

## Electromagnetisme

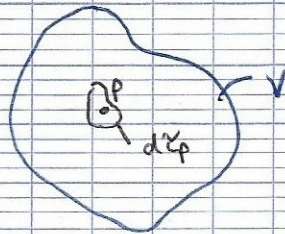
### Charges electriques et distribution de charges

Les phenomenes d'attraction et de repulsion electrique peuvent s'expliquer par la notion de charge electrique.

↳ 2 types : positive ou negative

→ elle est extensive, conservative, invariable par chgt de ref. et quantifiée.

### Densite volumique de charges



↳ est un volume elementaire  $dV_p$  autour de  $P$  de charge totale  $dQ_p$ .

On definit la densite volumique de charges au pt  $P$ ,  $\rho(P)$ , par :

$$dQ_p = \rho(P) dV_p$$

si  $\rho$  est independant de  $P$ , on dit que la densite volumique est uniforme. La charge totale s'obtient en sommant <sup>sur</sup> l'ensemble des volumes elementaires les charges :

$$Q = \iiint_{P \in V} \rho(P) dV_p$$

### Densite surfacique de charges

$$dQ_p = \rho(P) dV_p = \rho(P) a dS_p = \sigma(P) dS_p$$

$dS_p$  element de surface elementaire autour du pt  $P$ . Densite surfacique de charges :

$$\sigma(P) = \lim_{a \rightarrow 0} (\rho(P))$$

$$Q = \iint_{\text{AES}} \sigma(r) dS_p$$

$$\left( \rho = \frac{Q}{a} \right)$$

Densité linéique de charges

$$dQ_p = \lambda(r) dl_p$$

$dl_p$  = longueur élémentaire du fil  
 $\lambda(r)$  densité linéique de charges.

$$Q = \int_{\text{PES}} \lambda(r) dl_p$$

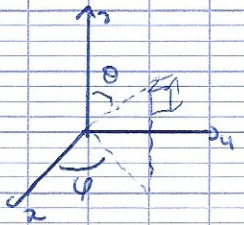
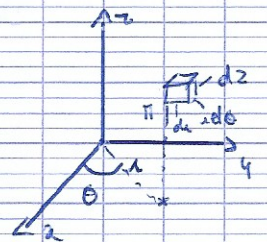
Rappels mathématiques

Volume élémentaire

$$d\tau = dx dy dz$$

$$d\tau = dr r d\theta dz \text{ en cylindrique}$$

$$d\tau = dr r d\theta r \sin\theta d\varphi \text{ sphérique}$$



Surface élémentaire =  $dx dy \perp \vec{u}_z$ ;  $dx dz \perp \vec{u}_y$ ;  $dy dz \perp \vec{u}_x$   
 cylindrique  $dr r d\theta \perp \vec{u}_z$ ;  $dr dz \perp \vec{u}_\theta$ ;  $r d\theta dz \perp \vec{u}_r$   
 sphérique  $dr r d\theta \perp \vec{u}_\varphi$ ;  $dr r \sin\theta d\varphi \perp \vec{u}_\theta$ ;  $r d\theta r \sin\theta d\varphi \perp \vec{u}_r$

## Champ électrostatique

### Loi de Coulomb

↳ force centrale qui décroît en  $1/r^2$ ,  $r$  distance entre les 2 charges elec.

Les charges sont ponctuelles  $\rightarrow$  principe de l'act<sup>e</sup> et de la react<sup>e</sup> s'applique

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = - \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Soient 2 charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  situées respectivement en  $M_1$  et  $M_2$ . La charge  $q_1$  exerce sur la charge  $q_2$  la force

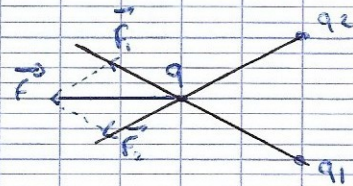
$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{(r_{12})^3} \vec{r}_{12}$$

↑ permittivité du v. vide  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{s}^2 / \text{kg} \cdot \text{m}^3$   
 $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

