Electrocinétique 2

Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

Caractéristiques

Un signal sinusoïdal est un signal dépendant du temps t et dont l'expression est
$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

↳ X amplitude

ω pulsat° (rad.s^{-1})

→ fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ → $f = \dfrac{1}{T}$

2 types de phase : la phase instantanée $\omega t + \varphi$

la phase initiale φ

Valeur efficace : $X_{eff} = \dfrac{X}{\sqrt{2}}$

Différence de phase entre 2 signaux synchrones (→ m̂ pulsat° ω)

$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$

$y(t) = Y\cos(\omega t + \psi)$

→ le déphasage $\Delta\varphi$ de $y(t)$ par rapport à $x(t)$ est $\Delta\varphi = \psi - \varphi = \omega\Delta t$

Notat° complexe

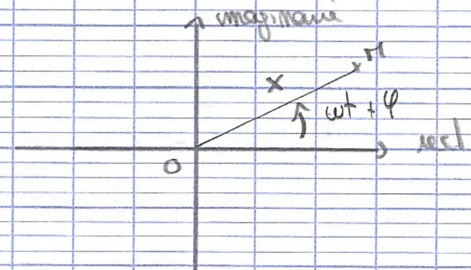
Soit $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ en complexe :

$$\underline{x}(t) = X\exp(j(\omega t + \varphi)) = X\exp(j\varphi)\exp(j\omega t)$$

Soit l'amplitude complexe $\underline{X} = X \exp(j\varphi)$

On a alors $\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{X})$
et $\omega t + \varphi = \mathrm{Arg}(\underline{x}(t))$

Représentat° de Fresnel



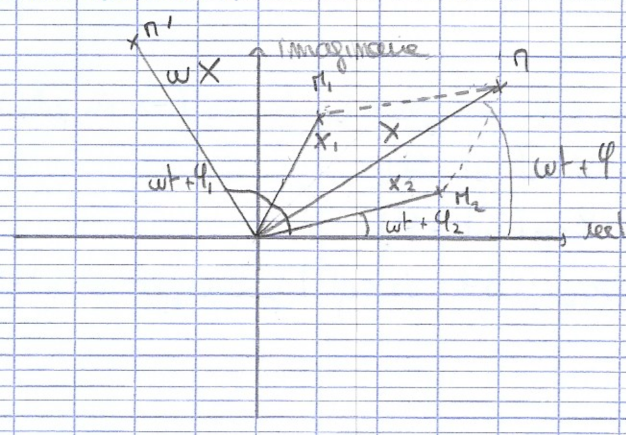
↳ Soit $\underline{x}(t) = X \exp(j(\omega t + \varphi))$

Addit° de signaux de m̂ pulsat°

Soit $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = X_1 \exp(j\varphi_1)\exp(j\omega t)$
$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = X_2 \exp(j\varphi_2)\exp(j\omega t)$

On a alors $\mathrm{Re}(\underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t)) = x_1(t) + x_2(t)$
Les signaux st synchrones alors, $\underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t) = \exp(j\omega t)(X_1\exp(j\varphi_1) + X_2 e^{j\varphi_2})$

↳ représentat° de Fresnel



↳ dérivat° de signaux : $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$
→ $\frac{dx}{dt} = -\omega X \sin(\omega t + \varphi) = \omega X \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$

en complexe : $\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$

↳ intégrat° des signaux $\int \underline{x}(t)\,dt = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)$

↳ Notat° complexe pour un circuit R,C

→ loi des mailles $Ri(t) + u(t) = E_0 \cos(\omega t)$

$$R\underline{i}(t) + \underline{u}(t) = E_0 \exp(j\omega t)$$

on a $i = C \frac{du}{dt}$ $\quad \underline{i}(t) = jC\omega\,\underline{u}(t)$

Alors on a la relat° : $\underline{u}(t)(1 + jRC\omega) = \underline{u}(t)(1 + j\tau\omega) = E_0 \exp(j\omega t)$

soit $\underline{u}(t) = \frac{E_0 \exp(j\omega t)}{1 + j\tau\omega}$

Le module $\underline{u}(t)$ vaut $U = \frac{|E_0 \exp(j\omega t)|}{|1 + j\tau\omega|} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$

Le déphasage par rapport à $e(t)$: $\varphi = \mathrm{Arg}(E_0) - \mathrm{Arg}(1 + j\tau\omega) = -\mathrm{Arg}(1 + j\tau\omega)$

Soit $\begin{cases} \tan\varphi = -\frac{\mathrm{Im}(1 + j\tau\omega)}{\mathrm{Re}(1 + j\tau\omega)} = -\tau\omega \\ \varphi \in [-\pi/2 \,;\, 0] \end{cases}$ $\rightarrow \varphi = -\arctan(\tau\omega)$

Alors $\underline{u}(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \exp(j(\omega t - \arctan(\tau\omega)))$

en notat° réelle : $u(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \cos(\omega t - \arctan(\tau\omega))$

Impédance et admittance complexes

De manière générale un dipôle linéaire se définit comme un dipôle dont l'intensité $i(t)$ qui le traverse et la tension $u(t)$ à ses bornes sont reliées par une relat° différentielle linéaire à coeff constants :

$$\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{d^k u}{dt^k} + \sum_{l=0}^{L} b_l \frac{d^l i}{dt^l} = f(t)$$

En régime sinusoïdal on a $f(t) = f\cos(\omega t + \varphi)$
En complexe on a

$$\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k \underline{u}(t) + \sum_{l=0}^{L} b_l (j\omega)^l \underline{i}(t) = \underline{f}(t)$$

Soit

$$\underline{u}(t) = \frac{\underline{f}(t)}{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k} - \frac{\sum_{l=0}^{L} b_l (j\omega)^l}{\sum_{k=0}^{K} a_k (j\omega)^k} \underline{i}(t)$$

qu'on peut noter $\underline{u}(t) = \underline{E}(t) - \underline{Z}\,\underline{i}(t)$ → modèle de Thévenin du dipôle linéaire en notat° complexe

Par le m̂ transformat on obtient le modèle de Norton du m̂ dipôle

$$\underline{i}(t) = \underline{i_0}(t) - \underline{Y}\,\underline{u}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad \text{et} \quad \underline{i_0}(t) = \frac{\underline{E}(t)}{\underline{Z}}$$

Impédance et admittance complexe pour un dipôle linéaire

↳ impédance : $\underline{Z}$

Dans le cas des modèles de Thévenin et Norton, il s'agit de l'impédance interne des générateurs.
Pour les autres dipôles linéaires pour lesquels $\underline{E}(t) = 0$ on obtient une "relat° de proportionnalité" en notat° complexe

$$\underline{U}\exp(j\omega t) = \underline{Z}\,\underline{I}\exp(j\omega t)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}$ (analogue à $u = Ri$)

↳ admittance : $\underline{Y}$

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$$

Impédance et déphasage

On a $\underline{Z} = Z \exp(j\varphi)$ (Z est module de $\underline{Z}$)

Alors $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U \exp(j\varphi_U)}{I \exp(j\varphi_I)} = \dfrac{U}{I} \exp(j(\varphi_U - \varphi_I))$

