exp(-i\phi_0) \exp(-ikz) \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right)$$

Effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss

La lentille mince multiplie l'amplitude complexe de l'onde incidente par $\exp\left(i \frac{k\rho^2}{2f'}\right)$ que l'on appelle transmittance de la lentille.

Formule de conjugaison



Le facteur de phase avant la lentille vaut : $\exp\left(-i \frac{k\rho^2}{2AO}\right)$

La lentille le multiplie par $\exp\left(i \frac{k\rho^2}{2f'}\right)$

$$\Rightarrow \exp\left(-i \frac{k\rho^2}{2} \left(\frac{1}{AO} - \frac{1}{f'}\right)\right) \text{ avec } \frac{1}{AO'} - \frac{1}{AO} = \frac{1}{f'}$$

Lumière réelle

Il n'existe pas dans la réalité de lumière parfaitement monochromatique. Cependant, le champ lumineux "réel" $s(M, t)$ peut se décomposer en somme de champs monochromatiques (on voit cela plus en physique de

lumière dans un prisme de verre).

↳ La méthode mathématique est la transformée de Fourier

L'éclairement est la somme des éclairements des axes ≠ composantes monochromatiques.

On définit la densité spectrale d'éclairement, E_d , la contribution à l'éclairement des composantes monochromatiques dont la longueur d'onde dans le vide est dans un intervalle élémentaire $[d_0, d_0 + dd_0]$:

$$dE = E_d(d_0) dd_0$$

$$\Rightarrow E = \int_0^{\infty} E_d(d_0) dd_0$$

On définit une densité spectrale E_ν par rapport à la fréquence. Ces 2 densités spectrales sont liées. $[d_0, d_0 + dd_0]$ correspond à l'intervalle de fréquence $[\nu - d\nu, \nu]$

$$d\nu = d\left(\frac{c}{d_0}\right) = \frac{c}{d_0^2} dd_0$$

$$\Rightarrow dE = E_d(d_0) dd_0 = E_\nu(\nu) d\nu$$

$$\Leftrightarrow E_\nu(\nu) = \frac{d_0^2}{c} E_d(d_0) = \frac{c}{\nu^2} E_d\left(\frac{c}{\nu}\right)$$

$$\Leftrightarrow E_d(d_0) = \frac{c}{d_0^2} E_\nu\left(\frac{c}{d_0}\right)$$

Une lumière blanche est une lumière dont le spectre est continu et contient toutes les longueurs d'onde du domaine visible.

Une lampe spectrale émet une série de longueurs d'onde caractéristique de l'élément qu'elle contient. Le spectre est constitué de pics fins, appelés raies spectrales.

↳ La lumière d'un faisceau laser présente une raie spectrale unique beaucoup plus fine qu'une raie de lampe spectrale.

Notions sur la transformée de Fourier

Def : La TF d'une fct^e $f(t)$ à valeurs complexes intégrable est définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i 2\pi \nu t) dt$$

↳ la variable temporelle t est remplacée par la variable de fréquence ν

Qd $f(t)$ est une fct^e continue en densité la formule de transformat^e inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \exp(-i 2\pi \nu t) d\nu$$

Dans le cas d'une ritat^e lumineuse $s(M, t)$ prenant des valeurs réelles on a

$\hat{s}(M, -\nu) = \hat{s}(M, \nu)^*$ on peut obtenir la transformat^e inverse

$$s(M, t) = \int_0^{\infty} A(M, \nu) \cos(2\pi \nu t - \varphi(M, \nu)) d\nu$$

où $A(M, \nu) = 2 |\hat{s}(M, \nu)|$ et $\varphi(M, \nu) = -\arg(\hat{s}(M, \nu))$. Ainsi $s(M, t)$ est le superpos^e d'une ∞ continue d'ondes monochromatiques ayant a priori toutes les fréquences possibles.

Exemples : pour des oscillat^es sinusoidale de fréquence ν_m constant pour une durée τ_c on suppose $\nu_m \tau_c \gg 1$

↳ 1^{er} cas : $f(t) = A \cos(2\pi \nu_m t)$ entre $-\frac{\tau_c}{2}$ et $\frac{\tau_c}{2}$

$$\rightarrow \hat{f}(\nu) = \frac{A \tau_c}{2} \left(\frac{\sin(\pi(\nu - \nu_m)\tau_c)}{\pi(\nu - \nu_m)\tau_c} + \frac{\sin(\pi(\nu + \nu_m)\tau_c)}{\pi(\nu + \nu_m)\tau_c} \right)$$

amplitude : $A(\nu) = 2 |\hat{f}(\nu)|$

$\hat{f}(\nu)$ est la somme de 2 termes en $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow$ max en $x=0$ et prend des valeurs négligeable qd son argument est très supérieur à π

Hyp : $\nu \tau_c \gg 1 \Rightarrow \hat{f}(\nu) \approx \frac{A \tau_c}{2} \frac{\sin(\pi(\nu - \nu_m)\tau_c)}{\pi(\nu - \nu_m)\tau_c}$

$f(\nu)$ est max en ν_m et s'annule en $\nu_m - \frac{1}{\tau_c}$ et $\nu_m + \frac{1}{\tau_c}$

Les fréquences les plus importantes dans $f(t)$ occupent donc autour de ν_m un

Superposition d'ondes lumineuses

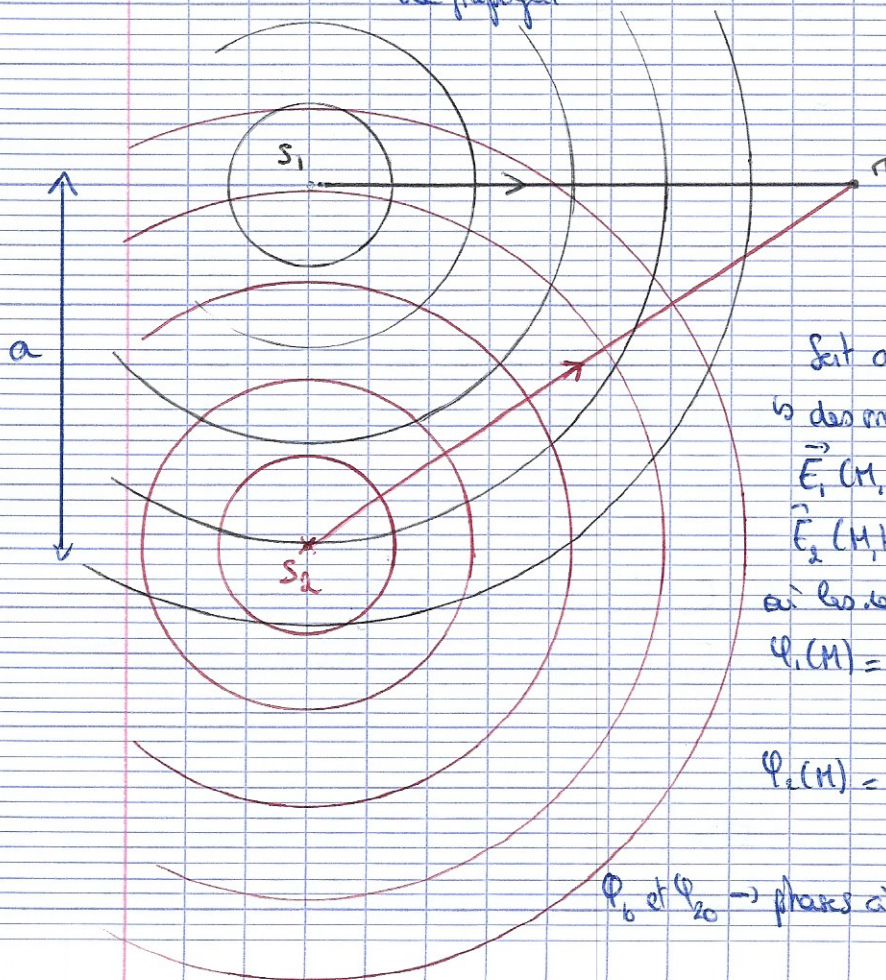
On dira qu'il y a interférences chaque fois que l'éclairement résultant de la superposition de plusieurs ondes électromagnétiques diffère de la somme des éclairements de chaque onde

Superposition de 2 ondes lumineuses

Eclairement résultant

↳ Terme d'interférences

Soit 2 ondes lumineuses monochromatiques issues de 2 sources ponctuelles S_1 et S_2 .
On suppose que les 2 ondes ont des pulsations \neq , et qu'elles sont polarisées rectilignement $\Rightarrow \vec{E}$ rayonné est orienté dans une direct° fixe \perp à la direct° de propagat°



Soit au pt M à t l'expression de \vec{E} ?