Principe de superposit<sup>o</sup> : Soit  $q$  en  $M$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q q_1}{(r_{11})^3} \vec{r}_{11}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q q_2}{(r_{22})^3} \vec{r}_{22}$$



force subit par  $q$   $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

si on veut mesurer  $q_2$  inconnue  $\rightarrow$  on fait cette expérience et on a la relat<sup>o</sup> :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{F_2}{F_1}$$

## Champ électrostatique

Champ créé par une charge ponctuelle :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(r_{12})^3} \vec{r}_{12} = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{(r_{12})^3} \vec{r}_{12} = q_2 \vec{E}_1 (M_2)$$

→ champ électrostatique créé au pt  $M_2$  par la charge électrique  $q_1$  située en  $M_1$ .  
On écrit souvent

$$\vec{E}_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r$$

$r$  = distance entre  $M_1$  et  $M_2$  et  $\vec{u}_r$  vecteur unitaire directeur de la droite  $M_1M_2$  ( $M_1$  vers  $M_2$ )

Principe de superposition : champ électrostatique créé par une distrib<sup>o</sup> de charges ponctuelles  $q_i$  placées en des pts  $P_i$  est égal à la somme des champs électrostatiques créés par chacune des charges  $q_i$  considérées seule.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{(P_iM)^3} \vec{P_iM}$$

Distrib<sup>o</sup> continue

↳ volumique 
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{PEV}} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} d\tau_P$$



Δ intégrat<sup>o</sup> sur le volume où se situent les charges créant le champ

↳ surfacique 
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{PES}} \sigma(P) \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dS_P$$

↳ linéique 
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{PEL}} \lambda(P) \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} d\ell_P$$

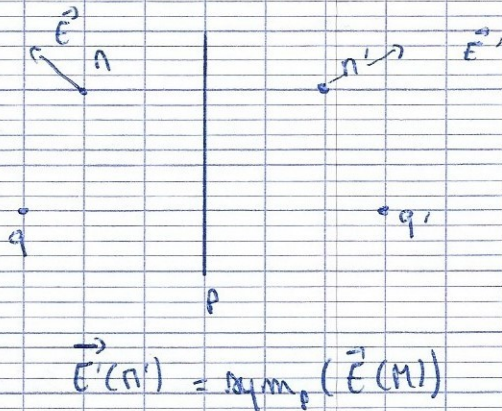
Invariances, symétrie et propriétés du champ

Principe de Curie : Les éléments d'invariance et de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits

invariance par translat<sup>o</sup> : si  $\forall a, \forall a \quad \vec{E}(a, y, z) = \vec{E}(z+a, y, z)$   
absc  $\vec{E}(r) = \vec{E}(q, z)$

invariance par rotation: si  $\forall \theta, \forall \alpha, \|\vec{E}(\theta, \alpha)\| = \|\vec{E}(\theta + \alpha, \alpha)\|$   
 $\hookrightarrow$  le champ ne dépend pas de  $\theta$

### Symétries des sources par rapport à un plan



On appelle plan de symétrie un plan tq la distribution obtenue en déplaçant les charges selon une symétrie par rapport à ce plan est identique à la distribution initiale  
 $\hookrightarrow q_1 = q_2 \rightarrow \vec{E}'(n') = \text{sym}_p(\vec{E}(M))$

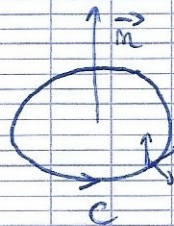
plan d'antisymétrie  $\rightarrow$  plan tq  $q_1 = -q_2$

$$\hookrightarrow \vec{E}'(n') = -\text{sym}_p(\vec{E}'(M))$$

### Propriétés du champ électrostatique

$\vec{a}(M)$  = chp de vecteurs quelconques

Orientat d'une surface :

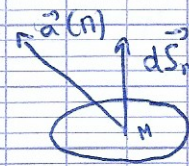


technique de la main droite

## Definition d'un flux

On appelle flux élémentaire du champ  $\vec{a}(M)$  à travers une surface élémentaire orientée  $d\vec{S}_n$  le qnté :

$$d\phi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_n$$



Le flux de  $\vec{a}(M)$  à travers une surface  $\Sigma$  s'obtient en sommant les contributions

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_n$$

Le flux à travers une surface fermée sera toujours un flux nul.