Alors, $Z = \dfrac{U}{I}$ et $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$

Résistance et réactance

On peut écrire un nbre complexe sous forme partie réelle et partie imaginaire

$$\underline{Z} = R + jX = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{résistance} = & R = Z\cos\varphi \\ \text{réactance} = & X = Z\sin\varphi \end{array}}$$

Exemples d'impédance

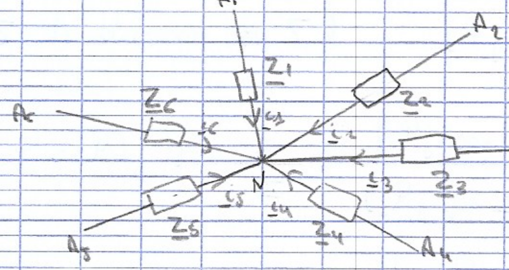
- résistor de résistance R = $\underline{Z} = R$
- bobine d'inductance L = $\underline{Z} = jL\omega$
- condensateur de capa. C = $\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$

Associat° de dipôles linéaires

- en série = $\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \dots + \underline{Z_n}$
- en parallèle = $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{\underline{Z_1}} + \dfrac{1}{\underline{Z_2}} + \dots + \dfrac{1}{\underline{Z_n}}$

$$\underline{Y} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \dots + \underline{Y_n}$$

Loi des noeuds exprimée en terme de potentiels



Loi des noeuds $\sum_k \underline{i}_k = 0$ avec $\underline{i}_k = \dfrac{\underline{V}_k - \underline{V}_N}{\underline{Z}_k}$

Alors $\displaystyle\sum_k \frac{\underline{V}_k - \underline{V}_N}{\underline{Z}_k} = 0$

↳ Théorème de Millman

On a $\displaystyle\sum_k \frac{\underline{V}_k}{\underline{Z}_k} - \underline{V}_N \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{V}_N = \frac{\sum_k \frac{\underline{V}_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_k 1/\underline{Z}_k} = \frac{\sum_k \underline{Y}_k \underline{V}_k}{\sum_k \underline{Y}_k}}$$

Stabilité des circuits du 1er et du 2nd ordre

↳ Un syst est stable si au bout d'un tps plus ou moins long, son évolut° est celle d'un régime permanent.

1er ordre : $a\dfrac{ds}{dt} + bs = 0$

↳ $s = S_0 \exp\left(-\dfrac{b}{a}t\right)$

Un circuit du 1er ordre est stable si les 2 coeffs de l'équat° diff. homogène st de m̂ signe

2e ordre : $a \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + cs = 0$

Alors l'éq caractéristique est : $ar^2 + br + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta < 0$ $\quad r = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$

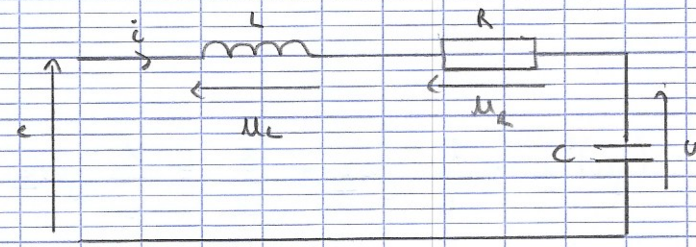
$\Delta = 0$ $\quad r = \frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$ $\quad r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Un syst. du 2nd ordre est stable lorsque tous les coeffs de l'équat° diff homogène associée sont de m̂ signe

Circuit R, L, C série en régime sinusoïdal forcé et résonances

Circuit R, L, C série soumis à une excitation sinusoïdale



Tensions :
$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$u_R = Ri$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

Équation différentielle

↳ condensateur : $e = L\frac{di}{dt} + Ri + u_C$ or $i = C\frac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow e = LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

ou encore $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e}{LC}$

résistance : en dérivant l'éq précédente

$$\frac{d^3u_C}{dt^3} + \frac{R}{L}\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{LC}\frac{de}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}$$

bobine : Sachant que $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

$$\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{LC} = \frac{d^2e}{dt^2}$$

Notat° complexe

↳ résistance : $(j\omega)^2\underline{i} + \dfrac{R}{L}j\omega\underline{i} + \dfrac{\underline{i}}{LC} = \dfrac{1}{L}j\omega\underline{e}$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Soit la pulsat° ω_0 et Q : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_R = R\underline{i} = \frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

condensateur :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega} = \frac{\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

bobine : $\underline{u}_L = jL\omega\underline{i} = \dfrac{jL\omega\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \dfrac{-\omega^2/\omega_0^2\ \underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$

Résonance en intensité

Soit $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{R\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$

L'amplitude est le module de $\underline{i}$

$$I = |\underline{i}| = \frac{E}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E}{R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

On étudie les variat° de I en fct° de la fréquence f ou de ω ($\omega = 2\pi f$)

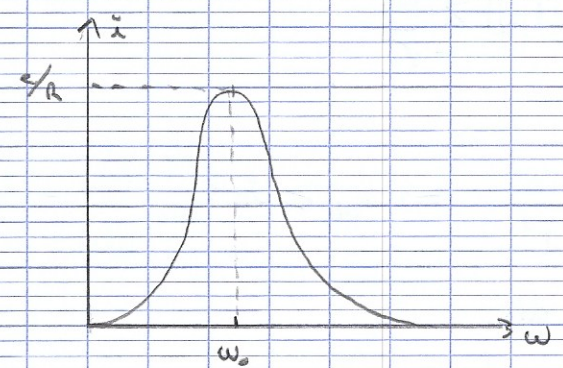
$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fct° strictement décroissante donc les variat° de I sont opposées à celles de $f(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$

$\forall \omega \quad f(\omega) \geq R^2$

On a $f\left(\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = R^2$ → f minimale en ω_0 et I max

→ résonance en intensité

ω_0 pulsat° de résonance



↳ étude du déphasage

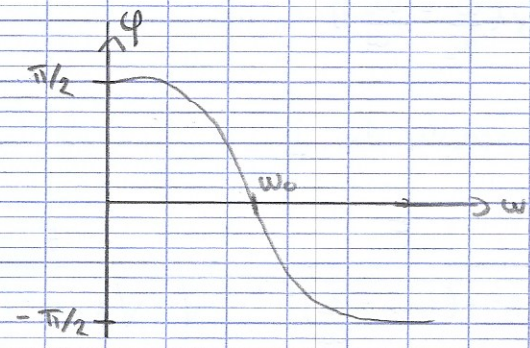
Soit le déphasage φ entre $i(t)$ et $e(t)$

$$\varphi = \operatorname{Arg}(\underline{i}) - \operatorname{Arg}(\underline{e}) = \operatorname{Arg}(1/R) - \operatorname{Arg}\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\varphi = -\operatorname{Arg}\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = -\psi$$

où $\Psi = \mathrm{Arg}\,\underline{D}$ avec $\underline{D} = 1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

ici on a $\tan\varphi = \tan\Psi = -Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$