↳ des ondes rayonnées par S_1 et S_2

$$\vec{E}_1(M, t) = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$$

$$\vec{E}_2(M, t) = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$$

où les retards de phase au pt M s'écrivent:

$$\varphi_1(M) = \varphi_{01} + \frac{\omega_1}{c} (S_1 M)$$

$$\varphi_2(M) = \varphi_{02} + \frac{\omega_2}{c} (S_2 M)$$

φ_{01} et $\varphi_{02} \rightarrow$ phases à l'émission en S_1 et S_2

Le champ électrique résultant s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t) = (\vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) + \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)))$$

L'éclairement au pt M s'écrit :

$$E(M) = K \langle \|\vec{E}(M, t)\|^2 \rangle$$

$$\Rightarrow E(M) = K \langle \|\vec{E}_1\|^2 \rangle + K \langle \|\vec{E}_2\|^2 \rangle + K \langle 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

Les éclairements $E_1(M)$ et $E_2(M)$ produits en M par S_1 et S_2 seule et respectivement égaux à $K \langle \|\vec{E}_1\|^2 \rangle$ et $K \langle \|\vec{E}_2\|^2 \rangle$

$$\Rightarrow E(M) = E_1(M) + E_2(M) + K \langle 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

L'éclairement E diffère de l'additif $E_1 + E_2$. Le terme $E_{12} = E - E_1 - E_2$ est appelé terme d'interférences :

$$E_{12}(M) = K \langle 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

Note d'ondes cohérentes

• Deux ondes sont **cohérentes** si leur superposition conduit à un terme d'interférences non nul

• Inversement, qd le terme d'interférence est nul, les 2 ondes sont **incohérentes**. Dans ce cas, l'éclairement résultant est la somme des éclairements des 2 ondes : $E = E_1 + E_2$

E_{12} s'écrit aussi :

$$E_{12}(M) = K \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle + K \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle$$

↳ E_{12} nul si $\omega_1 \neq \omega_2$

Les **conditions de cohérence** : Il n'y a pas d'interférences entre 2 ondes de pulsation \neq .

Elles sont incohérentes et leurs éclairements s'ajoutent : $E(M) = E_1(M) + E_2(M)$

On suppose $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E_{12}(M) &= K \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= K \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\left(\frac{\omega}{c}((S_2 M) - (S_1 M)) + \varphi_{02} - \varphi_{01}\right) \rangle\end{aligned}$$

Pour des ondes parfaitement monochromes, \vec{E}_{01} , \vec{E}_{02} et $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ restent invariables.

$$\Rightarrow E_{12}(M) = K \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\Delta\varphi(M)) \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \frac{\omega}{c}((S_2 M) - (S_1 M))$$

Si les 2 ondes et de polarisation orthogonales, c'est $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0$ alors $E_{12}(M) = 0$
2nd condition de cohérence : 2 ondes de polarisation orthogonales sont incohérentes et ne donnent pas lieu à des interférences

\Rightarrow Pour avoir des interférences on doit faire en sorte que les 2 ondes aient la même polarisation, ou à défaut des directions de polarisation voisines.

Formule de Fresnel

On obtient des interférences lumineuses entre 2 ondes monochromatiques de même polarisation cohérentes. L'éclairement est alors donné par la formule de Fresnel :

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) + 2\sqrt{E_1(M)E_2(M)} \cos(\Delta\varphi(M))$$

avec $\Delta\varphi(M)$ le retard de phase au pt M d'une onde par rapport à l'autre

Interprétation physique = Selon le signe de $\cos(\Delta\varphi(M))$, l'éclairement résultant est supérieur ou inférieur à la somme des éclairements des ondes.

On distingue :

- interférences constructives = en un pt où $E(M) > E_1(M) + E_2(M) \rightarrow \cos(\Delta\varphi(M)) > 0$
- interférences destructives = en un pt où $E(M) < E_1(M) + E_2(M) \rightarrow \cos(\Delta\varphi(M)) < 0$

↳ éclairement max où $\cos(\Delta\varphi(M)) = 1 \rightarrow \Delta\varphi(M) = 2m\pi$

$$\hookrightarrow E_{\text{max}} = (\sqrt{E_1(r)} + \sqrt{E_2(r)})^2 \rightarrow \text{totalement constructives}$$

↳ éclairement min si $\cos(\Delta\varphi(M)) = -1 \Rightarrow \Delta\varphi(M) = (2m+1)\pi$

↳ $E_{\min}(M) = (\overline{E_1(M)} - \overline{E_2(M)})^2 \rightarrow$ totalement destructives

Dans le cas particulier où les 2 sources ont le même éclairement, note $E_0(M)$ on a
$$E(M) = 2E_0(M) (1 + \cos(\Delta\varphi(M)))$$

Différence de marche = ordre d'interférence

Pour 2 ondes synchrones : $\varphi_1 = \varphi_2$, on a pour $\Delta\varphi(M)$

$$\Delta\varphi(M) = \frac{\omega}{c} ((S_2M) - (S_1M)) = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((S_2M) - (S_1M))$$

λ_0 longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse considérée

La différence des chemins optiques $(S_2M) - (S_1M)$ est appelée différence de marche au pt M. On le note $S(M) =$

$$S(M) = (S_2M) - (S_1M)$$

La différence de phase $\Delta\varphi(M)$ s'exprime aussi

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi S(M)}{\lambda_0}$$

On a aussi $S(M) = c(t_{S_2M} - t_{S_1M})$ $S(M) > 0$ si en retard à S_1 en M

On appelle ordre d'interférences le rapport de la différence de phase à 2π :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{S(M)}{\lambda_0}$$

L'éclairement est max qd $p(M)$ est un entier m et minimal qd $p(M)$ est un demi-entier $m + \frac{1}{2}$ ($m \in \mathbb{Z}$)

Figure d'interférences

Champ d'interférences : zone de l'espace éclairée par les 2 ondes cohérentes. C'est dans cette zone qu'est observable le phénomène d'interférence.

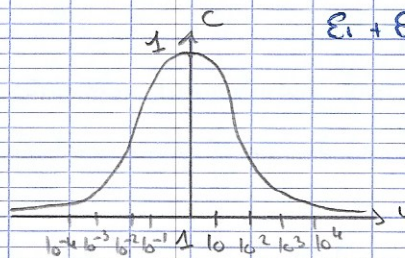
Franges d'interférences :

- **surfaces brillantes** : ensemble des pts M de l'espace où l'éclairement est max $\rightarrow \Delta\varphi(M) = 2m\pi$ $m \in \mathbb{Z}$. Les intersect^{ns} de ces surfaces avec l'écran d'observatⁿ sont les courbes d'éclairement max appelées franges d'interférences brillantes.
- **surfaces sombres** : ensemble des pts M où E est min $\rightarrow \Delta\varphi(M) = (2m+1)\pi$. Les intersect^{ns} de ces surfaces avec l'écran et les courbes d'éclairement min et st appelées franges d'interférences sombres.

On appelle **contraste** ou **visibilité** d'une figure d'interférences la quantité :

$$C = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

Avec la formule de Fresnel on a $C = \frac{2\sqrt{E_1 E_2}}{E_1 + E_2}$



$$u = \frac{E_1}{E_2} \quad C = \frac{2\sqrt{u}}{1+u}$$

Contraste max pour $u = 1 \rightarrow C$ est max quand $E_1 = E_2$

La formule de Fresnel peut également s'écrire

$$E_{\min} = E_{\text{moy}} (1 - C)$$

$$E_{\max} = E_{\text{moy}} (1 + C)$$

$$E(M) = E_{\text{moy}} (1 - C \cos(\Delta\varphi(M)))$$

Retour sur la notion de cohérence

L'éclairement s'écrit aussi:

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) + K \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} ((S_2 M) - (S_1 M)) + \varphi_{02} - \varphi_{01} \right) \right\rangle$$

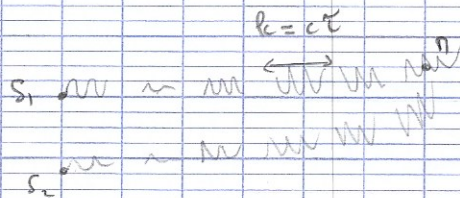
Cas de 2 sources distinctes

Deux sources ponctuelles distinctes quasi-monochromatiques ne produisent pas d'interférences. Elles constituent deux sources incohérentes. Les éclairements qu'elles produisent en M s'ajoutent:

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M)$$

Cas de 2 sources mutuellement cohérentes

Soit 2 sources S_1 et S_2 "jumelles"



• Dans le cas où $S(M) < \lambda$ les trains d'ondes de S_1 et S_2 se superposent en M.

