

Mécanique des fluides

Descript° d'un fluide en mvt

Approximat° des milieux continus

Echelle microscopique : à cette échelle se manifeste le caractère fondamentalement discret de la matière.

↳ motif l

e_0 : taille des molécules ou des atomes

distance moyenne entre molécules ($m^{-1/3}$)

libre parcours moyen $d = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$

↳ dans un gaz parfait $d = \frac{k_B T}{\sqrt{2} n \sigma}$ k_B cste de Boltzmann

Echelle macroscopique : grande échelle ($\sim mm, cm, m$)

↳ L

Echelle mesoscopique : $l \ll d \ll L$

↳ L'approximat° des milieux continus correspond à la possibilité de définir une échelle mesoscopique, intermédiaire entre les échelles micro et macro. C'est à l'échelle mesoscopique que sont définies, par un calcul de valeurs moyennes sur un très grand nombre d'entités microscopiques, les grandeurs physiques qui varient continuellement à l'échelle macro. Le milieu est alors qualifié de milieu continu.

Le champ de vitesse dans un fluide en écoulement

Descript° Eulerienne = référentiel fixe \rightarrow toutes les grandeurs physiques sont données en un pt fixe de l'espace, repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = r \vec{e}_r$ et à l'instant t . Ce pt de vue est celui d'un observateur placé au pt fixe M et qui regarde passer les particules de

fluide en ce pt.

↳ notat° → chp de ntère $\vec{v} = \vec{v}(\vec{i}, t)$, les variables x, y, z et t st indépendantes et st appelées variables d'Euler.

Lignes de courant et tubes de champ

↳ Lignes de courant = ce sont les lignes de champ eulerien de ntère $\vec{v}(\vec{i}, t)$. Autrement dit, ce sont les courbes tangentes en chaque pt au vecteur ntère local $\vec{v}(\vec{i}, t)$ à un instant t donné.

↳ Mathématiquement on obtient les lignes de courant d'un ecrt en écrivant :

$$d\vec{P} \wedge \vec{v}(\vec{i}, t) = \vec{0}$$

$d\vec{P}$ est un déplacement élémentaire le long de la ligne de courant

pt de ntère nul = pt d'arrêt ou pt de stagnat°

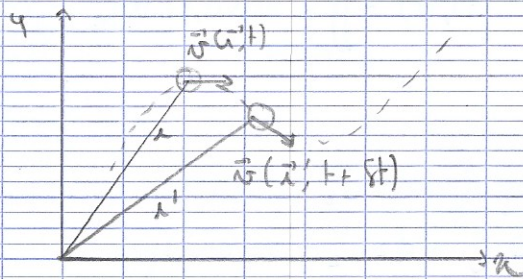
↳ tube de courant = ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.
↳ le vecteur ntère est tangent aux parois du tube de courant, les particules fluides évoluent dans le tube de courant à jamais en n'entra par la surface latérale.

Ecrt stationnaire = ecrt dont tous les champs euleriens ($\vec{v}(\vec{i}, t)$, pression $p(\vec{i}, t)$, $\rho(\vec{i}, t)$, $T(\vec{i}, t)$...) sont indépendants du temps.

Accélération en variables d'Euler :

$$\vec{a}(\vec{i}, t) \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{i}, t + \delta t) - \vec{v}(\vec{i}, t)}{\delta t}$$

↳ car $\vec{v}(\vec{i}, t + \delta t)$ et $\vec{v}(\vec{i}, t)$ ne désignent pas le ntère de la même particule^{de} fluide.



On a $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}(\vec{r}, t) \delta t$

Soit $\delta \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}', t + \delta t) - \vec{v}(\vec{r}, t)$ au t^{e} ordre en δt

↳ $\delta \vec{v} = \vec{v}(x + v_x(\cdot) \delta t, y + v_y(\cdot) \delta t, z + v_z(\cdot) \delta t, t + \delta t) - \vec{v}(x, y, z, t)$

↳ $\delta v_x = v_x(x + v_x(\cdot) \delta t, y + v_y(\cdot) \delta t, z + v_z(\cdot) \delta t, t + \delta t) - v_x(x, y, z, t)$
 $= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) v_x \delta t + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_y \delta t + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right) v_z \delta t + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) \delta t$

$\Leftrightarrow \delta v_x = ((\vec{v} \cdot \text{grad}) v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t}) \delta t$

$\Rightarrow \vec{a}(\vec{r}, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{v}}{\delta t}$

$\Rightarrow \vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$ dérivé locale (varié local)

$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \rightarrow$ dérivé convective (varié du au seul fait de se déplacer)

Conservat° de la masse dans un écoulement

Débit massique: le débit massique à travers la surface S apparaît comme le flux du vecteur densité de courant de masse:

$$D_m(t) = \iint_{MES} \vec{j}_m(M, t) \cdot d\vec{S}_n \quad \text{avec} \quad \vec{j}_m(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t)$$

Debit volumique =

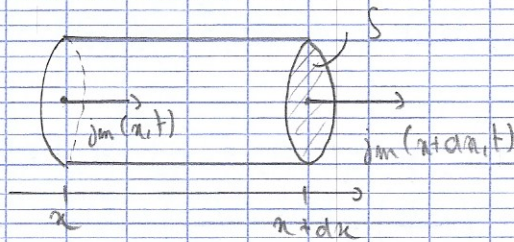
$$D_v(t) = \iint_{mes} \vec{v}(M,t) d\vec{S}_n$$

$$d\vec{S}_n = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$d\vec{S}_n = dx \vec{u}_x + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \quad \text{cylindrique}$$

$$d\vec{S}_n = dx \vec{u}_x + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad \text{sphérique}$$

Eq de conservat° de la masse



entre t et t+dt Σ sont :

$$\int \delta m_x = \vec{j}_m(x,t) \cdot (S \vec{u}_x) dt = \vec{j}_m(x,t) S dt$$

$$\int \delta m_{x+dx} = \vec{j}_m(x+dx,t) \cdot (S \vec{u}_x) dt = -\vec{j}_m(x+dx,t) S dt$$

La masse qui est entrée dans Σ pendant dt est donc :

$$\delta m_{x \rightarrow x+dx} = \delta m_x + \delta m_{x+dx} = (j_m(x,t) - j_m(x+dx,t)) S dt$$

Or au 1^{er} ordre $\rightarrow \delta m_{x \rightarrow x+dx} = - \frac{\partial j_m(x,t)}{\partial x} S dx dt$ (1)

La masse contenue dans Σ s'écrit aussi $\delta m_z(t) = \rho(x,t) S dx$

$$\text{et } \delta m_z(t+dt) = \rho(x,t+dt) S dx$$

$$\Rightarrow d(\delta m_z) = (\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)) S dx$$

Or au 1^{er} ordre

$$d(\delta m_z) = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} S dx dt$$
 (2)

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_m(x,t)}{\partial x} = 0$$

Cas général \rightarrow
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{M}, t) + \operatorname{div} \vec{j}_m(\mathbf{M}, t) = 0$$

en fait de la dernière particularité :

$$\frac{D\rho}{Dt}(\mathbf{M}, t) + \rho(\mathbf{M}, t) \operatorname{div}(\vec{v}(\mathbf{M}, t)) = 0$$

\hookrightarrow le $\operatorname{div} \vec{v}$ est égal au taux de variation du volume d'une particule de fluide mesuré par un observateur qui accompagne la particule de fluide dans son mouvement.

Cas particulier = écoulement stationnaire = dans un écoulement stationnaire, le vecteur densité de courant de masse est à flux conservatif. Il en résulte la conservation du débit massique.

Conditions aux limites cinématiques

\hookrightarrow - paroi fixe $\vec{v}(\mathbf{M} \in \text{paroi}, t) \cdot d\vec{S}_n = 0$

- paroi déformable / mobile : $\vec{v}_p(\mathbf{M} \in \text{paroi}, t) \cdot d\vec{S}_n = v_{\text{paroi}}(\mathbf{M} \in \text{paroi}, t) \cdot d\vec{S}_n$

- interface entre 2 fluides non miscibles

$$\vec{v}_1(\mathbf{M} \in \text{interface}) \cdot d\vec{S}_n = \vec{v}_2(\mathbf{M} \in \text{interface}) \cdot d\vec{S}_n$$

Exemples fondamentaux d'écoulements

Écoulement incompressible : un écoulement est incompressible si la particule fluide garde un volume invariable au cours de son mouvement.