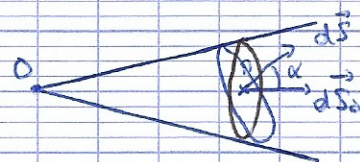
## Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

Soit  $d\vec{S}$  surface élémentaire autour d'un pt  $M$ .

On a

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(OM)^3} \vec{OM}$$

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(OM)^3} \vec{OM} \cdot d\vec{S}$$



$$\text{On a la relation } \vec{OM} \cdot d\vec{S} = OM dS \cos \alpha \quad dS \cos \alpha = dS_0$$

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(OM)^3} OM dS_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(OM)^2} dS_0$$

$$\text{soit } dS_0 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = OM^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(OM)^2} OM^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sin \theta d\theta d\varphi$$

## Flux à travers une surface fermée

↳ Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$  placé en  $O$  à travers une surface fermée quelconque est le même que celui du même champ électrostatique à travers une sphère.

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

## Théorème de Gauss

Soit le cas du champ électrostatique créé par un fil  $\infty$  uniformément chargé (de densité de charge linéique  $\lambda$ ). Soit un cylindre en cylindrique est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Soit la surface fermée constituée d'un cylindre  $h$  d'axe suivant le fil, de base circulaire de rayon  $r$ .

Le flux s'écrit  $\phi = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{\text{lat}}$

Comme  $\vec{E}$  est  $\perp$  aux surfaces orientées  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$ ,  $\rightarrow \phi_{S_1} = \phi_{S_2} = 0$

On a

$$\phi_{\text{lat}} = \iint_{\text{lat}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} r d\theta dz$$

soit,

$$\phi_{\text{lat}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$\lambda h$  est la charge du fil contenue à l'intérieur de la surface fermée.

$$\rightarrow \phi_{\text{lat}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Théorème général = Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée  $S$  est égal au rapport de la charge totale contenue à l'intérieur de la surface  $S$  par la permittivité électrique dans le vide  $\epsilon_0$

$$\Phi = \oint_{S \text{ fermée}} \vec{E}(\vec{M}) \cdot d\vec{S}_n = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

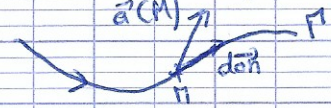
$Q_{\text{int}} > 0$   
lignes de champ vers l'ext.

On appelle surface de Gauss la surface fermée  $S$  considérée  $Q_{\text{int}} < 0$   
lignes de champ vers l'intérieur

Circulation du champ électrostatique - potentiel électro.

Soit une courbe orientée  $\Gamma$ . On appelle circulation du champ  $\vec{a}(M)$  le long de  $\Gamma$  l'intégrale:

$$C = \int_{\Gamma} \vec{a}(M) \cdot d\vec{\omega}$$



où  $M$  parcourt la courbe  $\Gamma$  dans le sens de son orientation  
dC circulation élémentaire  $dC = \vec{a}(M) \cdot d\vec{\omega}$

propriété :

$$\int_{\Gamma} (\sum a_i(M)) d\vec{\omega} = \sum_i \left( \int_{\Gamma} a_i(M) d\vec{\omega} \right)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Rappel sur le gradient

$$\vec{\text{grad}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x,y,z} \vec{u}_x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,y,z} \vec{u}_y + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y,z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\text{grad}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r,\theta,z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{r,\theta,z} \vec{u}_\theta + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{r,\theta,z} \vec{u}_z \quad \text{cylindrique}$$



$$\vec{\text{grad}} \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{\theta, \varphi} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{r, \varphi} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \right)_{r, \theta} \vec{u}_\varphi \quad \text{sphérique}$$

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Calcul<sup>s</sup> du champ élect. créé par une charge ponctuelle  
 ↳ soit  $q$  en  $P$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(PM)^3} \vec{PM}$$

↳ calcul<sup>s</sup> s'écrit

$$dC = \vec{E}(M) \cdot d\vec{on} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(PM)^3} \vec{PM} \cdot d\vec{on}$$

