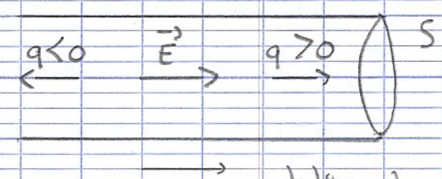
Électrocinétique

Lois générales de l'électrocinétique

Courant électrique



Sous l'act° du champ électrique extérieur, les porteurs de charges sont soumis à la force $\vec{f} = q\vec{E}$ et sont donc animés d'un mvt d'ensemble tel que :

- les charges positives se déplacent dans le sens du champ
- les charges négatives dans le sens contraire.

Le sens du courant est le sens dans lequel se déplacent les charges positives soumises au champ électrique extérieur

Intensité du courant électrique : i la quantité de charges traversant S par unité de temps $\Rightarrow$ $\delta q = i\,\delta t$

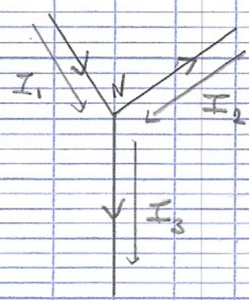
$$i = \frac{\delta q}{\delta t}$$

si i cst au cours du temps $\rightarrow$ courant continu.

Tension et potentiel

Tension entre 2 pts AB : $U_{AB} = V_A - V_B$ différence de potentiel

Loi des noeuds



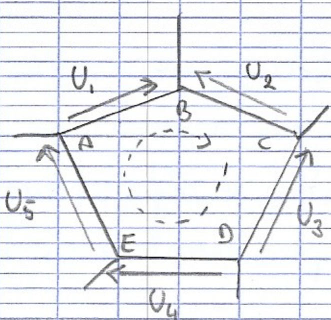
$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k i_k = 0$$

n branches aboutant sur le noeud N

$\varepsilon_k = 1$ si i_k orientée vers le noeud

$= -1$ si i_k orientée depuis le noeud

Loi des mailles



$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k U_k = 0$$

n tension (n branches sur une maille)

$\varepsilon_k = 1$ si U_k dans le sens positif choisi

$\varepsilon_k = -1$ si U_k dans le sens opposé

Noto de dipole

↳ système relié à un circuit élec. extérieur par 2 bornes.

Puissance : $P(t) = U(t)\, i(t)$

Conventio récepteur : i et u sont de sens opposé $\mathcal{P}_{reçue}(t) = u(t)\, i(t)$

$\mathcal{P}_{cédée}(t) = -u(t)\, i(t)$

Conventio générateur : i et u ont de m̂ sens → le dipôle fournit de la puissance au circuit. $\mathcal{P}_{reçue}(t) = -u'(t)\, i(t)$

$\mathcal{P}_{cédée}(t) = u'(t)\, i(t)$

Circuits linéaires dans l'approximat° des régimes quasi-stationnaire

Dipôle linéaire

↳ si $u(t)$ et $i(t)$ st liés par une éq. diff. linéaire à coeff constants :

$$u = \alpha i + \beta$$

Si $i(t)$ et $u(t)$ varie en fct° des dérivés de l'une ou de l'autre de ces grandeurs, il faut une éq. diff qui est souvent du 1er ordre

$$a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u + b_1 \frac{di}{dt} + b_0 i = f(t)$$

On peut généraliser sous la forme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{K} a_k \frac{d^k u}{dt^k} + \sum_{l=1}^{L} b_l \frac{d^l i}{dt^l} = f(t)$

Résistor de résistance R

- $u = Ri$
- Conductance : $G = \dfrac{1}{R}$ $[G] = \Omega^{-1}$ ou en siemens
- $i = Gu$

Associat° en série = N dipôles en série

$$i_1 = i_2 = \dots = i$$
$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_N$$
$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$
$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_N}$$

Associat° en parallèle = N dipôles en //

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$
$$u = u_1 = u_2 \dots = u_N$$
$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_N$$
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \frac{1}{R_N}$$