Les 2 ondes sont synchrones en M: $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ et $\vec{E}_{01} \parallel \vec{E}_{02}$

→ S_1 et S_2 sont mutuellement cohérentes

• $S(M) > \lambda$ → S_1 et S_2 ne sont plus mutuellement cohérentes

On peut observer des interférences que si la différence de marche $S(M)$ est inférieure à la longueur de cohérence λ_c du rayonnement émis par la source

Superposition de N ondes lumineuses

On suppose ici que les N ondes ont toutes la même amplitude au point M.

On peut pour la source S_{p+1} et S_p que les trains de phase: $\varphi_{p+1}(M) - \varphi_p(M) = \varphi$

La vibration lumineuse rayonnée par S_p s'écrit en M :

$$\underline{a}_p(M, t) = a_p \exp(i(\omega t - \varphi_p(M)))$$

$$\Rightarrow \underline{a}_{p+1}(M, t) = \underline{a}_p(M, t) \exp(i(\varphi_p(M, t) - \varphi_{p+1}(M, t))) = \underline{a}_p(M, t) \exp(-i\varphi)$$

On a alors : $\underline{a}_2(M, t) = \underline{a}_1(M, t) \exp(-i\varphi)$

$$\dots \underline{a}_p(M, t) = \underline{a}_{p-1}(M, t) \exp(-i\varphi)$$

En multipliant membre à membre les ces égalités on exprime $\underline{a}_p(M, t)$:

$$\underline{a}_p(M, t) = \underline{a}_1(M, t) \exp(-i(p-1)\varphi)$$

$$\Rightarrow \underline{a}(M, t) = \sum_{p=1}^N \underline{a}_1(M, t) \exp(-i(p-1)\varphi)$$

Eclairement résultant :

L'éclairement résultant au point M s'écrit

$$E(M) = \frac{1}{d} K a_p(M, t) \cdot a_p^*(M, t) = E_{\text{max}} \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N^2 \sin^2(\varphi/2)}$$

E fait apparaître des pics quand E prend sa valeur max (modulo 2π)

↳ chaque pic \rightarrow frange brillante \rightarrow interférences totalement constructives.

La finesse des pics (des franges) les plus brillantes augmente avec N

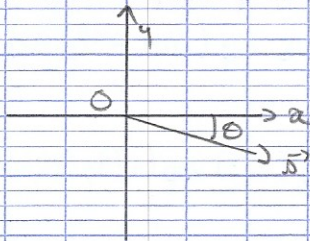
Interprète à l'aide de la représentat° de Fresnel

Soit $\underline{a} = a_0 \exp(-i\theta)$

$$\hookrightarrow \underline{a} = a_0 \cos\theta - i a_0 \sin\theta$$

Dans le plan (Oxy) $\rightarrow \vec{a} = \text{Re}(\underline{a}) \vec{u}_x + \text{Im}(\underline{a}) \vec{u}_y = a_0 \cos\theta \vec{u}_x - a_0 \sin\theta \vec{u}_y$

Le vecteur est appelé vecteur de Fresnel



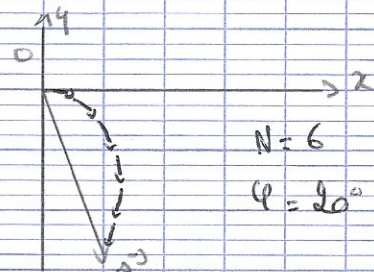
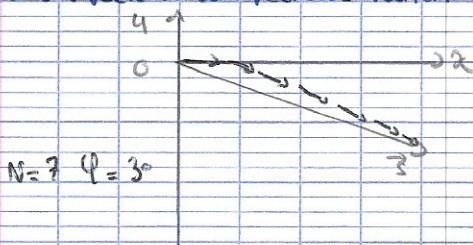
$$-\theta = \arg(\underline{s})$$

Représentation de la n^o et lumineuse résultante

Pour représenter la n^o et lumineuse résultante lumineuse $\underline{s}(M)$ on représente chacune des n^o lumineuses $\underline{s}_p(M)$ par un vecteur de Fresnel. En faisant l'addition vectorielle de ces N vecteurs on obtient le vecteur de Fresnel de $\underline{s}(M)$

↳ on voit que le vecteur \underline{s}_{p+1} forme un angle $-\varphi$ avec \underline{s}_p

↳ on représente ces vecteurs bout à bout en faisant une rotation de $-\varphi$ en passant d'un vecteur au vecteur suivant.

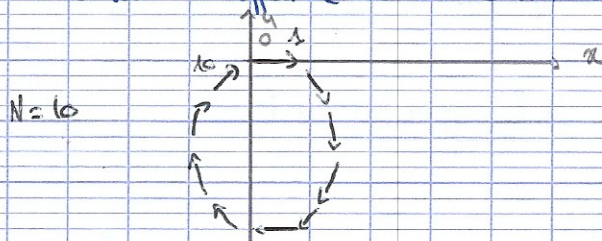


Interférence totalement constructive : \rightarrow qd \underline{s} a une norme maximale $\rightarrow \varphi = 2m\pi$

↳ Tt les vecteurs de Fresnel sont alors colinéaires et alignés selon l'axe (Ox)

↳ $E(M)$ est maximal

Interférence totalement destructives : \rightarrow qd \underline{s} a une norme nulle \rightarrow qd on place \underline{s}_p bout à bout on effectue un nombre entier de tours



$$\text{Ici } N\varphi = 2q\pi \quad q \neq 0$$

et multiple de N

On définit la largeur $\Delta\varphi$ d'un pic principal comme étant la variat^o de φ entre les 2 annulat^o de l'éclairement qui bordent ce pic \rightarrow

$$\Delta\varphi_N = \frac{4\pi}{N}$$

La largeur $\Delta \nu$ d'un pic est définie :

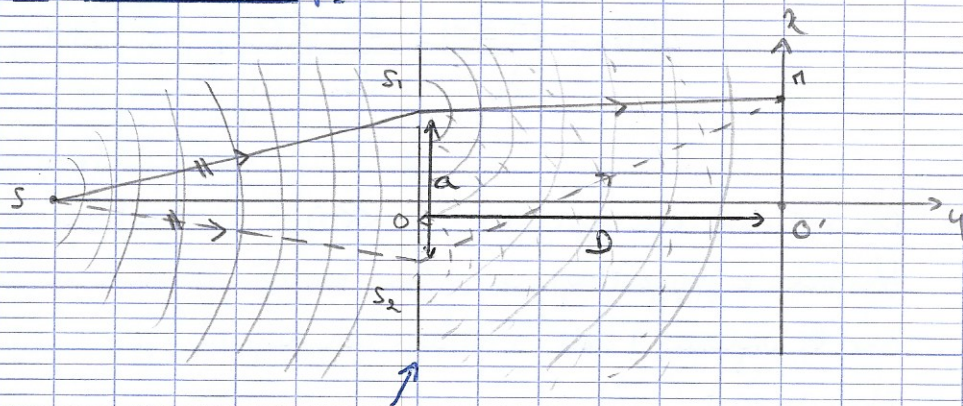
$$\Delta \nu_N = \frac{2\pi}{\delta \tau_N} = \frac{N}{\Delta}$$

croît avec N

↳ propriété utile en spectroscopie

Dispositif interférentiel par division du front d'onde - les trous d'Young

Dispositif des trous d'Young



dispositif interférentiel à deux voies

Un dispositif interférentiel donné, pour un point M d'observation donné, est configuré en division du front d'onde lorsque les 2 rayons lumineux qui parviennent en M sont issus de 2 rayons distincts qui émergent de la source.