↳ Bande passante à $-3\,dB$

Soit l'intensité en décibels : $i_{dB} = 20 \log_{10} \frac{|\underline{i}|}{|\underline{i}_{ref}|}$

où $\underline{i}_{ref}$ est une intensité de référence $= 1A$

On peut alors définir la bande passante à $-3dB$ comme l'ensemble des fréquences ou des pulsations tq :

$$\boxed{|\underline{i}(\omega)| \geq \frac{i_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Donc

$$|\underline{i}(\omega)| \geq \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} \iff i_{dB} \geq 20 \log_{10} \frac{i_{max}}{|\underline{i}_{ref}|} - 20 \log_{10} \sqrt{2} = i_{dB\,max} - 3$$

car $20 \log_{10} \sqrt{2} \simeq 3\,dB$

Ici $i_{max} = \frac{E}{R}$ quand $\omega = \omega_0$

On cherche ω telles que

$$\frac{E}{R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \geq \frac{E}{\sqrt{2}\,R}$$

Soit $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow \left(Q(\omega^2-\omega_0^2) - \omega_0\omega\right)\left(Q(\omega^2-\omega_0^2)+\omega_0\omega\right) \leq 0$$

Alors $Q\omega^2 - \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$

$\Delta = \omega_0^2 + 4Q^2\omega_0^2 > 0$

$$\Rightarrow \omega_{1,1} = \frac{\omega_0 - \omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_0 + \omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

seules les $\omega > 0$ sont possibles $\rightarrow \omega_1 = \omega_{1,2}$

$Q\omega^2 + \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow \omega_{2,1} = \frac{-\omega_0 - \omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega_{2,2} = \frac{-\omega_0 + \omega_0\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

$\rightarrow \omega_2 = \omega_{2,2}$

La largeur de la bande passante est alors $\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{L}{R}}$

<u>Déphasage et bande passante</u>

Pour chacune des limites de la bande passante on a

- $\omega = \omega_1 \quad \tan\varphi_1 = Q\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \pi/4$
- $\omega = \omega_2 \quad \tan\varphi_2 = Q\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = -1 \Rightarrow \varphi_2 = -\pi/4$

<u>Facteur de qualité et bande passante</u>

Soit $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ une autre déf du facteur de qualité $\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \Delta\omega = \frac{L}{R}\right)$

$$\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Facteur de surtension

Soit aux bornes de la capacité, la tension s'écrit $\underline{u}_C = \dfrac{\underline{i}}{jC\omega}$

À la résonance $\omega = \omega_0$ et $\underline{i} = \dfrac{E}{R}$

Alors on peut écrire $|\underline{u}_C|(\omega_0) = \dfrac{E}{RC\omega_0}$

De même aux bornes de l'inductance

$$\underline{u}_L = jL\omega\underline{i}$$

$$\rightarrow |\underline{u}_L|(\omega_0) = \frac{L\omega_0 E}{R}$$

comme $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0}$, ces 2 tensions sont égales : $|\underline{u}_L|(\omega_0) = |\underline{u}_C|(\omega_0) = \dfrac{E}{RC\omega_0} = \dfrac{L\omega_0 E}{R}$

→ Le facteur de qualité correspond au facteur de surtension :

$$\boxed{Q = \frac{|\underline{u}_L|(\omega_0)}{E} = \frac{|\underline{u}_C|(\omega_0)}{E} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}}$$

Résonance aux bornes de la capacité

Aux bornes de la capacité la tension vaut :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega} = \frac{\underline{e}}{jC\omega(R + j(L\omega - 1/C\omega))} = \frac{\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

↳ étude de l'amplitude : $|\underline{u}_C| = \dfrac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$

Pour étudier les variat° de $|\underline{u_c}|$ en fct° de la fréquence on écrit

$$f(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$f'(\omega) = \frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$f'(\omega)$ s'annule pour $\omega = 0$ et $2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 - \frac{1}{Q^2}$

↳ la 2e solut° n'existe que si $2 > \frac{1}{Q^2} \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

↳ 2 cas : - $Q < 1/\sqrt{2}$ $f'(\omega) \geq 0$ pour $\forall \omega > 0$, f est ↗ et $|\underline{u_c}|$ ↘

- $Q > 1/\sqrt{2}$ $f'(\omega) \geq 0$ pour $\omega \geq \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, f ↘ de

$\omega = 0$ à ω_r ($\omega_r < \omega_0$)

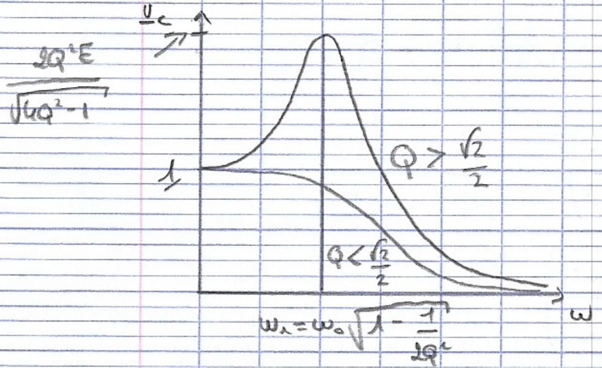
→ on a max et un phénomène de résonance uniquement si $Q > 1/\sqrt{2}$

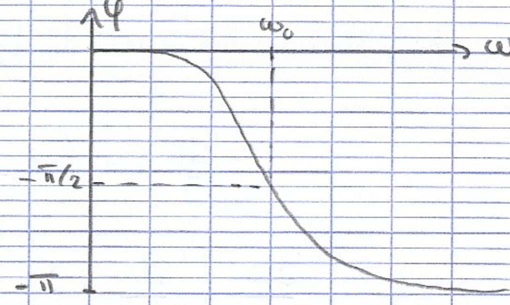
↳ étude du déphasage

Soit φ_c l'argument de $\underline{u_c}$, c'est donc le déphasage de $u_c(t)$ par rapport à $e(t)$.

$$\begin{cases} \tan\varphi_c = \tan\left(-\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right) \\ \sin\varphi_c < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\varphi_c = -\dfrac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \\ \varphi_c \in [-\pi, 0] \end{cases}$$





↳ Bande passante à -3dB

Soit $|\underline{u}_c(\omega)| \geq \frac{|u_{c\,max}|}{2}$

• $Q < \sqrt{2}/2 \rightarrow \frac{E}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q^2}-1\right)^2}}$$

• $Q > \sqrt{2}/2$

$$u_{c\,max} = \frac{E}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{4Q^4}}}$$

$$u_c = \frac{E}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \geq \frac{u_{c\,max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1' = \omega_0\left(\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}+\frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\right)$$

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}-\frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

$\Rightarrow$ largeur de la bande $\Delta\omega = \omega_1' - \omega_1$

↳ cas où $Q \gg 1$ (amortissement faible)

On a résonance aux bornes du condensateur : $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \simeq \omega_0$

La fréquence de résonance est la même que ce soit aux bornes du condensateur ou en intensité.