Puissance dissipée dans un résistor

$$P = Ri^2 \quad \text{ou} \quad P = \frac{U^2}{R}$$

L'énergie reçue entre les instants t et $t+dt$ est $\delta W = Ri^2 dt = \frac{U^2}{R} dt$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U^2(t)}{R}\, dt$$

Bobine d'inductance L

↳ enroulement de spires conductrices

$$U = L\frac{di}{dt} \qquad [L] = H$$

en convent° générateur $U' = -U = -L\frac{di}{dt}$

Énergie emmagasinée = $P = u(t)i(t) = L\frac{di}{dt}i(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}Li^2$$

énergie reçue entre 2 instants $= W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) dt = E(t_2) - E(t_1)$

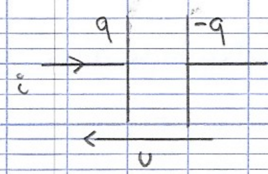
associat° en série $L = L_1 + L_2 + \dots + L_N$

en // $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_N}$

Condensateur de capacité C

↳ constitué de 2 conducteurs qui se font face (appelé armature), un matériau isolant, le diélectrique, situé entre les 2 armatures.

On a $q = Cu$



$[C] = F$ (Farads)

On a aussi $i = C\dfrac{du}{dt}$

Énergie : $P = u(t)\, C\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Cu^2\right)$

$\rightarrow E = \dfrac{1}{2}Cu^2$

associat° en série : $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dots + \dfrac{1}{C_N}$

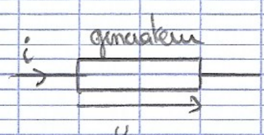
associat° en // : $C = C_1 + \dots + C_N$

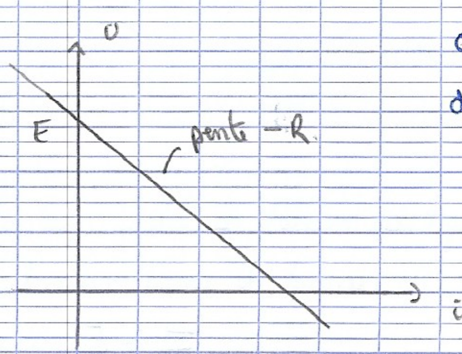
Sources de tens° et de courant – Modèles de Thévenin et de Norton

source de tension : dispositif idéal qui impose une ≠ de potentiel constante aux bornes du circuit auquel il est relié, quelle que soit l'intensité du courant qui la traverse

source de courant : dispositif idéal qui débite un courant d'intensité cste dans le circuit auquel il est relié quelle que soit la tension à ses bornes et ce indépendamment du circuit.

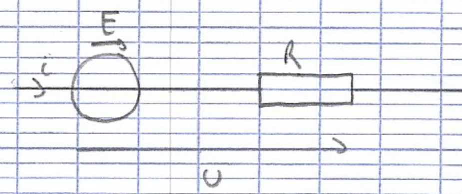
Modèle de Thévenin





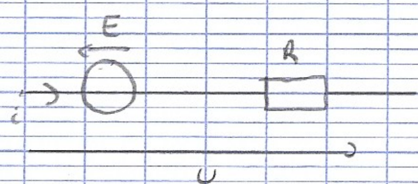
caractéristique tension-courant des générateurs.