\rightarrow
$$\operatorname{div} \vec{v}(\mathbf{M}, t) = 0$$

Un écoulement peut être considéré comme incompressible si

$$\frac{U^2}{c^2} \ll 1$$

↑ vitesse caractéristique des écoulements

Dans un écoulement incompressible \rightarrow conservatioⁿ du débit volumique

↳ Écoulement tourbillonnaire = souvent $\vec{\omega} = \omega_a(t) \vec{u}_a$
↳ écoulement de cisaillement pur

Le vecteur tourbillon $\vec{\omega}$ représente, à un tps donné, le vecteur rotatif d'une particule de fluide par rapport au ref d'étude \mathcal{R} . Le vecteur tourbillon est prop. au rotationnel du champ eulérien de vitesse:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{d} \text{rot} \vec{v}$$

Le rotationnel du champ de vitesse est aussi appelé vorticité noté $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = d \vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v}$$

↳ traduit la tendance locale de l'écoulement autour d'un pt considéré

↳ Écoulement irrotationnel

Un écoulement est qualifié d'irrotationnel ssi, en t^{ps} t, il de l'écoulement on a
 $\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$

Comme $\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$ il existe une fct scalaire $\phi(M, t)$ appelé potentiel des vitesses
tq :

$$\vec{v}(M, t) = \text{grad} \phi(M, t)$$

$$[\phi] = m^2 \cdot s^{-1}$$

\vec{v} orienté dans le sens des ϕ croissants
écoulement irrotationnel = écoulement potentiel

Actions mecaniques dans un fluide en mt

Act^o mecaniques s'exercent sur fluide

↳ Act^o a distance

Soit une particule de fluide de volume $d\mathcal{V}$, et un champ de force volumique $\vec{f}(M,t)$.
La force elementaire $d\vec{F}(M,t)$ qui s'exerce sur la particule fluide s'écrit:

$$d\vec{F}(M,t) = \vec{f}(M,t) d\mathcal{V}$$

↳ ex: gravitat^o $\vec{f}(M,t) = \rho(M,t) \vec{G}(M)$ ($\vec{G}(M)$ champ gravitationnel)

force inerte enlèvement $\vec{f}(M,t) = -\rho(M,t) \vec{a}_e(M,t)$

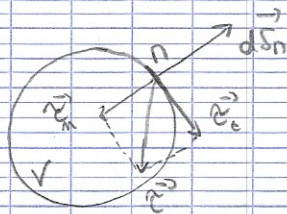
pesante $\vec{f}(M,t) = \rho(M,t) \vec{g}(M)$

force inerte Cauchy $\vec{f}(M,t) = \rho(M,t) \vec{\nabla}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} \wedge \vec{\omega}_{\mathcal{R}}(M,t)$

force electromag $\vec{f}(M,t) = \rho(\vec{E}(M,t) + \vec{\omega}^2(M,t) \wedge \vec{B}(M,t))$

↑ densité volumique de charge electrique

Act^o de contact, forces superficielles



$$d\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{int}}(M,t) = \vec{F}_n^+(M,t) dS_n^+ + \vec{F}_n^-(M,t) dS_n^-$$

↳ contraintes tangentielles
↳ contraintes normales

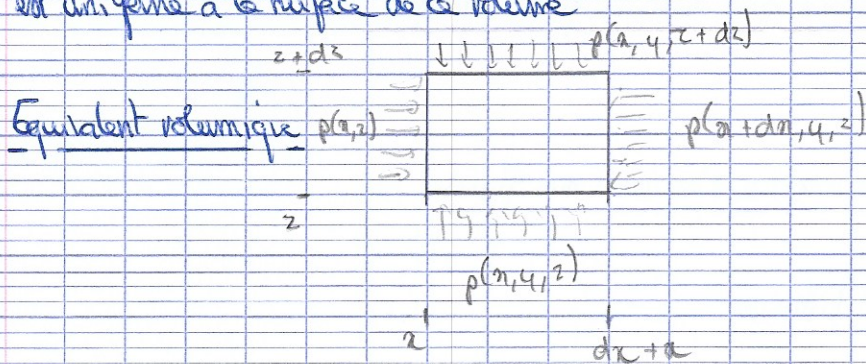
Force de press^o :

A la surface d'un volume de fluide, le fluide exterieur exerce sur le fluide interieur une force de press^o, orthogonale a la surface:

$$d\vec{F}_p = -\rho(M,t) d\vec{S}_n$$

↳ la resultante des forces de press^o qui s'exerce sur un volume est nulle qd le press^o

est uniforme à la surface de ce volume

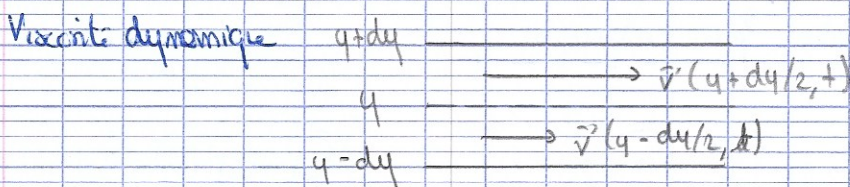


$$dF_z = p(x, y, z) dx dy - p(x, y, z+dz) dx dy = (p(x, y, z) - p(x, y, z+dz)) dx dy$$

$$\text{Or } 1^{\text{er}} \text{ ordre} \rightarrow dF_z = - \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} d\vec{F}_p(M, t) &= - \vec{\text{grad}} p(M, t) d\vec{\tau} \\ \hookrightarrow \vec{f}_p(M, t) &= \frac{d\vec{F}_p}{d\vec{\tau}} = - \vec{\text{grad}} p(M, t) \end{aligned}}$$

Force de viscosité de cisaillement



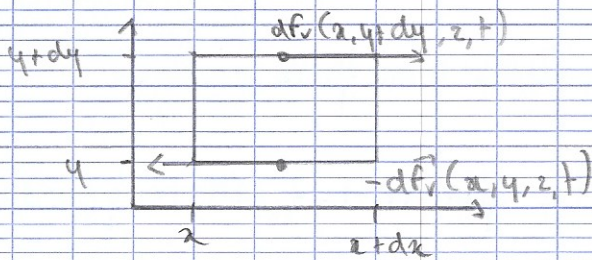
$$\text{Or on a } \vec{v}(y+dy/2, t) - \vec{v}(y-dy/2, t) = (\omega_x(y+dy/2, t) - \omega_x(y-dy/2, t)) \vec{e}_x$$

$$\text{Or } 1^{\text{er}} \text{ ordre} \approx \frac{\partial \omega_x}{\partial y} dy \vec{e}_x$$

$$\rightarrow \boxed{d\vec{F}_v(y, t) = \eta \frac{\partial \omega_x}{\partial y} dS \vec{e}_x}$$

η viscosité dynamique
pour $\vec{v}(M, t) = \omega_x(y, t) \vec{e}_x$

Equivalent volumique



$$\vec{v}(M, t) = v_x(y, t) \vec{u}_x$$

$$\text{On a } d\vec{f}_+ = d\vec{f}_v(x, y+dy, z, t) = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (x, y+dy, z, t) dx dz \vec{u}_x$$

$$d\vec{f}_- = -d\vec{f}_v(x, y, z, t) = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (x, y, z, t) dx dz \vec{u}_x$$

$$d\vec{f}_c = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (x, y+dy, z, t) dx dz \vec{u}_x - \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (x, y, z, t) dx dz \vec{u}_x$$

$$= \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) dx dy dz \vec{u}_x$$

$$= \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) d\vec{\epsilon} \vec{u}_x$$

→ Le résultante des forces de viscosité de cisaillement qui s'exerce, dans un élt. incompressible d'un fluide newtonien, sur un volume de fluide $d\vec{\epsilon}$ est :

$$d\vec{f}_c = \eta \Delta \vec{v}(M, t) d\vec{\epsilon} = \vec{f}_{\text{visc}}(M, t) d\vec{\epsilon}$$

où $\vec{f}_{\text{visc}}(M, t) = \eta \Delta \vec{v}(M, t)$ est l'équivalent volumique des forces de viscosité de cisaillement.