On étudie $u_c = |\underline{u_c}| = \frac{i}{C\omega}$

Au voisinage de la résonance $u_c \simeq \frac{i}{C\omega_0}$

$\rightarrow i > \frac{i_{max}}{\sqrt{2}}$ soit $u_c \simeq \frac{i}{C\omega_0} > \frac{i_{max}}{\sqrt{2}\,C\omega_0} = \frac{u_{c\,max}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q}$

Etude de l'impédance

Soit $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

↳ rappels : - en basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil
- en hautes fréquences, c'est l'inverse

→ - quand $\omega \to 0$ le terme prépondérant est $1/jC\omega$ → à basse freq comportement capacitif
- quand $\omega \to \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ → terme prépondérant : R → comportement résistif
- $\omega \to +\infty$ → terme prépondérant : $jL\omega$ → comportement inductif

↳ module : $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Soit $\underline{Z} = R\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$ $\qquad Q = \frac{L\omega_0}{R}$

↳ argument : $\tan(\mathrm{Arg}(\underline{Z})) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

$\mathrm{Arg}(\underline{Z}) \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

Puissance

Définitions

↳ Puissance instantanée

La puissance reçue par un dipole est $\mathcal{P}(t) = u(t)\,i(t)$

Pendant un intervalle dt, le dipôle reçoit une petite quantité d'énergie

$$\delta \mathcal{E} = \mathcal{P}dt \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\,dt$$

↳ Puissance moyenne

La puissance moyenne reçue par un dipole durant un tps τ :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \mathcal{P}(t)\,dt$$

Souvent $u(t)$ et $i(t)$ st des fct° périodiques de période T :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{T}\int_0^{T} \mathcal{P}(t)\,dt$$

↳ Valeurs moyenne et efficace d'une tens° ou d'une intensité

- Valeur moyenne $= \bar{u} = \langle u \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,dt$

La différence entre $u(t)$ et $\bar{u}$ est notée $u_{ond}(t)$ (ond = ondulat°)

$$u(t) = \bar{u} + u_{ond}(t)$$

- Valeur efficace : c'est la valeur de la tens° continue qui recevrait la m̂ énergie pendant la m̂ durée dans la m̂ résistor

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,dt}$$

↳ pour un signal c° $U_{eff} = U_c$

sinusoidal $U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}$

créneau $U_{eff} = U\sqrt{\frac{5}{2}}$

<u>Puissance en régime sinusoïdal forcé</u>

↳ soit $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$

↳ • La puissance reçue est tjrs positive et donc la résistance se comporte toujours comme un récepteur

• Les bobines et les condensateurs se comportent alternativement en récepteur (ils reçoivent effectivement de l'énergie) et en générateur (ils fournissent de l'énergie)

<u>Puissance moyenne</u> $\boxed{\mathcal{P}_m = UI\cos\varphi}$ (produit des valeurs efficaces)

$\cos\varphi \to$ facteur de puissance

↳ pour $\begin{cases} R = \varphi = 0 & \mathcal{P}_m = UI \\ C = \varphi = -\pi/2 & \mathcal{P}_m = 0 \\ L = \varphi = \pi/2 & \mathcal{P}_m = 0 \end{cases}$

Soit $\underline{Z} = R(\omega) + jX(\omega) = Z\exp(j\varphi)$ $R(\omega)$ résistance

$X(\omega)$ réactance

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{R(\omega)}{Z}$ or $U = ZI$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = R(\omega)I^2 = \mathrm{Re}(\underline{Z})I^2}$

Soit $\underline{Y} = G(\omega) + jB(\omega) = Y\exp(-j\varphi)$ $G(\omega)$ conductance

$B(\omega)$ susceptance

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{G(\omega)}{Y}$ or $YU = I$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = G(\omega)U^2 = \mathrm{Re}(\underline{Y})U^2}$

Réponse fréquentielle d'un circuit linéaire - filtres linéaires du 1er et 2nd ordre

Not° de Quadripôle

Un quadripôle est un réseau électrique comportant 4 bornes de liaison avec l'extérieur :

- 2 bornes reliées à un générateur d'entrée ou à un circuit linéaire
- 2 bornes reliées à un circuit d'utilisat° (ou circuit de charge)

↳ un quadripôle est dit linéaire s'il est composé uniquement de dipôles linéaires

↳ • À l'entrée du quadripôle, il est en convent° récepteur et le générateur G en convent° générateur

• À la sortie le quadripôle est en convent° générateur et la charge U en convent° récepteur

↳ impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \frac{\underline{v_e}}{\underline{i_e}}$

impédance de sortie $\underline{Z_s}$

Fonct° de transfert

↳ Transfert statique

↳ régime continu

Soit la grandeur d'entrée E_c et de sortie S_c

Le transfert statique est

$$H_0 = \frac{S_c}{E_c}$$

↳ Fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé

Soit la grandeur d'entrée $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$

$\rightarrow \underline{e}(t) = E\sqrt{2}\exp(j\omega t)$

et $s(t) = S\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.

$\rightarrow \underline{s}(t) = \underline{S}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ avec $\underline{S} = S\exp(j\varphi)$

Alors, $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = H(\omega)\exp(j\varphi(\omega))$ $\quad H(\omega) = \dfrac{S}{E}$

Pour un circuit RLC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{1}{1 + jLC\omega - LC\omega^2}$$

Gain

↳ Les variat° de la fct° de transfert en fct° de la fréquence sont souvent importantes (facteur 10, 100 ou plus) → utilisat° échelle log → gain en décibels

↳ Gain en puissance

Soit à l'entrée le quadripôle consomme à l'entrée $\langle P_e \rangle = U_e I_e \cos\varphi_e$

U_e et I_e valeurs efficaces d'entrée et φ_e l'argument de l'impédance d'entrée (déphasage entre tens° et intensité)

En sortie $\langle P_s \rangle = U_s I_s \cos\varphi_s$

Puissance en gain

$$G_p = \log \frac{\langle P_s \rangle}{\langle P_e \rangle}$$

$$G_{p\,dB} = 10 \log \frac{\langle P_s \rangle}{\langle P_e \rangle}$$

↳ Gain en tension

Soit $\langle P_e \rangle = Re(\underline{Y}_e)\, U_e^2 \quad (U^2/R)$

$\langle P_s \rangle = Re(\underline{Y}_s)\, U_s^2$

Alors le gain s'écrit

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log \frac{U_s}{U_e}}$$

Etude des comportements en f(t°) de la fréquence - Diagramme de Bode

↳ représentat° de $\underline{H}(j\omega)$ en f(t°) de la fréquence (pulsat°)
$\underline{H}$ complexe → le module sur un diagramme et l'argument sur un autre

→ diagramme de Bode = associat° des 2 diagrammes

↳ Bande passante

Def : Qd le gain G_{dB} présente un maximum noté $G_{dB,max}$, on définit la (les) pulsation(s) de coupure à -3dB, ω_c telle que :

$$\boxed{G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3dB}$$

Dans le cas où il y a 2 ω_c : $\begin{cases} \omega_b & \text{pulsat° de coupure basse} \\ \omega_h & \text{" " " haute} \end{cases}$