On comprend bien le dénominateur de "division du front d'onde". Les deux trous d'Young diffractent la lumière incidente. Ils sont éclairés par la même surface d'onde et peuvent être considérés comme deux sources mutuellement cohérentes, qui vont émettre la même séquence de trains d'ondes.

Descriptif du champ d'interférences

Le champ d'interférence correspond à tout le volume de l'espace où les ondes diffractées par les 2 trous se recouvrent. Expérimentalement les franges d'interférences sont visibles quelque soit le point de l'écran par rapport aux 2 trous.

↳ les interférences sont non localisées

↳ propriété du dispositif interférentiel fonctionnant par division du front d'onde

Différence de phase, différence de marche et ordre d'interférence

Pour décrire les franges d'interférences observées il faut calculer $\Delta\varphi(M)$:

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left((SM)_{\text{voie 2}} - (SM)_{\text{voie 1}} \right)$$

chemin de S_1 et S_2 passant par S_2

On se trouve dans des cond^{ts} : $a \ll \lambda_0$ ($a \sim \text{cm}$) ($\lambda_0 \sim \text{m}$) et $|\alpha| \ll 1$

Les ondes se propagent dans un milieu homogène d'indice n dont on néglige les variations avec la longueur d'onde (milieu non dispersif).

Alors on écrit

$$\delta(M) = n \left((SS_2 + S_2M) - (SS_1 + S_1M) \right) = n (S_2M - S_1M)$$

car S équidistant de S_1 et S_2

Soit

$$\|\vec{S}_1\vec{M}\|^2 = (\vec{S}_1\vec{O} + \vec{O}\vec{M})^2 = \|\vec{S}_1\vec{O}\|^2 + \|\vec{O}\vec{M}\|^2 + 2\vec{S}_1\vec{O} \cdot \vec{O}\vec{M}$$

$$\|\vec{S}_2\vec{M}\|^2 = \|\vec{S}_2\vec{O}\|^2 + \|\vec{O}\vec{M}\|^2 + 2\vec{S}_2\vec{O} \cdot \vec{O}\vec{M}$$

On a $OS_1 = OS_2$

$$\rightarrow \|\vec{S}_2\vec{M}\|^2 - \|\vec{S}_1\vec{M}\|^2 = 2(\vec{S}_2\vec{O} - \vec{S}_1\vec{O}) \cdot \vec{O}\vec{M} = 2\vec{S}_2\vec{S}_1 \cdot \vec{O}\vec{M}$$

Alors,

$$S_2M - S_1M = \frac{S_2M^2 - S_1M^2}{S_2M + S_1M} \quad \text{Afin d'obtenir une express^o approché de $\delta(M)$$$

à l'ordre minimal en a/λ_0 il suffit d'écrire que $S_1M + S_2M \approx 2a$

→

$$\delta(M) \approx n \frac{2\vec{S}_2\vec{S}_1 \cdot \vec{O}\vec{M}}{2a} = n \vec{u} \cdot \vec{S}_2\vec{S}_1 \quad \text{où } \vec{u} = \frac{\vec{O}\vec{M}}{a} \text{ vecteur unitaire}$$

Finalement on a

$$\delta(M) = n(S_2M - S_1M) = n \vec{u} \cdot \vec{S}_2\vec{S}_1$$

→ Différence de phase

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{u} \cdot \vec{S}_2\vec{S}_1$$

→ Ordre d'interférence

$$p(M) = \frac{n}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \vec{S}_2\vec{S}_1$$

Champs d'interférences

Is il faut donner le vecteur unitaire \vec{u}

$$\text{Soit } \vec{OH} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \Rightarrow \|\vec{OH}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx D$$

Au 1^{er} ordre en $|x|/D$ et $|z|/D$ alors,

$$\vec{u} \approx \frac{x}{D}\vec{u}_x + \vec{u}_y + \frac{z}{D}\vec{u}_z$$

Connaissant $\vec{S}_2 \vec{S}_1 = a\vec{u}_x$, alors on a:

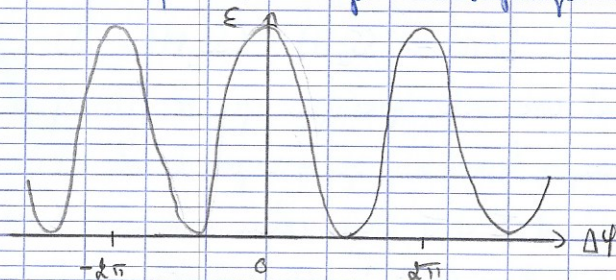
- Différence de marche :
$$\delta(M) \approx \frac{\max}{D}$$

- Différence de phase :
$$\Delta\varphi(M) \approx \frac{2\pi \max}{\lambda_0}$$

- Ordre d'interférences :
$$p(M) \approx \frac{\max}{\lambda_0 D}$$

- Éclairement :
$$E(M) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \max}{\lambda_0 D}\right)\right)$$
 où E_0 éclairement rayonné par chaque trou

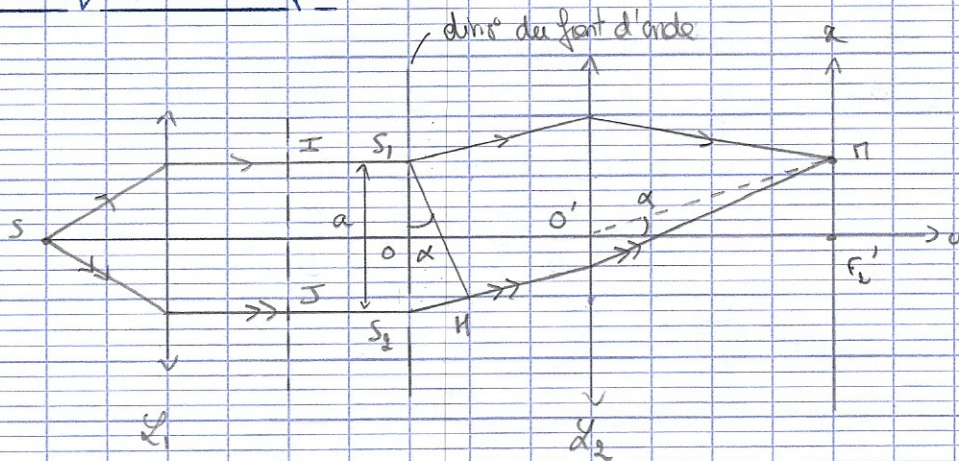
→ L'éclairement dépend uniquement de x . L'éclairement présente une période spatiale qu'on nomme interférence. Chaque frange brillante est repérée par une valeur entière de l'ordre d'interférence. Le point des franges brillantes est $x_p = p \frac{\lambda_0 D}{m\alpha}$



Des franges d'interférences, sur un écran à grande distance parallèle au plan contenant les trous d'Young, apparaissent rectilignes. Leur période spatiale est appelée interférence, elle est donnée par la relation :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{m\alpha}$$

Montage de Fraunhofer



La source S est placée au foyer principal objet de la lentille L_1 , et le pt d'observation M est placé dans le plan focal image de la seconde lentille L_2 .

Les champs d'interférences sont observés dans le plan focal de la lentille L_2 .

Le "casseuse" des rayons au niveau des foyers d'Young est le fait de la diffraction

$$\vec{\rho} = (0\vec{y}, 0\vec{z})$$

↳ l'emploi des lentilles impose que les rayons soient peu inclinés par rapport à l'axe (condition de Gauss) $\rightarrow \alpha$ petit

$$\Rightarrow \tan \alpha \approx \frac{x}{f'} \approx \alpha \quad a = \overline{S_1 S_2} \text{ et } f' = \overline{O_2' M}$$

Pour connaître l'état d'interférences en M , on doit calculer le $\#$ de marche en M :

$$S(M) = (SS_1 M) - (SS_2 M) = (SS_1) - (SS_2) + (S_1 M) - (S_2 M)$$

S émet une onde sphérique que L_1 transforme en onde plane. Un plan orthogonal aux rayons lumineux qui émergent de L_1 est un plan d'onde : c'est le cas du plan qui contient I et J mais celui contenant S_1 et S_2 $\rightarrow SS_1 = SS_2$

Pour calculer $(S_2 M) - (S_1 M)$? Imaginons qu'on place une source ponctuelle en M . D'après la loi du retour inverse, les rayons issus de M rejoignent les m , mais perçus en sens inverse. Le plan passant par S_1 et orthogonal à ces rayons (plan passant par H) reçoit d'après le théorème de Malus, un plan d'onde $\rightarrow (MS_1) = (MH)$