$P$  étant un pt fixe,  $dOP = \vec{0}$        $d\vec{on} = d\vec{OP} + d\vec{PM} = d\vec{PM}$   
 on  $\vec{PM} \cdot d\vec{PM} = \frac{1}{2} d(\vec{PM} \cdot \vec{PM}) = \frac{1}{2} d(PM^2) = PM dPM$

$$dC = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(PM)^2} dPM$$

↳  $-d\left(\frac{1}{PM}\right)$

$$dC = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{PM}\right) \rightarrow dC = -dV$$

avec  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{PM}$  + cste

↳ long d'une courbe  $\Gamma$ ,  $C = \int_{\Gamma} d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{PM}\right)$

V potentiel électrostatique  $dC = -dV(M)$

↳ nous veut  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{PM}$

On a  $\vec{E} = \vec{\text{grad}} V$

Distribut<sup>o</sup> continue

↳ volumique  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{PEV} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau_P$

↳ surfacique  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{PES} \frac{\sigma(P)}{PM} dS_P$

↳ linéique  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{PEL} \frac{\lambda(P)}{PM} d\ell_P$

Circulat<sup>o</sup> du champ le long d'un contour fermé =  $\oint_{\Gamma \in C} \vec{E}(M) \cdot d\vec{or} = 0$

en sphérique  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{PEV} \frac{\rho(P)}{r} r' \sin\theta' d\theta' d\phi' d\tau'$   
↳ convergent

$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{PES} \frac{\sigma(P)}{r} r' d\theta' d\phi' \rightarrow$  convergent

$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{PEL} \frac{\lambda(P)}{r} d\ell \rightarrow$  diverge qd  $r \rightarrow 0$   
↳ discontinuité du potentiel au niveau du fil

### Energie électrostatique

Energie potentiel  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{or} = q\vec{E}(M) \cdot d\vec{or}$

$\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)$

↳  $\vec{E}(M) \cdot d\vec{or} = -dV(M)$

Alors  $\delta W = -q dV(M) = -d(qV(r))$

Le travail électrost. entre 2 posit<sup>o</sup>  $M_1$  et  $M_2$  s'écrit :  $W = q(V(M_1) - V(M_2)) = q(V_1 - V_2)$

$V_1$  et  $V_2$  potentiels aux posit<sup>o</sup> initiale et finale

$\delta W = dE_p \rightarrow E_p = qV + \text{cte}$

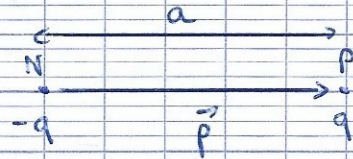
Energie potentiel entre deux charges  $E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$

## Dipôle électrostatique

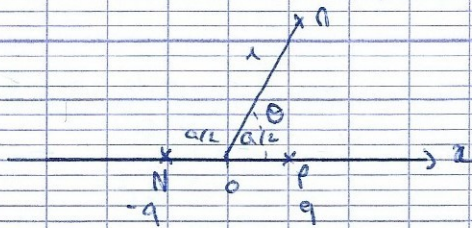
On appelle dipôle électrostat. le syst. constitué de 2 charges ponctuelles opposées  $-q$  et  $q$  situées en 2 pts N et P distants de  $a$  et tq  $a = NP$  soit très petit devant les autres grandeurs envisagées.

Moment dipolaire :  $\vec{p} = q \vec{NP}$   
[C.m]

$$1D = 3,336 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$$



Potentiel créé par un dipôle =  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{MN} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{MP}$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$r_1^2 = (r_0 + r_0 \vec{e}_x)^2 = r_0^2 + r_0^2 + 2r_0 \cdot r_0 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = r^2 + \frac{a^2}{4} - 2r \frac{a}{2} \cos\theta$$

→ en prenant  $p = qa$   $p \cos\theta = \vec{p} \cdot \frac{\vec{O}\vec{M}}{OM}$

$$V(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{O}\vec{M}}{4\pi\epsilon_0 OM^3} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Exprès<sup>s</sup> du champ créé :  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$  avec  $V(r) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

en polaire

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$

ou bien

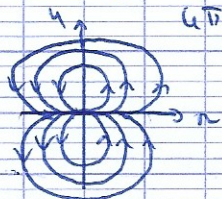
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{O}\vec{M}) \vec{O}\vec{M} - O\vec{M}^2 \vec{p}}{OM^5}$$