Le viscosité de cisaillement engendre un transport diffusif de la qte de mat dans le direct transverse à l'éclt. C'est la viscosité cinématique qui est le coeff de diffusion caractéristique de ce phénomène de transport.

L'équation de Navier-Stokes

Exprime pour l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien

$$\rho(\mathbf{M}, t) \frac{D\vec{v}(\mathbf{M}, t)}{dt} = -\text{grad } p(\mathbf{M}, t) + \vec{f}_{\text{ext}}(\mathbf{M}, t) + \eta \Delta \vec{v}(\mathbf{M}, t)$$

$$\text{On a } \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\text{on } (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \right) = -\text{grad } p + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

Nombre de Reynolds

Soit valeur caractéristique de courant de qble de moy

$$(1) \vec{J}_{\text{diff}} = -\nu \text{grad } p_x \Rightarrow \vec{J}_{\text{diff}} \sim \nu \rho \frac{U}{L} = \frac{\eta U}{L}$$

$$(2) \vec{J}_{\text{con}} = \rho U \vec{v} \Rightarrow \vec{J}_{\text{con}} \sim \rho U^2$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

$$Re = \frac{\text{force inertielle}}{\text{force visqueuse}} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

Navier-Stokes adimensionnées

$$t' = \frac{t}{L/U}$$

$$v' = \frac{v}{U}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\text{grad}' = L \text{grad}$$

$$\rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \rho \frac{U^2}{L} (\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' = -\frac{1}{L} \text{grad}' p + \rho \frac{U}{L^2} \Delta' \vec{v}'$$

$$\Rightarrow \frac{\rho U L}{\eta} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{\rho U L}{\eta} (\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}') \vec{v}' = -\frac{L}{\eta U} \vec{\text{grad}}' p + \Delta' \vec{v}'$$

$$P' = \frac{p}{\rho U^2}$$

$$\Rightarrow \text{Re} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \text{Re} (\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}') \vec{v}' = -\text{Re} \vec{\text{grad}}' P' + \Delta' \vec{v}'$$

$$k \sim \frac{\| \text{Re} (\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}') \vec{v}' \|}{\| \eta \Delta' \vec{v}' \|}$$

Couche limite = on appelle couche limite la région de l'écoulement, au voisinage d'une paroi, où la viscosité de cisaillement a une influence notable sur l'écoulement. C'est dans cette région que se concentre la vorticité générée par le cisaillement du fluide au contact de la paroi.

On a $\delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}$ pour un objet de taille caract. L
 épaisseur de couche limite : δ

Modèle de l'écoulement parfait

Un écoulement parfait néglige tous les phénomènes diffusifs, en particulier la viscosité et les effets de surface.

↳ conditions aux limites cinématiques :

- paroi fixe : $\vec{v}'(M \in \text{paroi}, t) = \vec{0}$

- paroi mobile : $\vec{v}'_{\text{fluide}}(M \in \text{paroi}, t) = \vec{v}'_{\text{paroi}}(M \in \text{paroi}, t)$

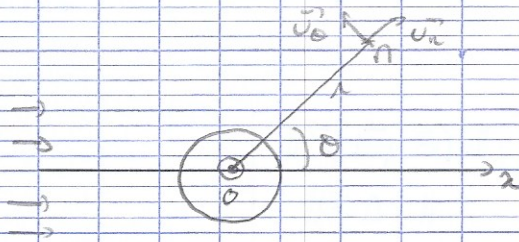
- interface entre 2 fluides non miscibles : $\vec{v}'_1(M \in \text{interface}, t) = \vec{v}'_2(M \in \text{interface}, t)$

↳ conditions aux limites dynamiques : $\eta_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y_1} = \eta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y_2}$

Ecoulement autour d'une sphère

Soit une sphère de rayon R se déplaçant d'une vitesse constante $\vec{U} = -U\vec{u}_x$

Hyp: écoulement irrotationnel



Si l'écoulement est supposé incompressible $\Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$
irrotationnel $\Rightarrow \text{rot}(\vec{v}) = 0$

Le syst. est invariable par rotation autour de (Ox) $\Rightarrow v_x$ et v_θ ne dépendent pas de φ \rightarrow

$$\vec{v}(M) = v_x(r, \theta) \vec{u}_x + v_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$$

Comme $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ il existe un potentiel des vitesses $\phi(M)$ tel que:

$$\vec{v}(M) = \text{grad}(\phi(M)).$$

$$\rightarrow \underbrace{\text{div} \vec{v}(M)}_0 = \text{div}(\text{grad} \phi(M)) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \phi(M) = 0$$

$$\text{C.L. } x \rightarrow +\infty \quad \vec{v}(x \rightarrow +\infty, \theta) = U \vec{u}_x \quad \forall \theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(x \rightarrow \infty, \theta) \sim U \cos \theta \vec{u}_x - U \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$x = R \quad \rightarrow \quad \vec{v}(R, \theta) = 0 \quad \forall \theta$$

Pour déterminer le scalaire ϕ on va supposer:

• un potentiel correspondant au champ de vitesse uniforme $U\vec{u}_x$ en cartésien

$$\phi_1(M) = Ux \quad \rightarrow \quad \text{en sphérique } \phi_1(M) = Ux \cos \theta$$

• un potentiel analogue au potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

$$\phi_2(M) = \frac{\alpha}{r} \quad \text{ou } \alpha \text{ est une const.}$$

un potentiel analogue au pot. électrostat créé par un dipôle électrostat.

$$\phi_3(r) = \frac{\beta \cos \theta}{r^2} \quad \text{ou} \quad \beta = cr^2$$

$$\Rightarrow \phi(r) = U \cos \theta + \frac{\alpha}{r} + \beta \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow v_r(r) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta - \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2\beta \cos \theta}{r^3}$$

$$v_\theta(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta - \frac{\beta \sin \theta}{r^3}$$

$$\text{CL } r=R \Rightarrow v_r(r=R, \theta) = U \cos \theta - \frac{\alpha}{R^2} - \frac{2\beta \cos \theta}{R^3} = 0$$

$$\Rightarrow \text{pour s'annuler il faut } \beta = \frac{UR^3}{2} \text{ et } \alpha = 0$$

$$\text{Alors } \phi(r) = U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos \theta$$

$$\vec{v}(r) = U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \vec{u}_r - U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Comment déterminer le champ de press. ?

$$\rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}}_{\sim \frac{v^2}{L}} \right) = \underbrace{\rho \vec{g}}_{\frac{F}{L^3}} - \underbrace{\text{grad } p}_{\sim \frac{\eta}{L^2}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{u}}_{\sim \frac{\eta}{L^2}}$$

$$\text{Si } Re \ll 1 \Rightarrow \rho \frac{v^2}{L} \ll \eta \frac{\eta}{L^2}$$

$$\Rightarrow \text{grad } p = \eta \Delta \vec{u} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (u^r r^2)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial (u^\theta r)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (u^\phi r \sin \theta)}{\partial \phi^2} \right)$$

→ recherche

$$\left(\frac{F}{L^3} \sim \eta \frac{\eta}{L^2} \Rightarrow F \sim \eta \cdot v \cdot L \right)$$

$$\text{Si } Re \gg 1 \quad \rho \frac{v^2}{L} \gg \eta \frac{v}{L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{L^3} \sim \rho \frac{v^2}{L} \Rightarrow F \sim \rho v^2 L^2$$

Analyse dimensionnelle

pour déterminer F :

$[F] = MLT^{-2}$	$[v] = LT^{-1}$
$[\rho] = ML^{-3}$	$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$
$[D] = L$	

viscosité dynamique
rayon ou diamètre

\Rightarrow 5 paramètres - 3 dimensions = 2 nombres sans dimension

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} \quad \text{et} \quad \frac{\rho v D}{\eta} = Re$$

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = f(Re)$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2} C_x(Re) \rho \frac{\pi D^2}{4} v^2$$

$$C_x = \frac{8F}{\rho \pi D^2 v^2}$$

$Re \ll 1$ on a $C_x = A Re^\alpha$ (graphe)

$$\rightarrow \log C_x = \alpha \log Re + \log A \quad \text{petite on a } C_x = \frac{24}{Re}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2} \frac{24}{Re} \rho \frac{\pi D^2}{4} \vec{v} \Rightarrow \vec{F} = 6\pi \eta R \vec{v}$$