Il s'agit de la caractéristique d'un dipôle linéaire : $u = E - Ri$

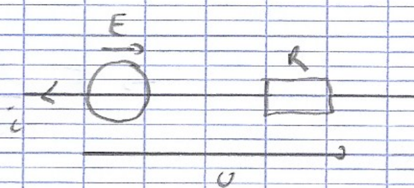


en convent° générateur, la tens° u aux bornes du dipôle et la fem E st de m̂ sens et la relat° entre i et u : $u = -Ri$ → $u = E - Ri$

D'autres choix st possibles :



$u = -E - Ri$



$u = E + Ri$

→ Il s'agit du modèle dit modèle de Thevenin

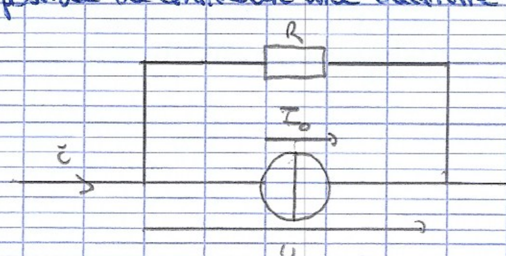
Modèle de Norton

La caractéristique précédente est également la courbe d'équat°

$$i = \frac{E}{R} - \frac{1}{R} u$$

Cela correspond à la relat° $i = I_0 - Gu$ avec $I_0 = \frac{E}{R}$ et $G = \frac{1}{R}$

Il est donc possible de considérer une deuxième modélisat° du générateur



Il s'agit du modèle de Norton qui est l'associat° en // d'une source idéale de courant, de courant de court-circuit I_0, et d'une résistance R avec,

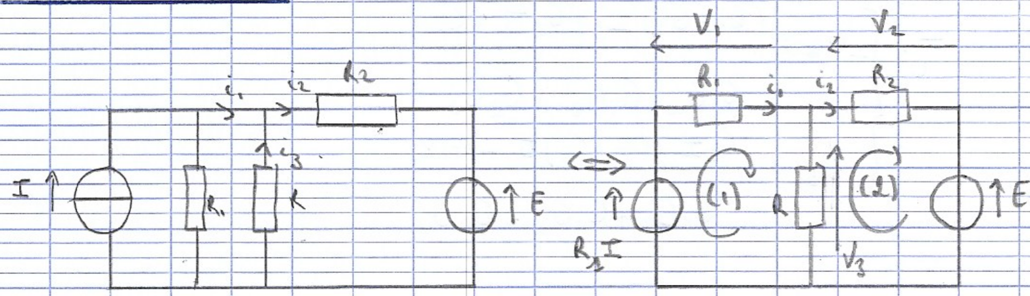
$$I_0 = \frac{E}{R}$$

Lois de Kirchhoff

↳ 2 types d'expressions permettant de calculer soit les intensités dans toutes les branches du circuit considéré, soit les tensions entre les nœuds du circuit.

↳ méthode des mailles et méthode des nœuds

Méthode des mailles



modèle de Norton ⇒ modèle de Thévenin équivalent

On a

$$\begin{cases} \overbrace{R_1 I}^{E'} - V_1 - V_3 = 0 \\ V_3 - V_2 - E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 = R_1 i_1 \quad V_3 = -R i_3 \\ V_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