## Lignes de champs et equipotentielles

↳ on cherche les lignes de champ tangente au champ électrostat. en utilisant la relat° :

$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

en polar →  $\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow r E_\theta dr = E_r dr$

$$\rightarrow \frac{r \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} dr \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{dr \cos \theta}{r \sin \theta} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$


$$\rightarrow \ln r = 2 \ln(|\sin \theta|) + c$$

$$\rightarrow r = A \sin^2(\theta)$$

Equipotentielles = elles st définies par l'ensemble des pts ayant le même potentiel soit  $V = V_0 = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 V_0}}$

## Action d'un champ extérieur sur un dipôle

### Cas d'un champ uniforme

↳ la force qui s'exerce sur un dipôle est la somme des forces qui s'exercent sur chacune des 2 charges.

$$\begin{aligned} \text{↳ } \vec{F} &= q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N) \\ \text{si champ uniforme } \vec{E}(P) &= \vec{E}(N) \text{ et } \vec{F} = \vec{0} \end{aligned}$$

Moment exercé sur un dipôle par un champ électrostat. est. uniforme

$$\text{↳ } \vec{M}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

→ indépendant du pt où on le calcule (note F')

L'act° d'un champ électrostat. est. uniforme sur un dipôle se réduit à un couple de moment :

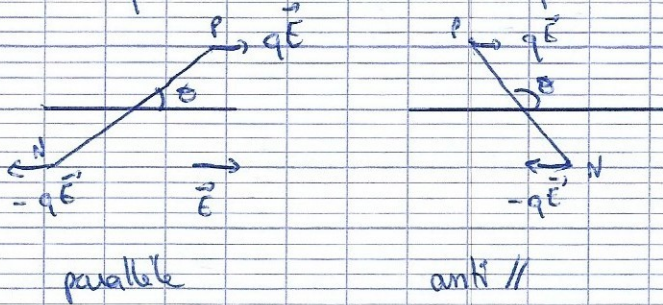
$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Soit  $\theta$  l'angle entre  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  et  $\vec{h}$  un vecteur unitaire  $\perp$  à  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$ ,  
 $\vec{\tau} = pE \sin\theta \vec{h}$

état d'équilibre si le moment des forces est nul donc si  $\sin\theta = 0$

$$\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

→ dipole parallèle ou anti parallèle



Un champ électrostat. uniforme tend à orienter les dipôles suivant les lignes de courant.

### Champ non uniforme

$$\vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N) = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N))$$

coordonnées de P  $(x + \Delta x/2, y + \Delta y/2, z + \Delta z/2)$

N  $(x - \Delta x/2, y - \Delta y/2, z - \Delta z/2)$

$$\vec{F} = q \left( E_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - E_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2} \right) \right)$$

Dev. limite au 1<sup>er</sup> ordre

$$F_x = q \left( E_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$- E_x(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_x}{\partial z} )$$

$$= q \left( \Delta x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \vec{p} \cdot \vec{\text{grad}} E_x$$

$$\rightarrow \vec{F}_y = \vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}(E_y) \quad \text{et} \quad \vec{F}_z = \vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}(E_z)$$

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}}$$

Moment  $\rightarrow \vec{M}_o = \vec{p} \wedge \vec{E}$

Energie potentielle  $E_p = \sum_i q_i V(P_i) = qV(P) - qV(N)$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(o)$$

## Courant électrique et distribution de courant

On appelle courant électrique tout mouvement d'ensemble des particules chargées dans un référentiel.

Divers types de courants électriques

- courant de conduction  $\rightarrow$  déplacement d'ensemble de particules chargées dans un milieu conducteur lié à l'existence d'un champ électrique  $\vec{E}$   
 $\vec{F} = q\vec{E}$
- courant de contact
- courant de diffusion

Intensité électrique = charge totale qui traverse une surface  $dS$  par unité de temps

$$I_{dS}(t) = \frac{\delta q}{dt}$$

## Densité de courant

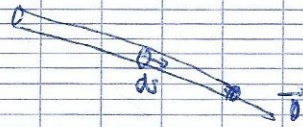
Soit  $\rho_m$  la densité volumique de charges mobiles.