Dans le ref le fluide est immobile la sphère se déplace à $\vec{V} = -\vec{v}$

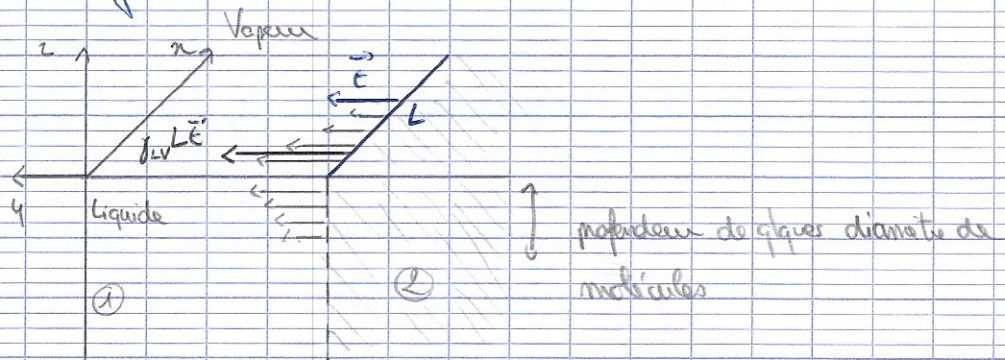
$$\vec{F} = -6\pi \eta R \vec{V}$$

$h_e \gg 1$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_2 \rho \frac{\pi D^2}{4} \|\vec{v}\| \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = -\frac{1}{2} C_2 \rho \pi R^2 \|\vec{v}\| \vec{v}$$

Tension superficielle

La tension superficielle à l'interface entre un liquide et un gaz résulte de l'asymétrie des forces d'interaction mutuelle (attraction et répulsion) entre molécules qui résulte de la présence de l'interface.



La ligne de contact entre les 2 syst. correspondant à la longueur L de l'interface liquide/vapeur. La résultante des forces que ① exerce sur ② de cette ligne de contact est

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \gamma_{LV} L \vec{e}'$$

γ_{LV} tension superficielle de l'interface liquide/vapeur. ($C_{eff} > 0$)

Énergie: le travail pour accroître l'aire d'une interface liquide/vapeur d'une petite dS est :

$$\delta W = \gamma_{LV} dS$$

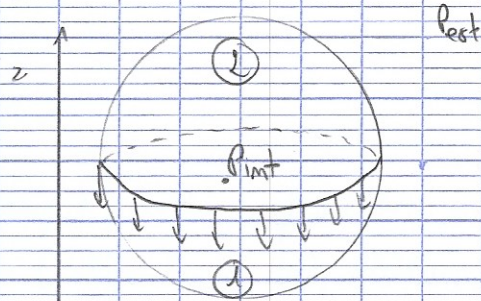
(soient $\delta W = \gamma_{LV} dS$) et ($\delta W = \frac{2}{r^2} k_B T \rightarrow \gamma_{LV} \approx \frac{k_B T}{2r^2}$)

σ diamètre moléculaire

ODG = octane $\gamma_{LV} = 0,022 \text{ N/m}$; eau $\gamma_{LV} = 0,072$; mercure $\gamma_{LV} = 0,49$

Eq: la présence de molécules tensioactives à l'interface $\rightarrow \gamma_{LV} \downarrow$

La de surface



La matière sup de la goutte est soumise aux act^s mécaniques:

• résultante des faces de press^o ext. $\vec{F}_{p_{ext}} = -P_{ext} \pi R^2 \vec{U}_z$

• " " " " int. $\vec{F}_{p_{int}} = P_{int} \pi R^2 \vec{U}_z$

• La résultante des faces de tens^o superficielle que ① exerce sur ②

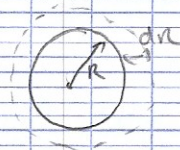
$$\vec{T} = -d\pi R \gamma_{LV} \vec{U}_z$$

Condition d'éq: $\vec{F}_{p_{ext}} + \vec{F}_{p_{int}} + \vec{T} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (P_{int} - P_{ext}) \pi R^2 - d\pi R \gamma_{LV} = 0$$

$$P_{int} - P_{ext} = \frac{d\gamma_{LV}}{R} \quad \text{relation pour interface sphérique}$$

Méthode énergie:



$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta S \gamma \\ &= (4\pi (R+dR)^2 - 4\pi R^2) \gamma \\ \frac{dR}{R} &\ll 1 \end{aligned}$$

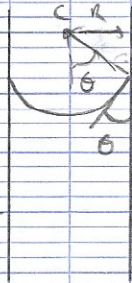
$$\Delta G_p = \Delta P \cdot 4\pi R^2 \cdot dR$$

A l'éq $\Rightarrow \Delta E_s = \Delta G_p \Leftrightarrow \frac{d\gamma}{R} = \Delta P$

$$\Delta P = d\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Lois de Jurin et de Young - Dupré

Loi de Jurin



Syst: tube + liquide + vapeur

$z=0$

$$\Delta E_{\text{potentielle}} = (\rho \pi r^2 z) g \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho g z^2$$

• Qd le liquide monte l'interface solide/vapeur est remplacé par l'interface solide/liquide sur une hauteur z . γ_{sv} bord sup. solide/vapeur = γ_{sl} ds correspond à l'énergie à fournir pour augmenter la surface solide/vapeur d'une petite dS . de m γ_{sl} solide/liquide.

$$\Delta E_{\text{surface}} = d\pi r z (\gamma_{sl} - \gamma_{sv})$$

Pu report à l'état à $z=0$ l'éq. est:

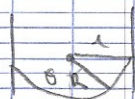
$$E(z) = \Delta E_{\text{potentielle}} + \Delta E_{\text{surface}} = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho g z^2 + d\pi r z (\gamma_{sl} - \gamma_{sv})$$

La hauteur h à l'éq. correspond au minimum de l'énergie potentielle. On obtient $\frac{dE}{dz} = 0$ pour $z = h$; avec

$$h_j = \frac{2(\gamma_{sv} - \gamma_{sl})}{\rho g R}$$

adans possible si $\gamma_{sv} > \gamma_{sl}$

Loi de Young - Dupré



$$\text{On a } R = \frac{1}{\cos\theta}$$

En utilisant le théorème de Stevin on a :

$$p_{\text{atm}} = p(h_j) + \frac{\Delta \rho_{LV}}{R} = p(h_j) + \frac{\Delta \rho_{LV} \cos\theta}{1}$$

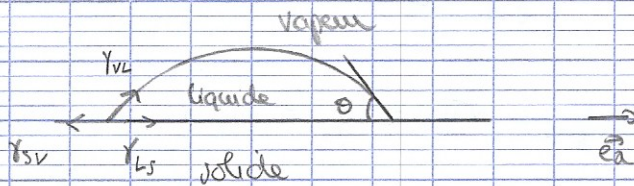
Par ailleurs l'éq. hydrostatique de la colonne de liquide impose

$$p(z=0) = p(h_j) + \rho g h_j$$

Or dans un liquide à l'éq. hydro, la press. est uniforme dans un m^e plan horizontal. Donc $p(z=0) = p_{\text{atm}}$

$$\Rightarrow h_j = \frac{\Delta \rho_{LV} \cos\theta}{\rho g}$$

Angle de mouillage



$$\text{On a le relation } \gamma_{SV} = \gamma_{LS} + \gamma_{LV} \cos\theta \quad \text{sur } \vec{e}_z$$