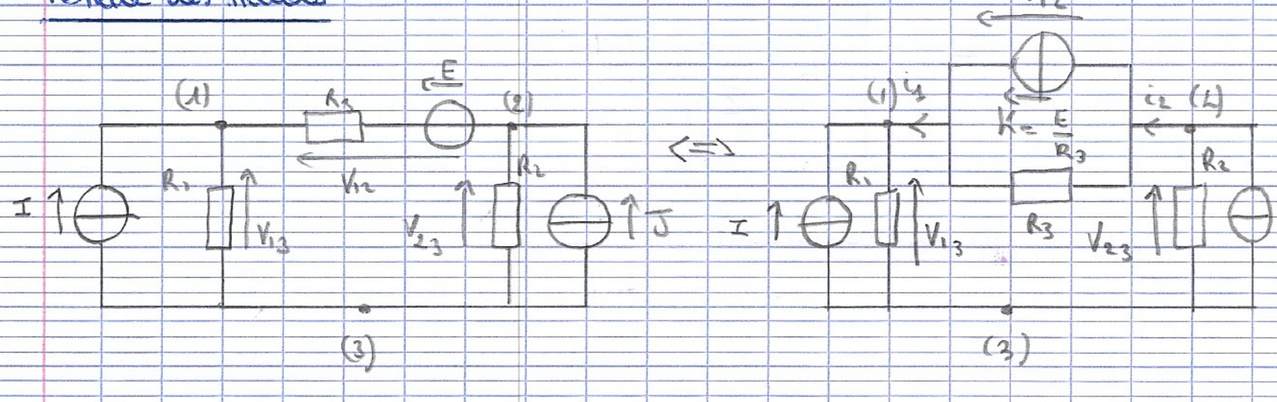
↳ R en convention générateur

$$\Rightarrow \begin{cases} E' = R_1 i_1 - R i_3 \\ -E = R_2 i_2 + R i_3 \end{cases}$$

on a aussi $i_3 = i_2 - i_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (R_1 + R) i_1 - R i_2 = E' \\ -R i_1 + (R_2 + R) i_2 = -E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = \dfrac{-RE + (R_2 + R) E'}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R} \\ i_2 = \dfrac{-(R_1 + R) E + R E'}{R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R} \end{cases}$$

Méthode des nœuds



Loi de noeuds (1) et (2) :

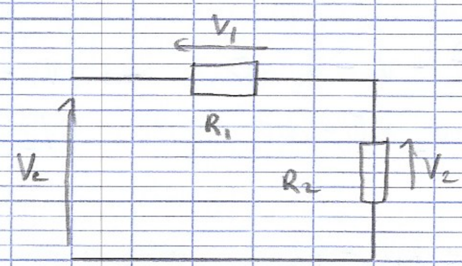
$$\begin{cases} i_1 = -I + G_1 V_{13} = K - G_3 V_{12} \\ i_2 = K - G_3 V_{12} = J - G_2 V_{23} \end{cases}$$

$$V_{12} = V_{13} - V_{23} \Rightarrow \begin{cases} I + K = (G_1 + G_3) V_{13} - G_3 V_{23} \\ J - K = -G_3 V_{13} + (G_2 + G_3) V_{23} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{13} = \dfrac{(G_2 + G_3) I + G_3 J + G_2 K}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3} \\ V_{23} = \dfrac{G_3 I + (G_1 + G_3) J - G_1 K}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3} \end{cases}$$

Diviseurs de tension et de courant

Diviseur de tension :

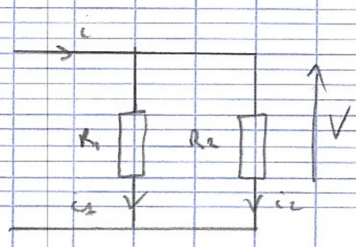


On a $\begin{cases} V_1 = i R_1 \\ V_2 = i R_2 \\ V_e = i (R_1 + R_2) \end{cases}$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_e \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_e$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_k = \frac{R_k}{\sum_1^N R_j} V_e}$$

Diviseur de courant :



On a $\begin{cases} i_1 = G_1 V \\ i_2 = G_2 V \\ i = (G_1 + G_2) V \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\, i \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\, i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i_k = \frac{G_k}{\sum_{1}^{N} G_j}\, i}$$

Circuits linéaires soumis à un échelon de tension

↳ régime continu = u et i ne dépendent pas du temps

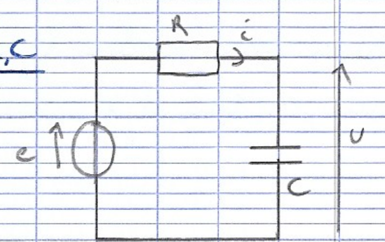
régime variable = u et i dépendent du tps

régime permanent = les caractéristiques des intensités et des tensions ne varient pas au cours du tps

régime transitoire : régime durant lequel on passe d'un régime permanent à un autre

Circuit du 1er ordre

Circuit R,C



on a $e = Ri + u$

on sait que $i = C\dfrac{du}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{1}{RC}e \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e}{\tau} \quad \text{avec } \tau = RC$$