Largeur de la bande passante $\boxed{\Delta\omega = \omega_h - \omega_b}$

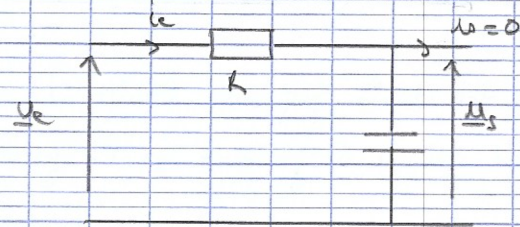
On considère qu'un filtre coupe les composantes du signal dont la pulsat° est hors bande passante et laisse passer celles dont la pulsat° est dans la bande passante

(H correspondant à -3dB : $H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$)

Filtres du 1er ordre

↳ circuits dont l'éq. diff entre $\underline{u}_e$ et $\underline{u}_s$ est du 1er ordre

↳ filtre passe-bas



Très basse fréq. (TBF) = $\omega \to 0$ → $u_R = 0$ ⇒ $\underline{u}_s = \underline{u}_e$ $\underline{H} = 1$

Très haute fréq (THF) = $\omega \to \infty$ → condensateur agit comme un court-circuit

↳ $\underline{u}_s = 0$ et $\underline{H} = 0$

→ filtre passe-bas = laisse passer les signaux B.F et atténue ceux de H.F

fct° de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_c} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

↳ le module de la fct° vaut $H = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

pulsat° de coupure : $H(\omega_c) = \dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(\omega \to 0)$

$$\to \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

bande passante : $\Delta\omega = \omega_c - 0 = \omega_c = \dfrac{1}{RC}$

équat° canonique : de la forme $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

en posant $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ $\rightarrow$ $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$

<u>étude du gain</u>

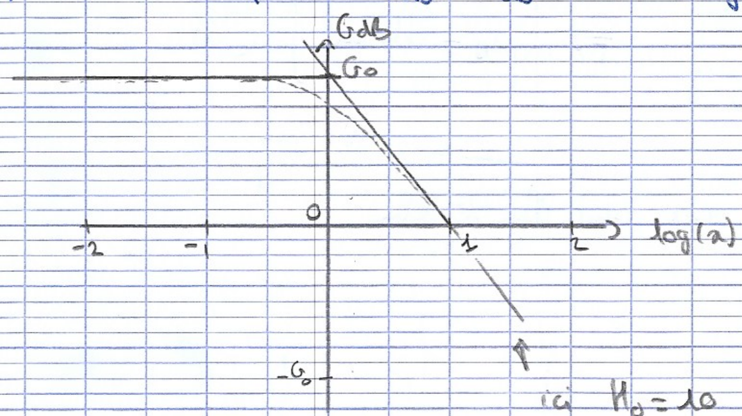
Soit $G_{dB} = 20\log\frac{|H_0|}{\sqrt{1+x^2}} = \underbrace{20\log(|H_0|)}_{G_0} - 10\log(1+x^2)$

En TBF : $\omega \ll \omega_c \Rightarrow 1 \gg x \Rightarrow G_{dB}^{a_1} = G_0$

En THF : $\omega \gg \omega_c \Rightarrow 1 \ll x \Rightarrow G_{dB}^{a_2} = G_0 - 20\log(x) = G_0 - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

Les asymptotes se croisent quand $G_{dB}^{a_1} = G_{dB}^{a_2} \iff 20\log x = 0 \iff x = 1$

$\iff \omega = \omega_c$



<u>étude de la phase</u>

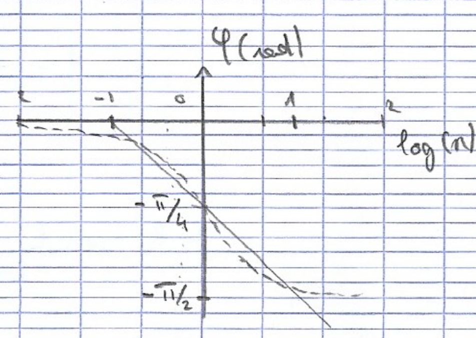
En TBF : $\underline{H}$ équivalent à H_0 $(1 \gg x)$

En THF : $\underline{H}$ équivalent à $\frac{H_0}{jx} = -jH_0\frac{\omega_c}{\omega}$ imaginaire pur d'argument $-\pi/2 + \arg(H_0)$

Dans le cas général où $H_0 \neq 1$ il faut faire attention à son signe :

- $H_0 > 0 \Rightarrow \arg H_0 = 0$
- $H_0 < 0 \Rightarrow \arg H_0 = \pi$

Soit $H_0 > 0$ $\rightarrow$ $\varphi = -\arctan\frac{\omega}{\omega_c}$



comportement intégrateur

On a vu que pour $\omega \gg \omega_c$:

$$\underline{H} = \frac{H_0 \omega_c}{j\omega}$$

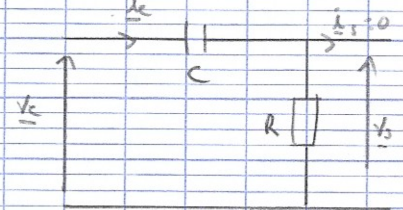
or $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ $\Rightarrow$ $\underline{u_s} = H_0 \omega_c \frac{\underline{u_e}}{j\omega}$ (division par $j\omega$ revient à intégrer !)

Un filtre possédant une asymptote de -20 dB/déc se comporte dans la zone de l'asymptote comme un montage intégrateur avec

$$\underline{u_s} = H_0 \omega_c \frac{\underline{u_e}}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_s = H_0 \omega_c \int u_e \, dt}$$

↳ Filtre passe-haut du 1er ordre



En TBF : courant nul en R → $\underline{v_s} = 0\,V$ et $\underline{H} = 0$

En THF : le condensateur se comporte comme un court-circuit → $\underline{v_s} = \underline{v_e}$ → $\underline{H} = 1$

→ filtre passe haut : laisse passer les HF et atténue les signaux de BF.

fct° de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R}{R + \underline{Z_c}} = \frac{R\underline{Y_c}}{1 + R\underline{Y_c}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

↳ le module de la fct° vaut : $H = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{jRC\omega}\right)^2}}$

pulsat° de coupure

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

équat° canonique

de la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - j\frac{1}{x}} = \frac{H_0\, jx}{1 + jx}$

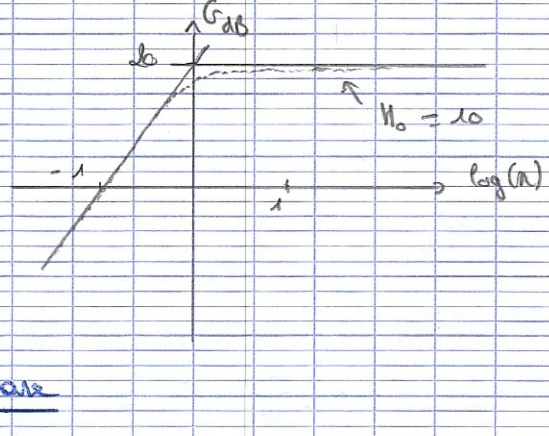
étude du gain

$$G_{dB} = 20 \log \frac{H_0}{\sqrt{1 + 1/x^2}} = G_0 - 10 \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad (G_0 = 20 \log H_0)$$