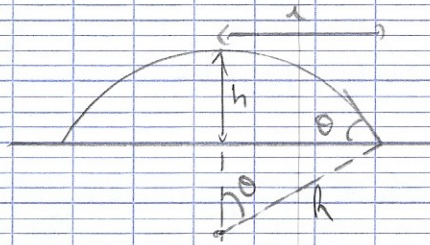
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LV}}$$

$$0 < |\gamma_{SV} - \gamma_{SL}| < \gamma_{LV} \quad \text{mouillage partiel}$$

$$\gamma_{LV} \leq \gamma_{SV} - \gamma_{SL} \quad \text{mouillage total}$$

$$\gamma_{LV} \geq \gamma_{SV} - \gamma_{SL} \quad \text{mouillage nul}$$

longueur capillaire



$$\text{On a } R = \frac{r}{\sin \theta} \quad r \text{ rayon de la goutte}$$

$$\text{On a également } h = r \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{si } \theta \ll 1 \rightarrow r \ll R \quad h \approx \frac{1}{2} r \theta \quad \text{et } R = \frac{r}{\theta}$$

On compare l'amplitude des effets de la gravité et capillaire en compare

$$\Delta p_{\text{gravité}} = \rho g h = \frac{1}{2} \rho g r \theta$$

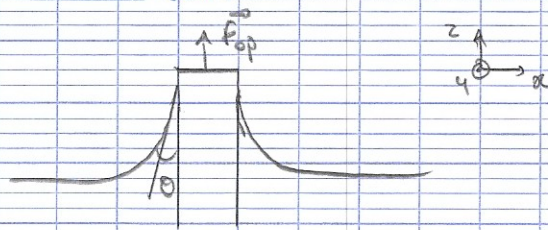
$$\Delta p_{\text{capillaire}} = \frac{2 \gamma_{lv}}{R} = \frac{2 \gamma_{lv} \theta}{r}$$

Les effets capillaires dominent quand : $\frac{1}{2} \rho g r \theta \ll \frac{2 \gamma_{lv} \theta}{r}$

$$\Rightarrow r \ll \lambda_c \quad \text{avec } \lambda_c = \sqrt{\frac{\gamma_{lv}}{\rho g}} \quad \lambda_c = \text{longueur capillaire}$$

Pour l'eau $\lambda_c \approx 3 \text{ mm}$

Notion de la tension superficielle = méthode d'avancement



méthode de Wilhelmy

Soit p le périmètre de la lame mesurée. Le liquide se raccorde à la lame avec un angle de contact θ . Ici la lame se déplace d'une hauteur dz , l'air de l'interface liquide/solide diminue de $p dz$ et l'air de l'interface solide/vapeur \nearrow de la même quantité

Si l'interface liquide/vapeur n'est pas modifiée - le travail d'énergie pot. s'écrit

$$dG_{\text{surface}} = p(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) dz$$

Théorème énergie méca : $dG + dG_{\text{surface}} = \delta W_{\text{op}}$

soit puisque $dG = 0$ et $\delta W_{\text{op}} = F_{\text{op}} dz \Rightarrow p(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) dz = F_{\text{op}} dz$

$$\Rightarrow F_{\text{op}} = p(\gamma_{sv} - \gamma_{sl})$$

En utilisant la loi de Young-Dupré : $F_{\text{op}} = p(\gamma_{sv} - \gamma_{sl}) \vec{z} = p \gamma_{lv} \cos \theta \vec{u}_z$

Équations locales de la dynamique des fluides

Écoulements de fluides viscos

Eq. Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

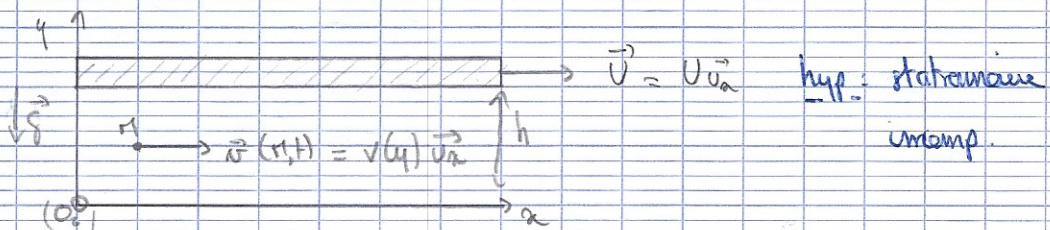
$$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{f}_{\text{ext}} + \nu \Delta \vec{v}$$

Acc

$$\rho \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \sim \rho \frac{U}{T} \quad ; \quad \rho \left\| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right\| \sim \rho \frac{U^2}{L} \quad ; \quad \eta \left\| \Delta \vec{v} \right\| \sim \eta \frac{U}{L^2}$$

Écoulements parallèles

Couette plan



$$\text{On a } \vec{v}(M, t) = v(y) \vec{v}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = (v(y) \vec{v}_x \cdot \text{grad}) (v(y) \vec{v}_x) = v(y) \frac{\partial v(y)}{\partial y} \vec{v}_x = \vec{0}$$

$$\text{Eq Navier-Stokes} = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0$$

$$\Leftrightarrow p(a, y) = -\rho g y + \alpha(x)$$

p invariant selon $x \Rightarrow p(y) = -\rho g y + p(y=0)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_0 + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow v(y) = Ay + B$$

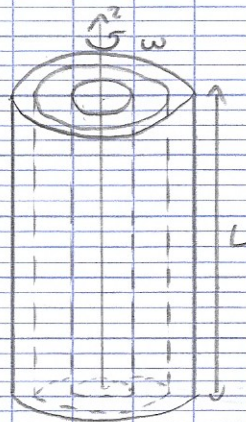
C.L. $y=0 \quad v(0)=0 \quad \Rightarrow B=0$

$y=h \quad v(h)=U \quad \Rightarrow A = \frac{U}{h}$

$$\Rightarrow \vec{v}(y) = \frac{U}{h} y \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{\text{fluid} \rightarrow \text{plate}} = -\eta \frac{dv}{dy}(y=h) S \vec{u}_x = -\eta \frac{U}{h} S \vec{u}_x$$

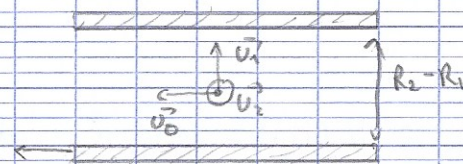
Viscosimétrie de Couette



fluide compris entre R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$)

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$

$R_2 - R_1 \ll R_2 \rightarrow$ cyl plan



$$\vec{U} = R_1 \omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}(r, t) = v(r) \vec{u}_\theta \quad \text{avec } v(r) = Ar + B \quad \text{avec } v(r=R_1) = R_1 \omega$$

$$v(r=R_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}(r, t) = R_1 \omega \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \vec{u}_\theta$$

face que le liquide nequesse espace sur une surface $dS = L r_1 d\theta$

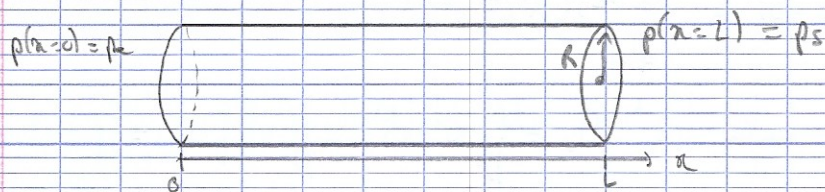
$$\rightarrow d\vec{F}_v = \eta \frac{dv(r)}{dr} dS \vec{u}_\theta = -\eta \omega \frac{R_1}{R_2 - R_1} dS \vec{u}_\theta$$

$$\text{Moment de cette force} = d\vec{M}_V = \vec{r} \wedge d\vec{F}_V = -\eta \omega \frac{R_1^2}{R_2 - R_1} dS \vec{u}_z$$

\Rightarrow intégral par rapport à θ

$$\vec{M}_V = -\frac{2\pi\eta L R_1^3}{R_2 - R_1} \vec{\omega} \quad (\text{opposé à la vitesse de rotation})$$

Écoulement de Poiseuille



Hyp: négliger les effets de la pesanteur, incompressible, stationnaire
 et $\vec{v}(r,t) = v(r) \vec{u}_x$

$$\Rightarrow (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = (v(r) \vec{u}_z \cdot \text{grad}) (v(r) \vec{u}_z) = v(r) \frac{\partial v(r) \vec{u}_z}{\partial r} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -\text{grad} p + \eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{En cylindrique} = -\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = 0$$