↳ régime libre = réponse d'un syst. en absence d'excitation $u = U_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

charge et décharge du condensateur

↳ réponse à un échelon de tension ($e(t)$ passe de 0 à E)

charge : $u(0) = U_0 + E = 0 \Rightarrow U_0 = -E$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \\ \Rightarrow \quad i(t) &= C\frac{du}{dt} = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}}$$

décharge : $u = U_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

par continuité de u, $u(0) = U_1 = E$

$$\boxed{\begin{gathered} u = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ i = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{gathered}}$$

Temps caractéristique : $\tau = RC$

↳ τ : tps qui serait necessaire pour atteindre la valeur finale limite avec une croissance linéaire au lieu d'ê exponentielle à par des m̂ condit° initiales

Aspect energétique

↳ se fait à partir de la loi des mailles : $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e$

en multipliant par $i dt = \frac{dq}{dt}dt \Rightarrow Ri^2 dt + \frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}dt = ei$

$$\Leftrightarrow \underbrace{Ri^2 dt}_{\text{energie dissipé par effet Joule}} + d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = ei\,dt$$

↳ energie fournie par la source de tens°

↳ energie reçue ou stockée par le condensateur ss forme d'energie electrostatique

Pendant la charge le generateur fournit :

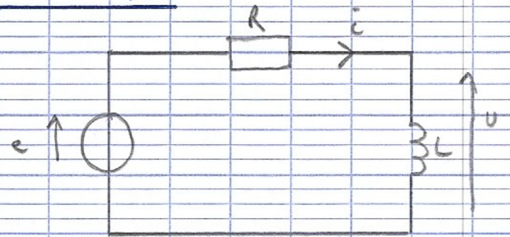
$$W = \int_0^{\infty} ei\,dt = E\int_0^{Q} dq = EQ = CE^2$$

Le condensateur stocke l'energie :

$$W_C = \int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)dt = \int_0^{Q} d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CE^2}{2}$$

Le condensateur stocke la moitié de l'énergie fournie par le générateur et l'autre moitié est dissipé par effet Joule dans le résistor

Circuit RL



On a $e = Ri + L\frac{di}{dt}$ avec la loi des mailles

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{1}{L} e$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{e}{R\tau} \qquad \text{en notant } \tau = \frac{L}{R}$$

La solution s'écrit $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$

et $\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt} = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Aspect énergétique : on a $L\frac{di}{dt} + Ri = e$

en multipliant par $idt = \frac{dq}{dt}dt$

$$\Rightarrow d\left(\frac{Li^2}{2}\right) + Ri^2 dt = eidt$$

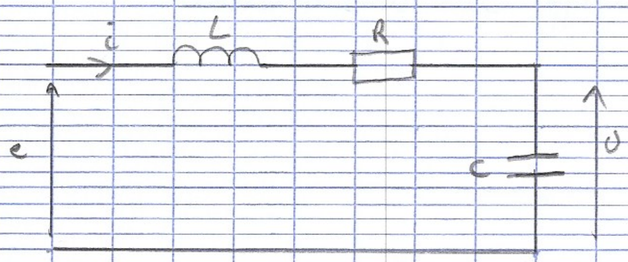
énergie stockée ou reçue dans la bobine sous forme d'énergie magnétique

$$\Leftrightarrow Li\frac{di}{dt}dt + Ri^2 dt = eidt$$

$$W = \int_0^{\infty} eidt = \frac{LE^2}{R^2} = LI_0^2$$

$$W_L = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right)dt = \frac{LE^2}{2R^2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

Circuits du second ordre



On applique une loi des mailles

$$u + Ri + L\frac{di}{dt} = e$$

on a $i = C\frac{du}{dt}$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = e$$

Régime libre ou propre

On cherche les solut° tq $LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = 0$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $[s^{-1}]$ et $\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \iff r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$

- $\Delta > 0$ 2 solut° réelles $r = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$
- $\Delta = 0$ 1 solut° double $r = -\xi\omega_0$
- $\Delta < 0$ 2 solut° complexes : $r = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