En TBF, $\omega \ll \omega_c \rightarrow 1 \gg x \Rightarrow G_{dB}^{a_1} = G_0 - 20 \log\left(\frac{1}{x}\right) = G_0 + 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$

En THF, $\omega \gg \omega_c \rightarrow 1 \ll x \Rightarrow G_{dB}^{a_2} = G_0$

Les asymptotes se croisent quand $G_{dB}^{a_2}(x) = G_{dB}^{a_1}(x) \Rightarrow x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_c$



étude de la phase

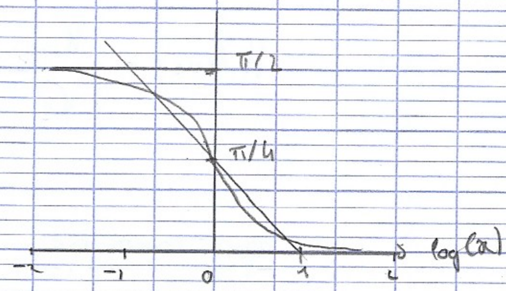
En TBF $\underline{H} = \frac{H_0}{-j\frac{1}{x}} = j\frac{H_0 \omega}{\omega_c}$ → imaginaire pur d'argument $\frac{\pi}{2} + \arg(H_0)$

En THf $\underline{H} = H_0$ → réel d'argument $\arg(H_0)$

↳ si $H_0 > 0$ $\arg H_0 = 0$

si $H_0 < 0$ $\arg H_0 = \pi$

Soit $H_0 > 0$ alors $\varphi = \arctan \frac{\omega_c}{\omega}$



comportement dérivateur

Pour $\omega \ll \omega_c$ on a $\underline{H} = \frac{jH_0\omega}{\omega_c}$

Or $\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$ en combinant ces 2 expressions on a

$$\underline{v_s} = jH_0\omega \frac{\underline{v_e}}{\omega_c}$$

On sait que multiplier par $j\omega$ revient à dériver alors

$$\underline{v_s} = \frac{H_0}{\omega_c} j\omega \underline{v_e}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_s = \frac{H_0}{\omega_c}\frac{dv_e}{dt}}$$

Comport de filtre du 1er ordre

↳ La fct° de transfert peut ê mise sous la forme de produit ou rapports de fct° de transfert d'ordre 1.

Soit $\underline{H} = \dfrac{1+j\omega/\omega_1}{1+j\frac{\omega_2}{\omega}}$ avec $\omega_1 > \omega_2$

On a alors $\underline{H_1} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H_2} = \dfrac{1}{1+j\frac{\omega_2}{\omega}}$

diagramme en gain

$$G_{dB} = 20 \log H = 20 \log H_1 + 20 \log H_2 = G_{1,dB} + G_{2,dB}$$

$$G_{1,dB} = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

↳ pour $\omega \ll \omega_1$, $\frac{\omega}{\omega_1} \ll 1 \rightarrow G^{a_1}_{1,dB} = 0$

$\omega \gg \omega_1$, $\frac{\omega}{\omega_1} \gg 1 \rightarrow G^{a_2}_{1,dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$

les 2 droites se coupent à $\omega = \omega_1$

$$G_{2,dB} = 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}\right)$$

↳ pour $\omega \ll \omega_2$, $\frac{\omega_2}{\omega} \gg 1 \rightarrow G^{a_1}_{2,dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_2}$

$\omega \gg \omega_2$, $\frac{\omega_2}{\omega} \ll 1 \rightarrow G^{a_2}_{2,dB} = 0$

les 2 droites se coupent à $\omega = \omega_2$

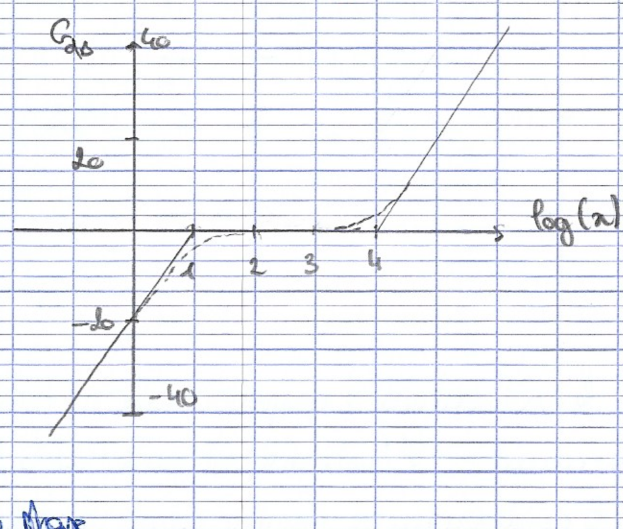


diagramme de phase

- $\underline{H_1} = 1 + j\,\omega/\omega_1$

si $\omega \ll \omega_1 \rightarrow \omega/\omega_1 \ll 1 \rightarrow \underline{H_1} \simeq 1 \rightarrow \varphi_1 = 0$

si $\omega \gg \omega_1 \rightarrow \omega/\omega_1 \gg 1 \rightarrow \underline{H_1} \simeq j\,\omega/\omega_1 \rightarrow \varphi_1 = \pi/2$

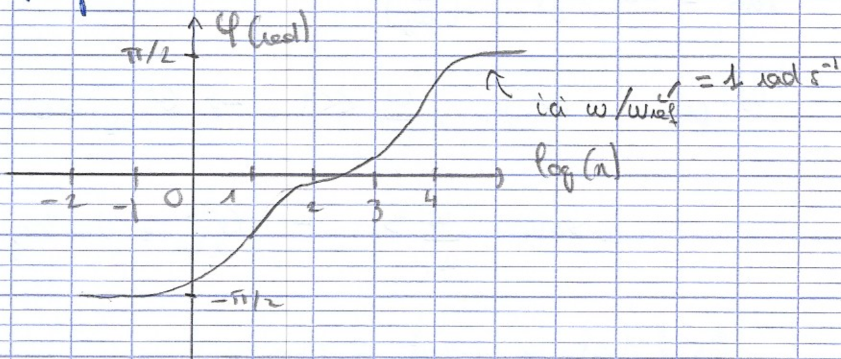
$\varphi_1 = \pi/4$ pour $\omega = \omega_1$

- $\underline{H}_2 = (1 + j\,\omega_2/\omega)^{-1}$

si $\omega \ll \omega_2$, $\omega/\omega_2 \ll 1 \rightarrow \underline{H}_2 \simeq (j\,\omega_2/\omega)^{-1} \rightarrow \varphi_2 = \pi/2$

si $\omega \gg \omega_2$, $\omega/\omega_2 \gg 1 \rightarrow \underline{H}_2 \simeq 1 \rightarrow \varphi_2 = 0$

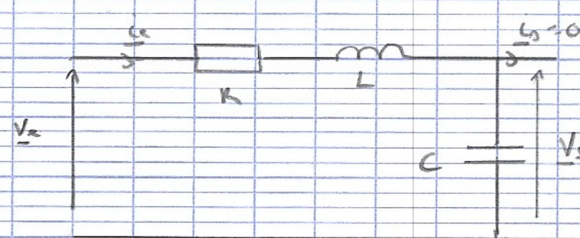
$\varphi_2 = -\pi/4$ pour $\omega = \omega_2$