\Rightarrow p ne dépend que de x = une fct° qui dépend que de x

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = K \quad \Rightarrow p(x) = Kx + K'$$

$$\text{C.L.} \rightarrow p(x) = \frac{p_1 - p_0}{L} x + p_0$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = + \frac{\Delta p}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\lambda}{\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{L} + \frac{\alpha}{x} \quad \alpha = 0 \text{ car } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow v(x) = \frac{1}{4} \frac{x^2}{\eta} \frac{\Delta p}{L} + \beta \quad x=R \quad v(R) = 0$$

$$\Leftrightarrow v(x) = \frac{1}{4} \frac{x^2}{\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{L} (x^2 - R^2) \quad \beta = -\frac{1}{4} \frac{1}{\eta} \frac{\Delta p R^2}{L}$$

$$v_{\max} = v(x=0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L} R^2 \vec{u}_x$$

Loi de Poiseuille : $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint v(x) dS = \iint v(x) r dr d\theta$

$$D_v = \int_0^R \int_0^{2\pi} dr d\theta v(x)$$

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (p_1 - p_2)$$

résistance hydraulique $R_f = \frac{p_1 - p_2}{D_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Équation d'Euler

b) fluide parfait = viscosité négligée

$$\rho(\vec{r}, t) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}_{\text{ext}}$$

Quelques conséquences immédiates

$$\hookrightarrow \text{jet rectiligne} = \vec{v}(x,t) = v(x,t) \vec{u}_x$$

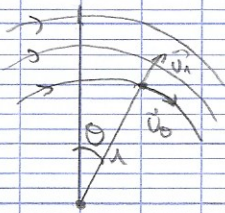
$$\hookrightarrow \text{accélération convective } \vec{u}_x : (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_z \text{ et } \vec{u}_y = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

\Rightarrow La pressⁿ est uniforme dans une sectⁿ orthogonale d'un jet rectiligne soumis aux seules forces de pressⁿ

Dans une sectⁿ droite d'un jet rectiligne, la distributⁿ de pressⁿ est hydrostatique

Effet de la courbure



$$\vec{v}(x,t) = v(x,t) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } p$$

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} &= (v(x,t) \vec{u}_x \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(\frac{v(x,t)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \vec{v} = \frac{v(x,t)}{r} \frac{\partial (v(x,t) \vec{u}_x)}{\partial \theta} \\ &= -\frac{v^2(x,t)}{r} \vec{u}_n \end{aligned}$$

comme $\frac{\partial \vec{u}_x}{\partial \theta} = -\vec{u}_n$ en projetⁿ radiale :

$$-\rho \frac{v^2(x,t)}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2(x,t)}{r} > 0$$

\Rightarrow La pressⁿ augmente du centre de courbure vers la périphérie extérieure du jet

Théorème de Bernoulli

Hyp: ecrt/parfait, incomp, ρ uniforme, \vec{p} et \vec{g} uniforme
stationnaire

$$\hookrightarrow (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{g}$$

$$\vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{g}$$

$$\text{soit } \vec{\text{rot}} \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}} \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p + \vec{\text{grad}}(gz)$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \vec{0} \quad (\text{Oz}) \text{ vers le haut}$$

Dans un ecrt parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, on a:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cte}}$$

théo de Bernoulli

Cas d'un ecrt tourbillonnaire = $\vec{\text{rot}} \vec{v} \neq 0$

Soit sur une m^e ligne de courant A-B

Pour un déplacement $d\vec{p}$ le long de cette ligne:

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{p} + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \cdot d\vec{p} = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) \cdot d\vec{p} + \vec{g} \cdot d\vec{p}$$

$$\vec{v} \text{ et } d\vec{p} \text{ colinéaires} \Rightarrow (\vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{p} = 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{p} = -\int_A^B \vec{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right) \cdot d\vec{p} + \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{p}$$

$$\Rightarrow \frac{p(A)}{\rho} + \frac{v^2(A)}{2} + gz_A = \frac{p(B)}{\rho} + \frac{v^2(B)}{2} + gz_B$$

sur une m[^]e ligne de courant la q^ui se conserve

Applicat^o

↳ Torricelli = vidange = appauvrissement est pas stationnaire

$$\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \sim \frac{v_0}{\tau} \quad \left\| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right\| \sim \frac{v_0^2}{h_0}$$

$$Q_v = v_A S = v_B D \quad \text{avec } v_A = - \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dh}{dt} \right| = \frac{D}{S} v_B$$

$$\frac{h_0}{\tau} \sim \frac{D}{S} v_0$$

finalement

$$\frac{\left\| \partial \vec{v} / \partial t \right\|}{\left\| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right\|} \sim \frac{h_0}{v_0} = \frac{D}{S} \ll 1$$

On peut donc négliger l'accélération locale devant accélération convective
 ↳ régime quasi-stationnaire ou quasi-stationnaire

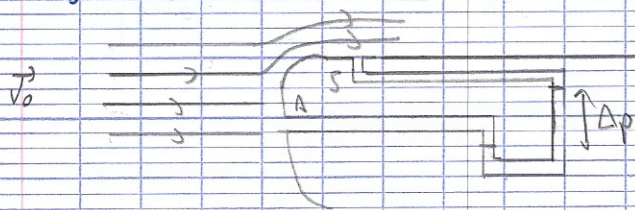
Théorème de Bernoulli sur une ligne de courant

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gh = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} \quad h=0 \text{ en B}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{dh}{dt} = \frac{D}{S} v_B \ll v_B$$

$$\Rightarrow gh = \rho \frac{v_B^2}{2} \quad \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

↳ Tubo de Pitot

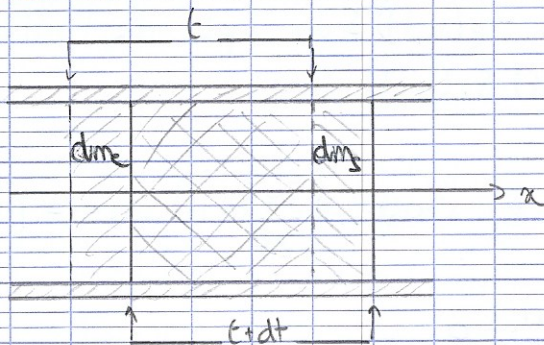


$$v_0 = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_s)}{\rho}}$$

Bilans macroscopiques

Introduction

Système fermé



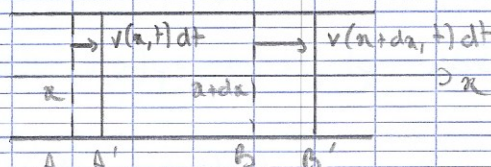
Soit le système fermé constitué du fluide contenu à l'instant t dans le tuyau et de la masse dm_e qui entre entre t et $t+dt$. Ce syst. se compose à l'instant $t+dt$ du fluide contenu dans le tuyau à cet instant et de la masse dm_s qui en est sortie entre t et $t+dt$.

↳ on peut faire un bilan de masse pour le syst. fermé : sa masse est la même aux instants t et $t+dt$: $m(t) = m(t+dt)$

$$\text{On } m(t) = m_{\text{tuyau}}(t) + dm_e \text{ et } m(t+dt) = m_{\text{tuyau}}(t+dt) + dm_s$$

↳ se remarque facilement $dm_e = dm_s$

Exemple = bilan de masse



1^{re} méthode = bilan sur un syst. fermé

À l'instant t on a $m(t) = m_{AB}(t) = \rho(a,t) S da$

À l'instant $t+dt$ on a $m(t+dt) = m_{A'B'}(t+dt) = m_{A'B}(t+dt) + m_{B'B'}(t+dt)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m(t+dt) &= p(x, t+dt) S(x+dx - (x+v(x,t)dt)) + p(x+dx, t+dt) S v(x+dx, t) dt \\ &= p(x, t+dt) S dx - p(x, t+dt) S v(x, t) dt \\ &\quad + p(x+dx, t+dt) S v(x+dx, t) dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m(t) = m(t+dt)$$

$$\Leftrightarrow (p(x, t+dt) - p(x, t)) S dx + p(x+dx, t+dt) S v(x+dx, t) dt - p(x, t+dt) S v(x, t) dt = 0$$

Au 1^{er} ordre cette eq. s'écrit : $\left(\frac{\partial p}{\partial t}(x, t)\right) S dx dt + \left(\frac{\partial (pv)}{\partial x}(x, t)\right) S dx dt = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (pv)}{\partial x} = 0$$