↳ le chemin optique est le m quelque soit le sens $\rightarrow (S_1 M) = (HM)$

↳ donc si les ondes arrivent déphasées en M , leur retard relatif s'est produit avant ce plan (H) $\rightarrow (S_2 M) - (S_1 M) = m \overline{S_2 H}$

⚠ Le plan contenant S_1 et M n'est pas un plan d'onde car les ondes issues

des 2 trous S_1 et S_2 ne st pas planes, seuls les 2 rayons provenant en M st // . Nous devons que ce plan est un plan d'onde relatif au pt M .

leur $S(M)$ en a :

$$S(M) = n \overline{S_2 M} = \max_{M \in \mathcal{D}} n d \approx n \frac{ax}{f'}$$

$$\text{Soit } \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

La différence de marche à l'infini $(S_2, r_{2\infty}) - (S_1, r_{1\infty})$ entre 2 rayons lumineux parallèles (de sens \vec{u}) qui proviennent de S_2 et S_1 est

$$S(M) = n \vec{u} \cdot \overline{S_2 S_1}$$

On peut alors exprimer :

- Différence de phase :
$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} S(M) = \frac{2\pi \max}{\lambda \cdot f'}$$

- Ordre d'interférences :
$$p(M) = \frac{S(M)}{\lambda} = \frac{\max}{\lambda \cdot f'}$$

- Eclairement
$$E(M) = 2 E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \max}{\lambda f'}\right) \right)$$

- Interfrange
$$i = \frac{\lambda \cdot f'}{na}$$

Modification du dispositif

Influence du déplacement de la source ponctuelle

Soit le déplacement de S au point S' avec $\vec{S_2 S'} = \vec{SS'}$

→ S' n'est plus équidistante des 2 trous $\Rightarrow \overline{S' S_1} \neq \overline{S' S_2}$

↳ Il existe une différence de marche supplémentaire associée au décalage de la source.

$$\rightarrow \Delta S(M) = n \frac{\overline{S_2 S'} - \overline{S_1 S'}}{D_0} \quad \rightarrow \Delta p(M) = n \frac{\overline{S_2 S'} - \overline{S_1 S'}}{\lambda \cdot D_0}$$

Des trous d'Young aux fentes d'Young

On peut remplacer la source ponctuelle par une fente source allongée dans la direct° orthogonale à l'axe des 2 trous, sans modifier le contraste de la figure d'interférences.
→ on parle du dispositif interférentiel des fentes d'Young

Visibilité des franges produites par deux sources ponctuelles incohérentes

On déplace maintenant la source dans la direct° \vec{u}_x parallèle à l'axe des trous

↳ $\vec{S} = b\vec{u}_x$

↳ la variat° de l'axe d'interférences qui en résulte est obtenue :

$$\Delta p(M) = \frac{mab}{d_0 D_0}$$

$$\Rightarrow p(M) = \frac{\max}{d_0 D_0} + \frac{mab}{d_0 D_0}$$

$$\Rightarrow E'(M) = 2E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \max}{d_0 D_0} + \frac{2\pi mab}{d_0 D_0}\right) \right)$$

Le terme cité dans l'exposant de E correspond à un décalage en Max des franges qu'on peut calculer en comparant la posit° de la frange d'axe p avant et après déplacement :

$$\bullet S = \alpha_p^{(s)} = p \frac{d_0 D_0}{ma}$$

$$\bullet S' = \alpha_p^{(s')} = p \frac{d_0 D_0}{ma} - \underbrace{\frac{D_0 b}{d_0}}_{\text{décalage spatial}}$$

La superposit° des éclairements de S et S' se traduit par une diminut° de la visibilité des franges (diminut° uniforme)

$$E_{\text{total}}(M) = E(M) + E'(M) = 4E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi mab}{d_0 D_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi \max}{d_0 D_0} + \frac{\pi mab}{d_0 D_0}\right) \right)$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}}^{\text{max}} = 4E_0 \left(1 + \left| \cos\left(\frac{\pi mab}{d_0 D_0}\right) \right| \right)$$

$$E_{\text{tot}}^{\text{min}} = 4E_0 \left(1 - \left| \cos\left(\frac{\pi mab}{d_0 D_0}\right) \right| \right)$$

$$\Rightarrow \text{visibilité} = V = \frac{E_{\text{tot}}^{\text{max}} - E_{\text{tot}}^{\text{min}}}{E_{\text{tot}}^{\text{max}} + E_{\text{tot}}^{\text{min}}} = \left| \cos \left(\frac{\pi m a b}{d_0 D_0} \right) \right| = \left| \cos(\pi \Delta p(M)) \right|$$

La visibilité de la figure d'interférences produites par 2 sources ponctuelles incohérentes est :

- maximales lorsque Δp est égal à un entier
- nulle qd Δp est égale à un entier + $1/2$

Visibilité des franges produites par une source étendue

↳ source en forme de segment lumineux étendue dans le direct° u_z .

Les franges d'interférences produites par une source étendue sont bien visibles au pt M à condit° que :

$$|\Delta p(M)| \leq 1/2$$

où $\Delta p(M)$ est le variat° de l'ordre d'interférences en M qd on passe d'une source ponctuelle placé au centre de la source étendue à une source ponctuelle placé au bord de la source étendue.

Longueur de cohérence spatiale d'une source étendue

Soit θ l'angle sous lequel est vue la source étendue depuis O, le centre des 2 trous.

$$\theta = 2b / D_0$$

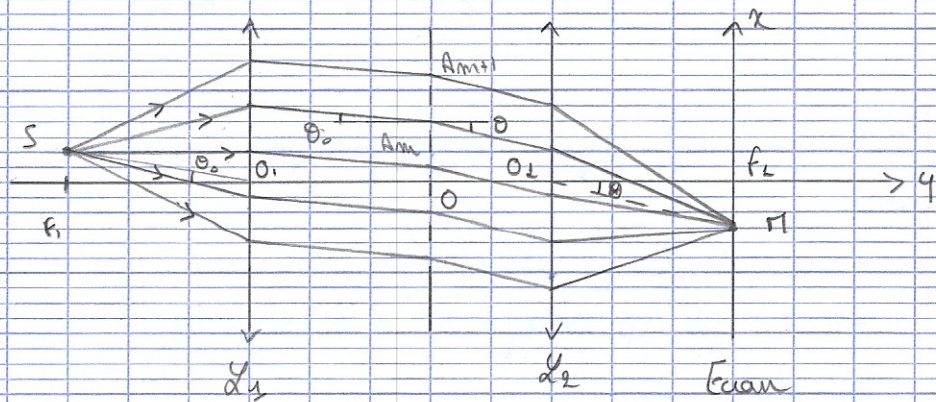
Les franges d'interférences sont observables avec une bonne visibilité à condit° que :

$$a \leq l_c$$

où $l_c = \frac{d_0}{m\theta}$ est la longueur de cohérence spatiale de la source. Plus la source

est vue sous un angle faible, plus sa longueur de cohérence spatiale augmente, et plus il est aisé d'obtenir des franges d'interférences visibles.