↳ régime apériodique : $\Delta > 0$ $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ou $\xi > 1$

$$r_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$$

$$\Rightarrow u = U_1 \exp(r_1 t) + U_2 \exp(r_2 t)$$

Pour i on aura $i(t) = C\dfrac{du}{dt} \Rightarrow i = Cr_1 U_1 \exp(r_1 t) + Cr_2 U_2 \exp(r_2 t)$

↳ régime critique : $\Delta = 0$ $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $\xi = 1$

on a $r = -\omega_0$

La solut° s'écrit ss la forme : $u(t) = (U_0 + U_1 t)\exp(-\omega_0 t)$

$$\rightarrow i = C\frac{du}{dt} = C(U_1 - \omega_0 U_0 - \omega_0 U_1 t)\exp(-\omega_0 t)$$

↳ régime pseudopériodique : $\Delta < 0 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ou $\xi < 1$

on a $r_\pm = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega$

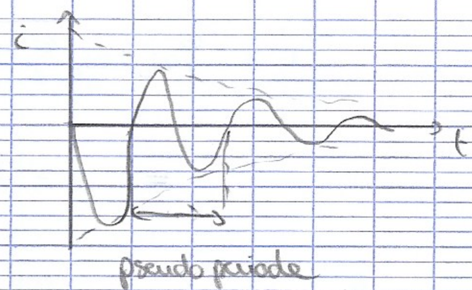
La solut° s'écrit $u(t) = (U_1\cos(\omega t) + U_2\sin(\omega t))\exp(-\xi\omega_0 t)$
$= U_0\cos(\omega t + \varphi)\exp(-\xi\omega_0 t)$

Il y a 2 parties dans cette solut° :

- des oscillat° périodiques à la pulsat° $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
  ↳ partie imaginaire des solut°
- une atténuat° exponentielle de l'amplitude

→ c'est pourquoi on qualifie ce régime de pseudopériodique ou sinusoïdale amortie

Et on a $i(t) = -CU_0(\xi\omega_0\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi))\exp(-\xi\omega_0 t)$



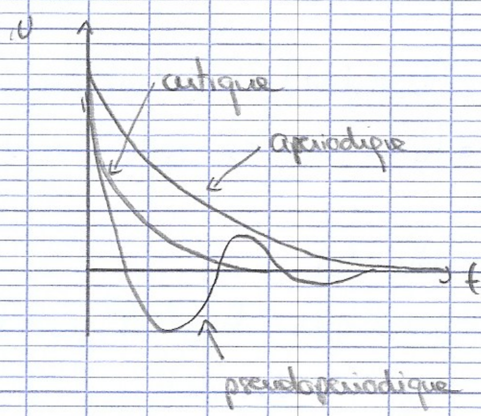
pseudopériode : période de la partie oscillante en $\cos(\omega t)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\varphi^2}}$$

Si on avait un régime sinusoïdale non amorti on aurait une période dite période propre :
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

faible amortissement $T \simeq T_0$

Comparaison des 3 régimes



Aspect énergétique

On a $e = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$

en multipliant par $i\,dt = \frac{dq}{dt}dt$

$$ei\,dt = Li\frac{di}{dt}dt + Ri^2dt + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}dt = Ri^2dt + \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right)$$

On a $e\,i\,dt$ l'énergie fournie par le générateur $e\,i\,dt$
Ri^2 énergie dissipée par effet Joule
$d\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right)$ variation d'énergie magnétique et électrostatique

Facteur de qualité : pour un amortissement très faible

L'énergie $\mathcal{E}$ est une f$^{ct^o}$ quadratique de l'intensité ou de la tension dont l'amplitude ↓ exponentiellement avec un facteur $\exp(-2\xi\omega_0 t)$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}}{\Delta\mathcal{E}}} \qquad \text{avec } \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$$

↳ pseudopériode