2^e méthode = bilan sur un syst. ouvert

$$\text{À } t : m(t) = p(x, t) S dx$$

$$\text{À } t+dt : m(t+dt) = p(x, t+dt) S dx$$

Soit la densité de courant de masse $\vec{j}_m = \rho \vec{v}$

On écrit

$$\delta m_e = j_m(x, t) S dt = p(x, t) v(x, t) S dt$$

$$\delta m_s = j_m(x+dx, t) S dt = p(x+dx, t) v(x+dx, t) S dt$$

$$\text{On a } m(t+dt) = m(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

$$\Rightarrow p(x, t+dt) S dx = p(x, t) S dx + p(x, t) v(x, t) S dt - p(x+dx, t) v(x+dx, t) S dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial t}(x, t)\right) dt S dx = - \left(\frac{\partial (pv)}{\partial x}(x, t)\right) dx S dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (pv)}{\partial x} = 0$$

Bilan de quantité de mouvement

Soit $\vec{p}(t)$ somme des qbtés de movt de ttes les particules fluide et solide à t
 $\vec{p}(t+dt)$ pareil à $t+dt$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à S dans le ref \mathcal{R} s'écrit :

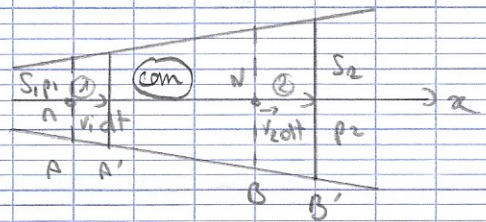
$$\lim_{dt \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} \right) = \sum \vec{F}_{ext}$$

ou encore, de manière plus directement exploitable :

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \left(\sum \vec{F}_{ext} \right) dt \text{ au } 1^{er} \text{ ordre en } dt$$

Exemple : écoulement de jet variable

Hyp: incomp, parfait et permanent



$$dm_1 = \rho_1 S_1 v_1 dt = D_m dt = dm_2$$

• bilan qbtés de movt :

$$\text{à } t \quad \vec{p}_1(t) = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_{com}(t)$$

$$\text{à } t+dt \quad \vec{p}_2(t+dt) = \vec{p}_2(t+dt) + \vec{p}_{com}(t+dt)$$

à t

$$\vec{p}_1(t) = D_m dt \vec{v}_1(t)$$

$$\vec{p}_2(t+dt) = D_m dt \vec{v}_2(t+dt)$$

$$\vec{p}_{com}(t) = \iiint_{com} \rho \vec{v}(r, t) d\tau$$

$$\vec{p}_{com}(t+dt) = \iiint_{com} \rho \vec{v}(r, t+dt) d\tau$$

regime permanent : $\vec{p}_{com}(t) = \vec{p}_{com}(t+dt)$

$$\Rightarrow \vec{p}_2(t+dt) - \vec{p}_1(t) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt = D_m (v_2 - v_1) \vec{e}_x dt$$

Bilan des acts mecanique

- effets de press^o en amont $\vec{F}_{p_1} = p_1 S_1 \vec{u}_x$
- " " en aval $\vec{F}_{p_2} = p_2 S_2 \vec{u}_x$
- force poids sur fluide = $\vec{F}_{p \rightarrow f} = -\vec{F}_{f \rightarrow p}$ on pose $\vec{F}_{f \rightarrow p} = F \vec{u}_x$

(On ne s'intéresse qu'à la composante horizontale \rightarrow pas de poids)

$$\Rightarrow \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = (p_1 S_1 - p_2 S_2 - F) dt \vec{u}_x$$

$$\Delta m (v_2 - v_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 - F$$

conservat^o du débit

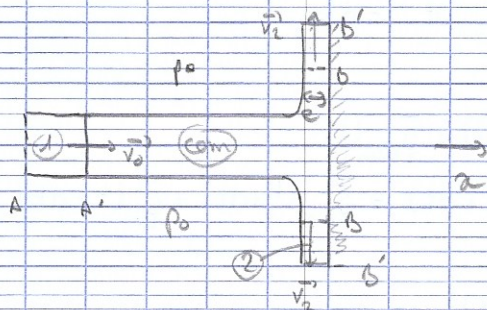
$$\hookrightarrow \Delta v = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

\Rightarrow Bernoulli

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) v_1^2$$

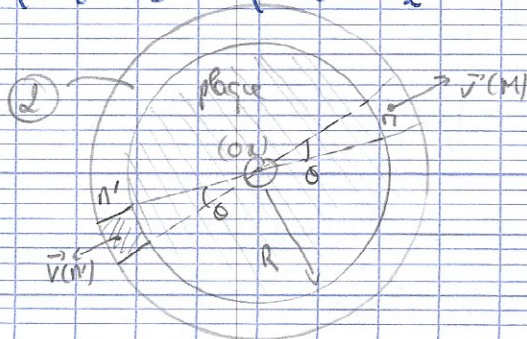
$$\Rightarrow F = p_1 (S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho \frac{\Delta v^2}{S_1} \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2 = -\frac{F}{\rho}$$

Exemple = jet cylindrique sur une plaque



Tous points est permanent $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = p_2 - p_1$

$$\vec{p}_1 = dm \cdot \vec{v}_0 = \rho S v_0 dt \vec{v}_0 = \rho S v_0^2 dt \vec{u}_x$$



En raison de la symétrie de révolution de ②, le champ de vitesse est radial $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_r$ où $r = OM$.

Soit la quantité de mouvement en M $d\vec{p}(M) = \rho d\vec{\tau}_n \vec{v}(M)$
 en M' on a la même chose mais opposé \rightarrow les contributions s'annulent
 $\Rightarrow \vec{p}_x = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -\rho v_0^2 dt \vec{u}_x$

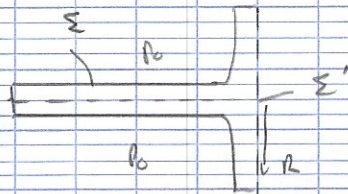
Bilan des act^e mécaniques

- act^e de la paroi sur le fluide = $\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}}$

- force de press^o :

$$\vec{F}_p = - \iint_{\Sigma} p_0 d\vec{S}_n \quad \text{où } \Sigma \text{ surface du jet en contact avec l'air extérieur}$$

is la résultante des forces de press^o sur une surface fermée est nulle quand la press^o est uniforme sur cette surface.



$$- \oint_{\Sigma \cup \Sigma'} p_0 d\vec{S}_n = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \oint_{\Sigma \cup \Sigma'} p_0 d\vec{S}_n = \iint_{\Sigma} p_0 d\vec{S}_n + \iint_{\Sigma'} p_0 d\vec{S}'_n$$

$$\Sigma' \text{ est plane} \Rightarrow \iint_{\Sigma'} p_0 d\vec{S}'_n = p_0 \pi R^2 \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} p_0 d\vec{S}_n = -p_0 \pi R^2 \vec{u}_x = \vec{F}_p$$

loi de la quantité de mouvement

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = (\vec{F}_{\text{paroi}} + p_0 \pi R^2 \vec{u}_x) dt$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{paroi}} = -(p v_0^2 s + p_0 \pi R^2) \vec{u}_x$$

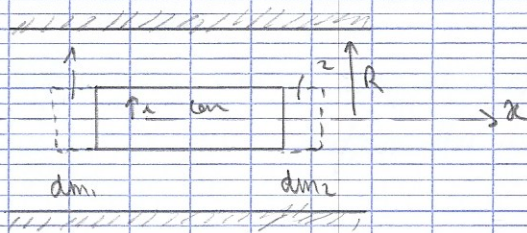
Pour que le plateau reste immobile = il faut équilibrer \vec{F}_p

$$\vec{F}_{op} + \vec{F}_{t \rightarrow p} + \vec{F}_{au \rightarrow p} = \vec{0}$$

avec $\vec{F}_{au \rightarrow p} = -\rho_0 \pi R^2 v_x$

$$\Rightarrow \vec{F}_{op} = \vec{F}_{p \rightarrow t} = \rho v_x^2 \pi R^2 \vec{u}_x$$