Dispositif interférentiel de 3 trous d'Young

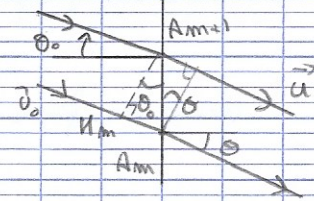


Distance entre A_{m+1} et $A_m = a$

Conditi^o de Gauss $\rightarrow \theta_0 \ll 1 \quad \theta \ll 1$

On a $(S_{Hm}) = (S_{A_{m+1}})$

$(H_{m+1}, M) = (A_m, M)$



On a $S_{m+1, m}(M) = - \underbrace{(H_m A_m)}_{ma \sin \theta_0} + \underbrace{(A_{m+1} H_{m+1})}_{ma \sin \theta}$

\rightarrow Différence de marche

$$S(M) = ma(\sin \theta - \sin \theta_0)$$

- Différence de phase =

$$\Delta \varphi(M) = \frac{2\pi ma}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

- Ordre d'interférences

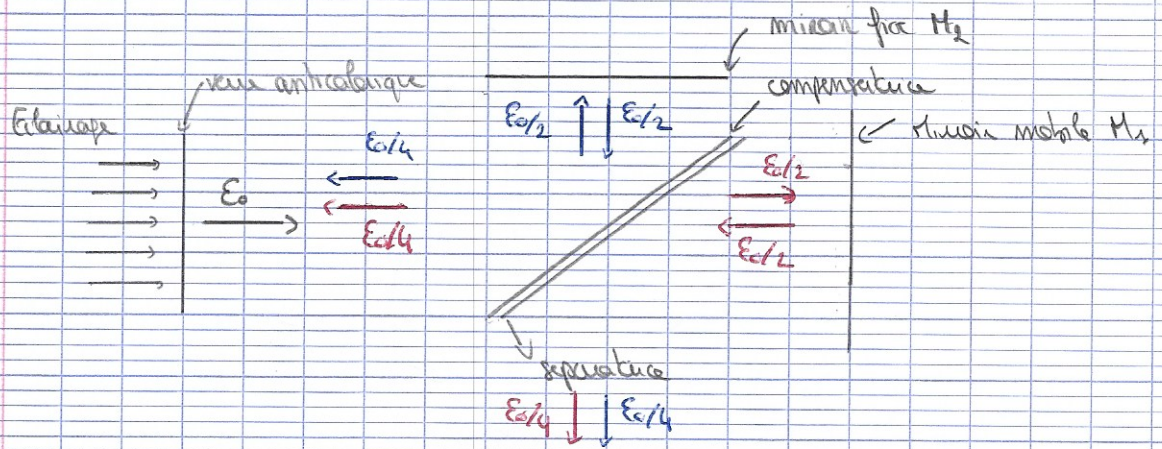
$$p(M) = \frac{ma}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

Les maxima d'éclairement correspondent aux direct^o θ pour lesquelles il y a interférence totalement constructive des N ordres

$$\rightarrow \sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{ma}$$

l'interféromètre de Michelson

Dispositif

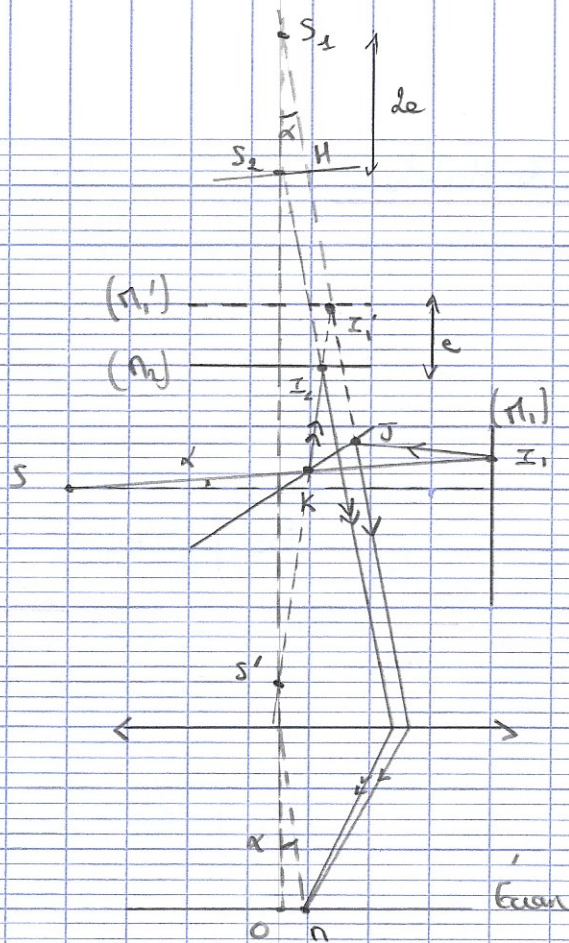


Configuration en lame d'air éclairé par une source étendue

Def: On dit que l'interféromètre est configuré en lame d'air lorsque les 2 miroirs (M_1) et (M_2) sont perpendiculaires

Pour l'interféromètre de Michelson, réglé en lame d'air, et éclairé par une source spatialement étendue, les franges d'interférences sont localisées à l' ∞

On appelle épaisseur de la lame d'air la distance (M_2) et (M_1)



Pour un interféromètre de Michelson, configuré en lame d'air, et éclairé par une source étendue, les franges d'interférences sont localisées à l'endroit où la différence de marche, la différence de phase, l'ordre d'interférences et l'éclairement sont :

- Différence de marche :

$$S(M) = d_2 - d_1 \cos \alpha$$

- Différence de phase :

$$\Delta \varphi(M) = \frac{4\pi d_2 \cos \alpha}{\lambda}$$

- Ordre d'interférences :

$$p(M) = \frac{2d_2 \cos \alpha}{\lambda}$$

- Éclairement

$$E(M) = \frac{E_0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi d_2 \cos \alpha}{\lambda} \right) \right)$$

Quand un dispositif interférentiel, éclairé par une source étendue, fonctionne peu devant d'amplitude, les franges d'interférences sont localisées sur une surface, appelée surface de localisation où la visibilité des franges d'interférences est maximale. La surface de localisation est constituée de l'ensemble des pts M qui correspondent à l'intersection des 2 rayons émergents de l'interféromètre, et qui sont issus d'un seul et même rayon émergent de la source.

Rayon des anneaux successifs : l'ordre d'interférences est une fct^e décroissante de α .
 La valeur max est donc réalisée au centre de la figure d'interférences pour $\alpha = 0$. On note $p(\alpha = 0) = p_0 + E_x$ avec $p_0 = |p(\alpha = 0)|$ et $0 \leq E_x \leq 1$.
 E_x est l'excentricité fractionnaire.

Soit $r = OM$ et $\alpha \ll 1$

$$\Rightarrow \alpha \approx \tan \alpha = \frac{r}{f'}$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{d m e}{d_0} \cos(\alpha_1) \approx \frac{d m e}{d_0} \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{2}\right) = \frac{d m e}{d_0} \left(1 - \frac{r^2}{2 f'^2}\right)$$

$$\Rightarrow r_m = f' \left(d \left(1 - \frac{d_0}{d m e} p_0\right) \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow r_m = f' \sqrt{d \left(1 - \frac{d_0}{d m e} (p_0 - m + 1)\right)}$$

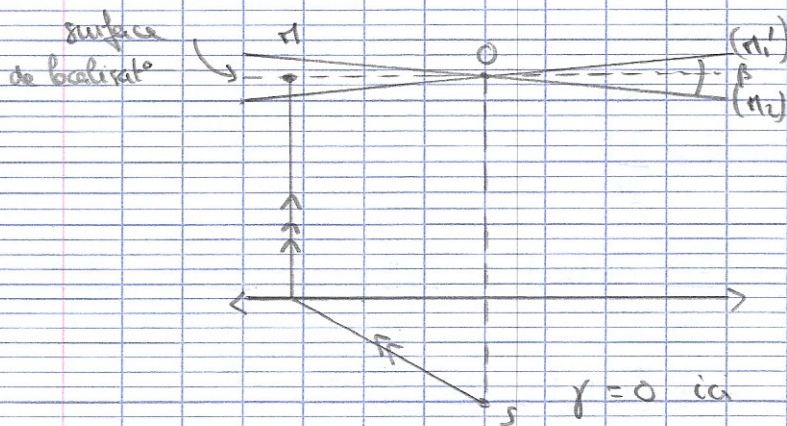
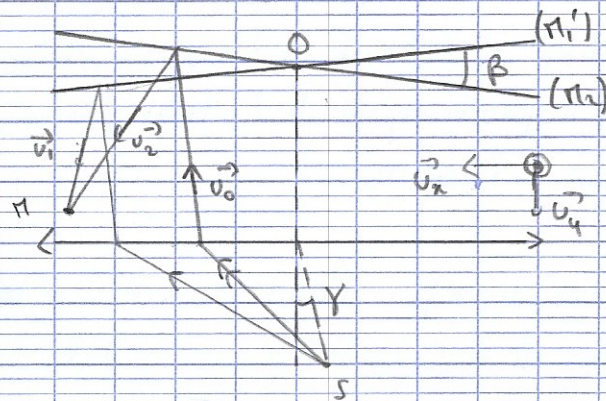
Qd e diminue, un anneau donné rétrécit et finit par disparaître au centre de la figure d'interférences.

Au contact optique ($e = 0$), l'écran est uniformément éclairé ; c'est le cas plat.