Filtre du 2e ordre

On rappel $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$ pour circuit R, L, C

↳ Filtre passe-bas



En TBF le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et la bobine comme un court-circuit. L'intensité est nulle dans le circuit $\rightarrow v_s = v_e \rightarrow \underline{H} = 1$

En THF le condensateur se comporte comme un courcuit et la bobine comme un circuit ouvert $\rightarrow v_s = 0 \rightarrow \underline{H} = 0$

→ Le filtre laisse passer les Bf et coupe les hautes fréquences

→ filtre passe-bas

Fct de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_c}}{R + \underline{Z_L} + \underline{Z_c}} = \frac{1}{\underline{Y_c} R + \underline{Z_L}\underline{Y_c} + 1} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Dans le cas general $\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$

etude du gain

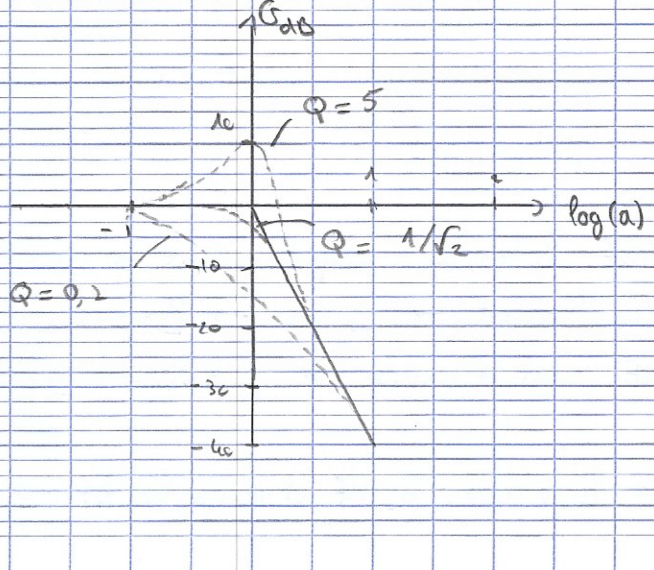
$$G_{dB} = G_0 + 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}\right) \quad \text{avec } G_0 = 20\log(|H_0|)$$

Pour $\omega \ll \omega_0 \rightarrow x \ll 1 \quad G_{dB}^{a_1} = G_0$

Pour $\omega \gg \omega_0 \rightarrow x \gg 1 \quad G_{dB}^{a_2} = G_0 - 20\log x^2 = G_0 - 40\log x$

Les asymptotes se croisent pour $G_{dB}^{a_1} = G_{dB}^{a_2} \Rightarrow \omega = \omega_0$

On a vu que pour un circuit R, L, C il y a resonance quand $\omega_r = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{1/2}$



Étude de la phase

Soit $H_0 = 1$

En TBF, $x \ll 1 \rightarrow \underline{H} \simeq 1 \rightarrow \varphi = 0$

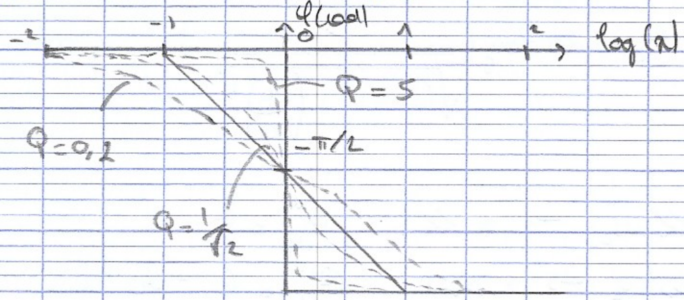
En THF $x \gg 1 \rightarrow \underline{H} \simeq \frac{-1}{x^2} \rightarrow \varphi = \pi$ ou $-\pi$

$\varphi = \varphi_N - \varphi_D$ ← numérateur, dénominateur, or $\varphi_N = 0 \rightarrow \tan \varphi_D = \frac{x}{Q(1-x^2)}$

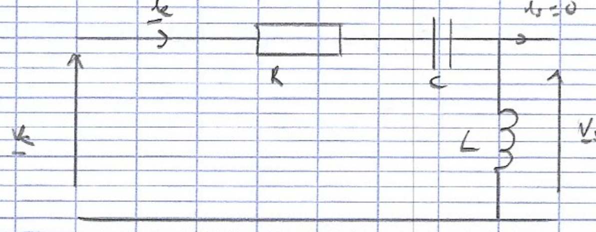
Qd $x \to 0$, $\tan \varphi_D \to 0 \Rightarrow \varphi_D \to 0$

$x \to \infty$, $\tan \varphi_D \to 0 \Rightarrow \varphi_D \to \pi$

À $\omega = \omega_0$ ou $x = 1 \rightarrow \tan \varphi_D \to \infty$ donc $\varphi = -\pi/2$



↳ Filtre passe-haut



En TBF la bobine se comporte comme un court circuit et le condensateur comme un circuit ouvert $\rightarrow v_s = 0 \rightarrow \underline{H} = 0$

En THF c'est l'inverse $\rightarrow v_e = v_s \rightarrow \underline{H} = 1$

Le filtre laisse passer les HF et coupe les BF → filtre passe-haut

fct° de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{Z}_L}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Y}_C}{\underline{Y}_C R + \underline{Z}_L \underline{Y}_C + 1} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{-\left(\omega/\omega_0\right)^2}{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Generalement on ecrit $\boxed{\underline{H} = \frac{-\left(\omega/\omega_0\right)^2 H_0}{1 - \left(\omega/\omega_0\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{-x^2 H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$

étude du gain

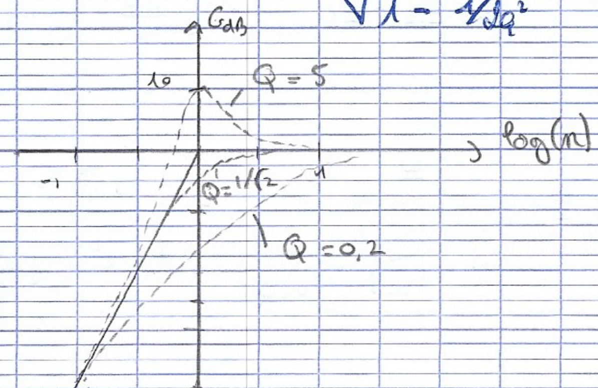
$$G_{dB} = G_0 + 20 \log\left(\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(x/Q\right)^2}}\right)$$

Pour $\omega \ll \omega_0 \rightarrow x \ll 1$ $\quad G_{dB}^{a1} = G_0 + 20 \log x^2 = G_0 + 40 \log x$

Pour $\omega \gg \omega_0 \rightarrow x \gg 1$ $\quad G_{dB}^{a1} = G_0$

On a $G_{dB}^{a1} = G_{dB}^{a2}$ pour $\omega = \omega_0$

On a resonance pour $\omega_r = \omega_0 \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1/2Q^2}}$