Exemple = chute de bille



Bilan qts de mvt

à t $\vec{p}(t) = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_{com}(t)$

à $t+dt$ $\vec{p}(t+dt) = \vec{p}_{com}(t+dt) + \vec{p}_2(t+dt)$

écrire purement et le terme ne dépend pas de a :

$$\Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}(t+dt)$$

Bilan au° mécanique

• effet de press° avant / aval $\vec{F}_p = \rho_e \pi a^2 v_x^2 - \rho_s \pi a^2 v_x^2$

• force de viscosité $\vec{F}_v = \sigma(\dot{\gamma}) d\pi a L \vec{u}_x$

$\sigma(\dot{\gamma})$ = contrainte superficielle exercée par le fluide situé au delà du rayon sur le fluide situé à l'intérieur du cylindre de rayon a

Eq de la qts de mvt

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = (\rho_e \pi a^2 v_x^2 - \rho_s \pi a^2 v_x^2 + \sigma(\dot{\gamma}) d\pi a L \vec{u}_x) dt$$

$$\Rightarrow \sigma(r) = \frac{p_s - p_e}{2L} r$$

Pour un fluide newtonien $\sigma(r) = \eta \frac{dv}{dr}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{p_s - p_e}{2L} r$$

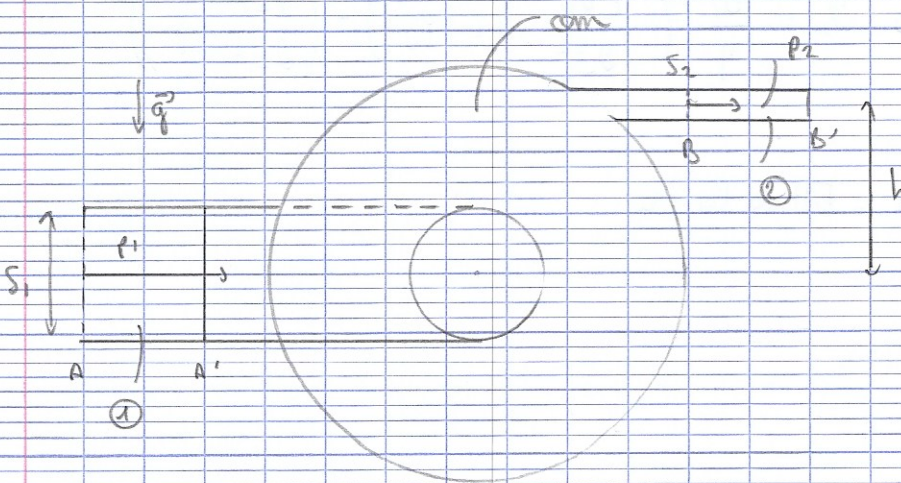
$$\rightarrow v(r) = \frac{p_e - p_s}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{v}_m$$

Bilan d'énergie cinétique

Le flux de l'énergie cinétique à S dans Q s'écrit :

$$(E_c(t+dt) + E_p(t+dt)) - (E_c(t) + E_p(t)) = S W_{mc} = \mathcal{P}_{mc} dt$$

Exemple = puissance d'une pompe



$$\text{À } t \quad E_c(t) = E_{c,1}(t) + E_{c,pom}(t)$$

$$\text{À } t+dt \quad E_c(t+dt) = E_{c,2}(t+dt) + E_{c,2}(t+dt)$$

$$\text{régime permanent} \Rightarrow E_c(t+dt) - E_c(t) = E_{c,2} - E_{c,1} = \frac{1}{2} dm_2 v_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 v_1^2$$

avec $dm_1 = dm_2 = \rho D_r dt$, $v_1 = \frac{D_r}{S_1}$, $v_2 = \frac{D_r}{S_2}$

$$\Rightarrow E(t+dt) - E(t) = \frac{1}{2} \rho D_r (v_2^2 - v_1^2) dt = \frac{1}{2} \rho D_r^3 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) dt$$

Et on a $E_p(t+dt) - E_p(t) = E_{p,2} - E_{p,1} = \rho g h dm = \rho D_r g h dt$

Bilan des forces = les act° meca non conservatives sont:

- les effets de press dont le travail est: $\delta W_p = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt = D_r (p_1 - p_2) dt$

- force interne du fluide = puissance nulle pour un fluide parfait incompressible

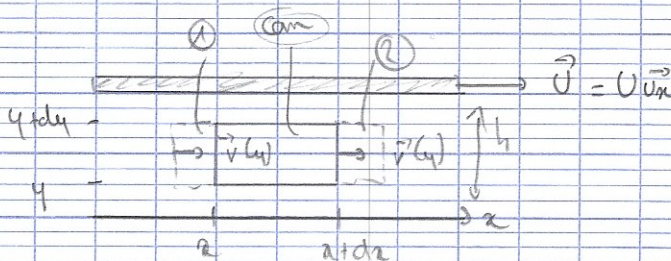
- act° de la pompe au fluide: $\mathcal{P}_{p \rightarrow f} = \eta \mathcal{P}_m$

$$\Rightarrow \Delta E + \Delta E_p = D_r (p_1 - p_2) dt + \eta \mathcal{P}_m dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho D_r (v_2^2 - v_1^2) + \rho D_r g h = D_r (p_1 - p_2) + \eta \mathcal{P}_m$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{D_r}{\eta} \left(\left(\frac{\rho D_r^2}{2 S_2^2} + p_2 + \rho g h \right) - \left(\frac{\rho D_r^2}{2 S_1^2} + p_1 \right) \right)$$

Exemple = Eolt de Couette



Bilan energie cinétique = $\delta E_c(t+dt) - \delta E_c(t) = \frac{1}{2} dm_2 v^2(y) - \frac{1}{2} dm_1 v^2(y) = 0$

car $dm_1 = dm_2 = \rho v(y) dt dy dz$

E_p se conserve par entre t et t+dt

Bilan des barous

- effet de pression $\delta W_p = p_1 v(y) dt dy dz - p_2 v(y) dt dy dz$

$$p \neq f(y) \rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow \delta W_p = 0$$

- faces de rencontre de cisaillement

$$d\vec{F}_{visc}(y+dy) = \sigma(y+dy) dx dz \vec{u}_x \text{ au dessus de la paroi du fluide}$$

$$d\vec{F}_{visc}(y) = -\sigma(y) dx dz \vec{u}_x \text{ en dessous}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta W_{visc} &= d\vec{F}_{visc}(y+dy) \cdot \vec{v}(y+dy) dt + d\vec{F}_{visc}(y) \cdot \vec{v}(y) dt \\ &= \frac{d(\sigma(y)v(y))}{dy} dx dy dz dt \end{aligned}$$

- les forces internes : $\delta W_{int} = \delta P_{int} dt$

Théorème de l'énergie

$$\Delta E + \Delta E_p = \delta W_p + \delta W_{visc} + \delta P_{int} dt$$

$$\text{d'où } \delta P_{int} dt = -\delta W_{visc} = -\frac{d(\sigma(y)v(y))}{dy} dx dy dz dt$$

$$\delta P_{int} = -\eta \frac{d}{dy} \left(v(y) \frac{dv(y)}{dy} \right) dx dy dz$$

$$\text{connaissant } v(y) = \frac{U y}{h}$$

$$\rightarrow P_{int} = \frac{\delta P_{int}}{dt} = -\eta \frac{U^2}{h^2}$$

Exemple : Ecoulement de Poiseuille

Vitesse dépend ni de x ni de z $\rightarrow \epsilon(t+dt) - \epsilon(t) = 0$

Les act° meca st les effets de pression et faces de rencontre.

$$P_{press} = \iint_{\Sigma} p_1 v(y) dS - \iint_{\Sigma} p_2 v(y) dS$$

⇒ press^o uniformes sur les axes

$$\hookrightarrow \mathcal{P}_{press} = (p_e - p_s) \iint_{S_e} v(t) dS = (p_e - p_s) \mathcal{D}_v$$

Théorème de l'énergie :

$$E_e(t+dt) - E_e(t) = (\mathcal{D}_{press} + \mathcal{D}_{visc}) dt$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_{visc} = -\mathcal{D}_{press} = -\mathcal{D}_v (p_e - p_s) = -8\pi\eta L v_{mm}^2$$