Configuration du coin d'air éclairé par une source étendue

Def : On dit que l'interféromètre est configuré en coin d'air lorsque les deux miroirs (M_1) et (M_2) ne sont pas perpendiculaires.

En coin d'air, et éclairé par une source spatialement étendue, les franges d'interférences sont localisées au voisinage des miroirs



Pour un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source spatialement étendue, les interférences sont localisées sur une surface voisine des 2 miroirs. En un point M de cette surface, où l'épaisseur locale entre les 2 miroirs est $c(M)$, l'ordre d'interférences $p(M)$ et $S(M)$ sont :

$$p(M) = \frac{2mc(M)}{d_0} \quad \text{et} \quad S(M) = 2mc(M)$$

Soit $c(x) = \beta x$. Si β est faible on a

$$S(M) = \frac{E_0}{d} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi m \beta x}{d_0}\right) \right)$$

$$i = \frac{d_0}{2m\beta}$$

Diffraction

Superposition d'ondes planes progressives harmoniques

Soit une OPPH de vecteur d'onde \vec{k} et de fréquence ν et de pulsation $\omega = 2\pi\nu$
Sa représentation complexe est:

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = \underline{A}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

Le repère cartésien ortho-normal est complété par les axes O_x et O_y :

$$\underline{s}(x, y, z, t) = \underline{A}_0 \exp(-i(k_x x + k_y y)) \exp(i(\omega t - k_z z))$$

Le facteur $\exp(-i k_x x)$ est une fct de x période spatiale $\frac{2\pi}{k_x}$

↳ inverse d'une période spatiale = fréquence spatiale

Une OPPH:

$$\underline{s}(x, y, z, t) = \underline{A}_0 \exp(-i(k_x x + k_y y)) \exp(i(\omega t - k_z z))$$

$$\text{a peu fréquences spatiales} = \begin{cases} u = \frac{k_x}{2\pi} \text{ en } x \\ v = \frac{k_y}{2\pi} \text{ en } y \end{cases}$$

Superposit° de 2 OPPH:

↳ Soit 2 OPPH de m^{ême} pulsation ω . Le milieu est supposé non dispersif de sorte que les vecteurs d'ondes ont le m^{ême} module $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Les 2 vecteurs d'onde sont choisis tel que:

$$\vec{k}_+ = k(\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z) \quad \text{et} \quad \vec{k}_- = k(-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z)$$

Ils se trouvent dans le plan (Oxz) et font avec Oz les angles respectifs θ et $-\theta$.

On suppose que les 2 ondes ont le m^{ême} amplitude A_0 et qu'elles sont en phase en O , c'est-à-dire comme origine du repère. On a les amplitudes complexes:

$$a_+(x, y, z) = A_0 \exp(-ik(x \sin\theta + z \cos\theta))$$

$$a_x(x, y, z) = A_0 \exp(-ik(-x \sin \theta + z \cos \theta))$$

Le principe de superposit^o donne alors :

$$\begin{aligned} \underline{a}(x, y, z) &= A_0 \exp(-ikz \cos \theta) (\exp(ikx \sin \theta) + \exp(-ikx \sin \theta)) \\ &= A_0 \exp(-ikz \cos \theta) 2 \cos(kx \sin \theta) \end{aligned}$$

Elle est périodique de période $\frac{2\pi}{k \sin \theta} = \frac{d}{\sin \theta}$ de la fréquence spatiale $\nu_0 = \frac{\sin \theta}{d}$

L'éclairement est de la forme $E = E_0 \cos^2(2\pi \nu_0 x) = 2E_0 (1 + \cos(4\pi \nu_0 x))$

Superposit^o de 3 ordes

↳ 3^e ordre $k_x^2 = k_0^2$ en phase en 0 et d'amplitude 2 fois plus grande
 $\rightarrow \underline{a}(x, y, z) = 2A_0 (\exp(-ikz) + \exp(-ikz \cos \theta) \cos(kx \sin \theta))$

↳ cette fois la factorisat^o en une fct^o de x et de z n'est plus possible sauf dans le plan $z=0 \rightarrow \underline{a}(x, y, 0) = 2A_0 (1 + \cos(2\pi \nu_0 x))$ avec $\nu_0 = \frac{d}{\sin \theta}$

Une répartition d'amplitude variable dans un plan $(0, x, y)$ perpendiculaire à la direct^o moyenne de propagat^o (Oz) d'un faisceau lumineux monochromatique peut être comprise comme une superposit^o d'ondes planes progressives harmoniques de même fréquence temporelle.

L'ensemble des vecteurs d'onde constitue le spectre en ondes planes du faisceau. La relat^o de dispersion $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2$ permet de nous donner que

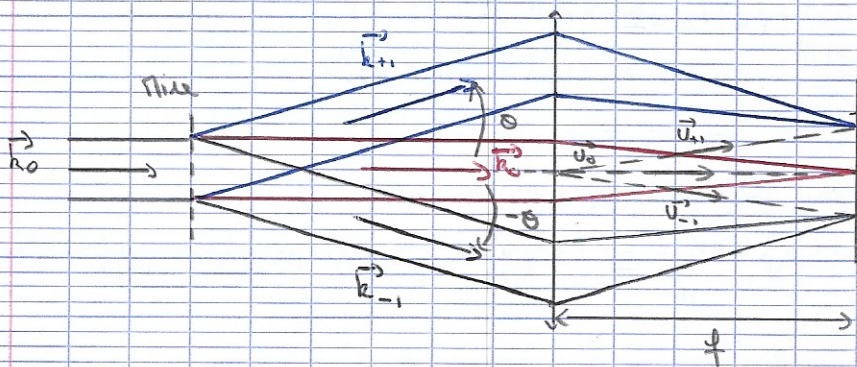
2 composantes $k_x = 2\pi u$ et $k_y = 2\pi v$ de deux vecteurs d'onde

L'ensemble des couples (u, v) présents dans la décomposit^o constitue le spectre de fréquences spatiales du faisceau.

Action d'un objet transparent sur une onde

Le montage consiste à éclairer par une onde plane monochromatique en incidence normale un objet plan, mince et partiellement transparent qui modifie la répartition d'amplitude de l'onde.

L'objet placé sur le trajet de la lumière est plan et mince. Il est isolaire de sorte qu'il modifie l'amplitude complexe de l'onde incidente de façon harmonique dans la direction Ox avec une période spatiale a . L'objet est appelé "mise harmonique". C'est un réseau partiellement de pas a . La période a est de l'ordre de quelques dizaines à une centaine de longueurs d'onde.



Observat°

- On observe des direct° privilégiées dans l'onde émergente. Il y a essentiellement 3 faisceaux quasi-cylindriques coplanaires. Les angles θ entre les axes des faisceaux et la normale à la mise sont $\theta_0 = 0$ et θ_{\pm} tels que $\sin \theta_{\pm} = \pm \frac{d}{a}$. L'éclairissement des faisceaux correspondant à θ_+ et θ_- (ordre 1 et ordre -1), est plus faible que celui des faisceaux central (ordre 0).
- L'ajout d'une lentille convergente qui intercepte les 3 faisceaux provoque l'apparition de 3 taches lumineuses intenses et de petite taille dans son plan focal, mais, ce qui suggère de découper les 3 faisceaux cylindriques par des ondes planes.