étude de la phase

Soit $H_0 = 1$

En TBF $x \ll 1 \rightarrow \underline{H} \simeq -x^2 \rightarrow \varphi = -\pi$ ou π

En THF $x \gg 1 \rightarrow \underline{H} \simeq \frac{-x^2}{-x^2} \rightarrow \varphi = 0$

$\varphi = \varphi_N - \varphi_D$ avec $\varphi_N = \pi$

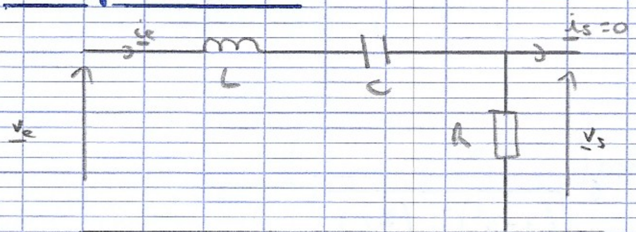
$$\tan \varphi_D = \frac{x}{Q(1-x^2)}$$

$x \rightarrow 0$ $\tan\varphi_D \rightarrow 0$; $\varphi_D \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = \pi$

$x \rightarrow \infty$ $\tan\varphi_D \rightarrow 0$; $\varphi_D \rightarrow \pi \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$

$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$

↳ filtre passe-bande



En TBF $L \rightarrow$ court circuit, $C \rightarrow$ circuit ouvert $\Rightarrow v_s = 0$ $\underline{H} = 0$

En THF c'est l'inverse $\Rightarrow v_s = 0$ $H = 0$

fct° de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R}{R + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q}H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} = \frac{j\frac{x}{Q}H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

Le module de la fonct° vaut : $H = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

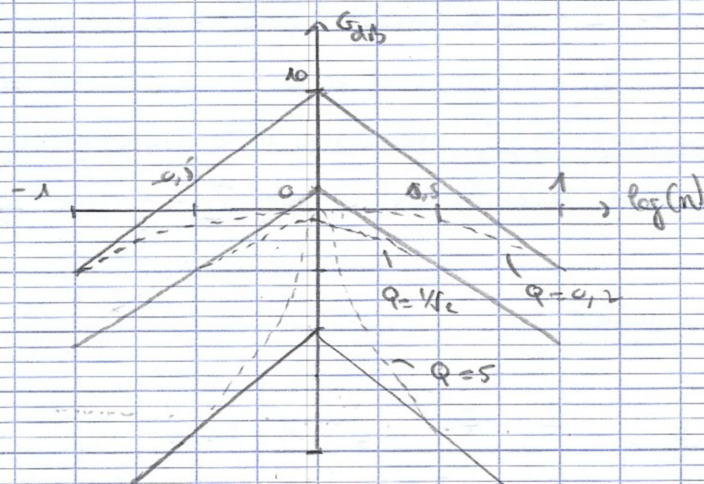
<u>étude du gain</u>

$$G_{dB} = G_0 - 20 \log\left(\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right)$$

Pour $\omega \ll \omega_0 \rightarrow x \ll 1$ $\quad G_{dB}^{a_1} = G_0 + 20 \log x - 20 \log Q$

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow x \gg 1$ $\quad G_{dB}^{a_2} = G_0 - 20 \log x - 20 \log Q$

Les asymptotes se croisent pour $\omega = \omega_0$ $(x = 1)$



Largeur bande-passante $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$

<u>étude de la phase</u>

En TBF $x \ll 1 \rightarrow \underline{H} \simeq jx/Q \rightarrow \varphi = \pi/2$

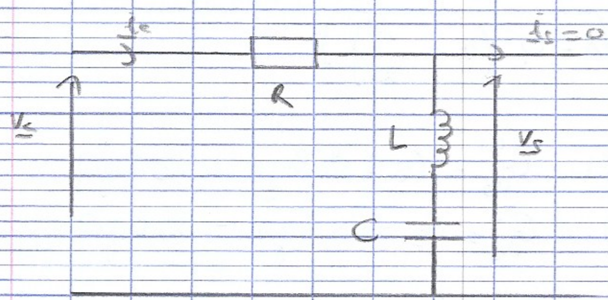
THF $x \gg 1 \rightarrow \underline{H} \simeq \dfrac{jx}{x^2 Q} \rightarrow \varphi = -\pi/2$

$\omega = \omega_0$ $(x = 1) \rightarrow \varphi = 0$

Aux limite de la bande passante $\varphi = \pm \dfrac{\pi}{4}$

En BF le filtre a un comportement dérivateur
En HF " " " " intégrateur

↳ filtre coupe-bande ou réjecteur de bande



En TBF → L → court circuit et C → circuit ouvert ⇒ $v_s = v_e$ et $H = 1$
En THF → L → circuit ouvert et C → court circuit ⇒ $v_s = v_e$ et $H = 1$
Le filtre coupe les fréq intermédiaire et laisse passer les bf et Hf
L'impédance formé de L et C est $\underline{Z} = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

fct° de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{Z_L} + \underline{Z_C}}{R + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Généralement $$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0(1-x^2)}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

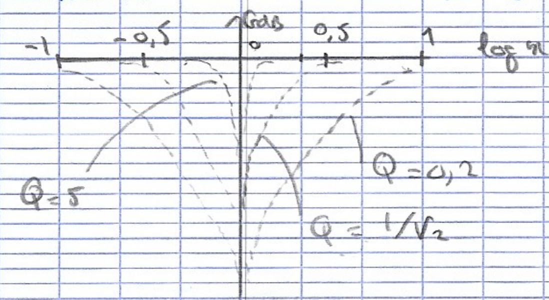
étude du gain

$$\boxed{G_{dB} = 20\log\left(\frac{|H_0||1-x^2|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}\right)}$$

Pour $\omega \ll \omega_0 \rightarrow G_{dB}^{a_1} = G_0$

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow G_{dB}^{a_2} = G_0$

$\rightarrow$ 2 asymptotes horizontales et on a $\omega = \omega_0 \rightarrow H = 0 \Rightarrow G_{dB}(\omega_0) \rightarrow -\infty$



<u>bande réjectée</u>

On cherche ω tq $H(\omega) \leq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$

On a $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$

<u>étude de la phase</u>

En TBF $x \ll 1 \rightarrow \underline{H} \simeq 1 \Rightarrow \varphi = 0$

En THF $x \gg 1 \rightarrow \underline{H} \simeq \frac{x^2}{x^2} \Rightarrow \varphi = 0$

On a $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q(1-x^2)}} \Rightarrow \varphi_N = 0$

$\varphi_D = \tan\varphi_D = \frac{x}{Q(1-x^2)}$

Qd $x \rightarrow 0$ $\tan\varphi_D \rightarrow 0$ $\varphi_D \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$

$x \rightarrow \infty$ $\tan\varphi_D \rightarrow 0$ $\varphi_D \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$

pour $x \rightarrow 1^-$ $\varphi \rightarrow -\pi/2$

$x \rightarrow 1^+$ $\varphi \rightarrow \pi/2$