Interpretation

1^{de} analyt. on a 3 ondes planes progressives sinusoidales de vecteurs d'onde.

$$\vec{k}_- = k(-\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z), \quad \vec{k}_0 = k\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{k}_+ = k(\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z)$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\sin\theta = \frac{d}{a_0}$

En complexes les amplitudes s'écrivent :

$$a_0(x, y, z) = A_0 \exp(-ikz)$$

$$a_+(x, y, z) = \underline{A}_+ \exp(-ik(x \sin\theta + z \cos\theta))$$

$$a_-(x, y, z) = \underline{A}_- \exp(-ik(-x \sin\theta + z \cos\theta))$$

en 1 et -1 m amplitude
↳ par symétrie du montage

Dans le plan $z=0$ nous avons :

$$a_0(x, y, z) = A_0$$

$$a_+(x, y, z) = \underline{A}_+ \exp(-ika \sin\theta)$$

$$a_-(x, y, z) = \underline{A}_- \exp(-ika \sin\theta)$$

Le superposition des 3 amplitudes donne :

$$a(x, y) = A_0 + \underline{A}_+ (\exp(-ika \sin\theta) + \exp(ika \sin\theta)) = A_0 + 2 \underline{A}_+ \cos(ka \sin\theta)$$

Si la miue est idéale on a $|A_0| = 2 |A_+|$. Si on suppose que l'objet ne fait que déphaser l'onde incidente uniformément dans le plan (x, y) , le rapport \underline{A}_+ / A_0 est réel, on peut donc écrire :

$$a(x, y) = 2A_0 (1 + \cos(ka \sin\theta)) = 2A_0 (1 + \cos\left(\frac{2\pi}{a_0} x\right))$$

Cela suggère d'affirmer que l'objet a pour effet de multiplier l'amplitude A_0 de l'onde plane d'éclairage par une fct° $\tau(x)$:

$$a(x, y, 0_+) = A_0 \tau(x, y) \quad \text{avec} \quad \tau(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos\left(\frac{2\pi}{a_0} x\right)) & \text{si } |y| < h/2 \\ 0 & \text{si } |y| > h/2 \end{cases}$$

où h désigne les dimensions de l'objet suivant O_y et 0_+ une valeur de z qui tend vers 0 par valeurs supérieures.

2^{ème} analyse = Demande inverse = consiste à faire une hypothèse sur la nature de l'objet dès le début.

On voit que :

$$r(x, y) = \begin{cases} 1/2 (1 + \cos(2\pi \frac{x}{a})) & \text{si } |y| < h/2 \\ 0 & \text{si } |y| > h/2 \end{cases}$$

Alors,

$$a(x, y, 0_+) = A_0 r(x, y) = \frac{A_0}{2} (1 + \cos(2\pi \frac{x}{a}))$$

En utilisant les formules d'Euler pour le cosinus :

$$a(x, y, 0_+) = A_0 + \frac{A_0}{2} \exp(i 2\pi \frac{x}{a}) + \frac{A_0}{2} \exp(-i 2\pi \frac{x}{a})$$

On l'amplitude complexe d'une OPPH qui est de la forme $\exp(-ik' \cdot \vec{r})$ a pour expression dans le plan $z=0$: $\exp(-i(k_x x + k_y y))$

On propose de lire $a(x, y, 0_+)$ comme la somme de 3 ondes planes progressives harmoniques exprimées dans le plan $z=0$. Les vecteurs d'onde seraient :

$$\bullet k_x = 0, k_y = 0$$

$$\bullet k_x = -\frac{d\pi}{a}, k_y = 0$$

$$\bullet k_x = \frac{d\pi}{a}, k_y = 0$$

La relat° de dispersion impose à chaque k : $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{d\pi}{\lambda}\right)^2$. Alors :

$$\bullet k_z^2 = \left(\frac{d\pi}{\lambda}\right)^2 \text{ ou encore } k_{oz} = \pm \frac{d\pi}{\lambda}$$

$$\bullet k_{\pm z}^2 = \left(\frac{d\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{d\pi}{a}\right)^2 \text{ ou encore } k_{\pm z} = \pm \frac{d\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}$$

$$\text{Soit } \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a} \text{ on obtient } k_{\pm z} = \pm \frac{d\pi}{\lambda} \cos \theta \rightarrow a > \lambda$$

Les signes (-) correspondent à des ondes qui se propagent vers la source et qui ne sont pas observées. Les signes (+) correspondent à deux ondes planes progressives harmoniques tq $(\vec{v}_z^+, \vec{k}_z^+) = \theta$ et $(\vec{v}_z^-, \vec{k}_z^-) = -\theta$

Transmittance d'un objet mince

En un point P d'un objet mince et plan, l'amplitude complexe $\underline{a}(P_-)$ juste avant l'objet est reliée à l'amplitude complexe $\underline{a}(P_+)$ juste après l'objet par la relation :

$$\underline{a}(P_+) = \hat{\tau}(P) \underline{a}(P_-)$$

$\hat{\tau}(P)$ est appelé facteur de transmission, transparence ou transmittance de l'objet. Elle est caractéristique de cet objet.

Objet d'amplitude = Un objet d'amplitude modifie seulement l'amplitude réelle de la vib^o lumineuse et pas sa phase

Objet de phase = Un objet de phase modifie uniquement la phase vib^o lumineuse et pas son amplitude réelle. Sa transmittance est de la forme $\hat{\tau}(P) = \exp(-i\phi(P))$

Fréquences spatiales d'un objet plan

Périodiques

La transmittance d'un objet périodique unidimensionnel peut s'écrire :

$$\hat{\tau}(u) = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tau_m \exp(-i2\pi m u_0 x)$$

Si τ est à valeurs réelles $\tau_m = \tau_{-m}^*$

Le spectre spatial d'un objet périodique est discret, $u \in \{u_0, 2u_0, \dots, nu_0, \dots\}$

Non périodiques

La transmittance $\hat{\tau}(u)$ d'un objet unidimensionnel non périodique peut s'écrire :

$$\hat{\epsilon}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\epsilon}(u) \exp(-i2\pi u a) du$$

si $\hat{\epsilon}$ est à valeurs réelles $\hat{\epsilon}(-u) = \hat{\epsilon}^*(u)$
 Le spectre spatial d'un objet non périodique est continu

Plan de Fourier

Chaque point du plan focal image de coordonnées $X \approx \alpha f'$, $Y \approx \beta f'$ est lié à une unique direct^o $\vec{u}(\alpha, \beta)$ de l'espace objet. On verra la lentille est un analyseur d'onde plane - une tache lumineuse en ce pt matérialise les fréquences spatiales :

$$u = \frac{\alpha}{d} \approx \frac{X}{df'} \quad \text{et} \quad v = \frac{\beta}{d} \approx \frac{Y}{df'}$$

La lentille est un analyseur de fréquences spatiales

Reseau de traits équidistants d'étension infinie

On sait que $\hat{\epsilon}(u) = \frac{1}{d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{\epsilon}_m \exp(-i2\pi m u a)$

Pour un réseau de fentes de largeur l et de période a le calcul conduit à :

$$\hat{\epsilon}_m = \frac{1}{a} \frac{\sin(\pi m u a)}{\pi m u a} = \frac{l}{a} \text{sinc}(\pi m u a)$$

$$\hat{\epsilon}_0 = \frac{l}{a} = \text{moyenne de la transmittance sur une période}$$

L'amplitude harmonique de l'objet est de la forme :

$$a(x, y, 0_+) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(x, y, 0_+) \quad \text{avec} \quad a_m(x, y, 0_+) = A_m \hat{\epsilon}_m \exp(-i2\pi m u a)$$

L'amplitude transmise par l'objet de période a est vue comme la superpos^o d'ondes planes progressives harmoniques dont les vecteurs d'ondes \vec{k}_m sont dans le plan $(x, 0, z)$ fermé par la normale à l'objet et la direct^o de la périodicité \vec{k}_y .

$$(\vec{a}_z, \vec{k}_m) = \theta_m \quad \text{avec} \quad \sin \theta_m = m \frac{d}{a} = m d u_0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Diffraction par une fente

Spéctre de fréquences spatiales

$$\text{Soit la fct } \text{rect}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |u| > 1/2 \end{cases}$$

La transmission d'une fente de largeur P (objet binaire) est donc $\hat{t}(h) = \text{rect}\left(\frac{x}{P}\right)$

Cette fct non périodique possède un spectre continu $\hat{E}(u)$ tq :

$$\hat{E}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(u) \exp(-2i\pi u x) dx$$

On admet que $\hat{E}(u) = \text{Pomc}(\pi P u)$

↳ pic centré sur la freq. nulle délimité par les fréquences $-\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{P}$

$$\Delta u \approx \frac{2}{P}$$

Amplitude transmise

On se place en incidence normale : $\underline{a}(x, y, 0) = \underline{A}_e$

$$\underline{a}(x, y, 0_+) = \underline{A}_e \hat{E}(u) = \underline{A}_e \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(u) \exp(-id\pi u x) du$$

Eclairement dans le plan de la lentille

$$\mathcal{E}(x, y) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 \text{omc}^2 \left(\pi \frac{P}{\lambda} \frac{x}{f'} \right) & \text{si } |y| \leq \frac{df'}{h} \\ 0 & \text{si } |y| > \frac{df'}{h} \end{cases}$$

L'éclairement maximal \mathcal{E} est proportionnel au carré $(Ph)^2$ de la surface de la fente