Soit l'acte d'un champ électrique externe, les porteurs de charges sont animés d'un movt d'ensemble à la vitesse moyenne  $\vec{v}$

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} \quad (A/m^2) \quad \vec{j} \text{ est le flux convectif (comme le débit)}$$

surfacique  $\vec{j}_{sur} = \vec{j} \cdot \vec{e} \quad (A/m)$

linéique  $I = \int \vec{j} \cdot \vec{S}$



## Champ magnétique créé par des courants permanents

force de Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{B}$  le champ magnétique qui agit sur une particule de charge  $q$  et animée d'une vitesse  $\vec{v}$

$B$  en Tesla (T)

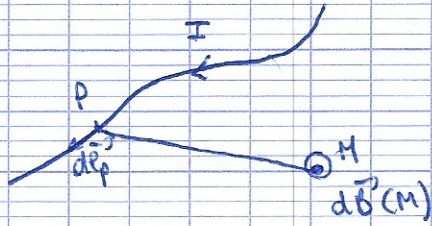
principe de superposition  $\rightarrow$  2 champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  agissant sur la même particule  
 $\rightarrow \vec{F}_1 = q \vec{v} \wedge \vec{B}_1$  et  $\vec{F}_2 = q \vec{v} \wedge \vec{B}_2$   
 $\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \vec{v} \wedge \vec{B}_1 + q \vec{v} \wedge \vec{B}_2 = q \vec{v} \wedge \underbrace{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}_{\vec{B}}$

Symétrie :

- L'image par la symétrie par rapport à un plan  $P$  du champ  $\vec{B}$  est égal à l'opposé du symétrique de  $\vec{B}$  par rapport au plan  $P$
- Le champ créé en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à un plan de symétrie de la distribution est égal à l'opposé du symétrique du champ magnétique créé en  $M$ .
- Le champ mag. est  $\perp$  aux plans de symétrie de la distribution qui le crée
- Le champ mag. créé en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution est égal au symétrique du champ magnétique créé en  $M$ .

## Loi de Biot et Savart

Soit un circuit filiforme parcouru par un courant  $I$ . Une longueur  $dl$  de ce circuit a une densité linéique de courant  $I dl$  dans le sens de parcours du courant.



Le champ magnétique élémentaire créé par cet élément de courant s'écrit :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I(P) d\vec{l}_p \wedge \frac{\vec{r}}{(r)^3}$$

$\mu_0$  perméabilité du vide ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ) ( $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ )

Alors

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \text{circuit}} I(P) d\vec{l}_p \wedge \frac{\vec{r}}{(r)^3}$$

pour une charge en mouvement  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{r}}{(r)^3}$   
située au pt P

force de Laplace = soit un circuit traversé par I. Les actions de charges du circuit subissent la force :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

→ cette force se transforme à l'élément de circuit

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans 2 conducteurs rectilignes,  $\infty$ , //, de section circulaire négligeable et distants de 1m produit une force d'interaction entre ces 2 conducteurs égale à  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  par mètre de conducteurs.

Propriété du champ magnétique

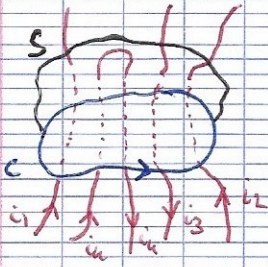
Conservat° des flux

Pour un champ créé par un fil  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

Le flux  $\Phi = \iint_{\text{nes}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_n$  à travers toute surface fermée est nul.



Théorème d'Ampère : La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé  $C$  est égale au produit de  $\mu_0$  par l'intensité totale qui traverse une surface quelconque s'appuyant sur  $C$  :

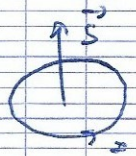


$$\oint_{\text{sur } C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{traverse}}$$

$$I_{\text{traverse}} = i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_4 = i_1 + i_2 - i_3$$

Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

$$\vec{B}(\vec{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{ON} \cdot \vec{J}) \vec{ON} - \vec{ON} \wedge \vec{J}}{ON^3}$$



en sphérique 
$$\vec{B}(N) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{J} = I \vec{S} = IS \vec{u}_z$$

moment exercé sur un dipôle = 
$$\vec{T}(M) = \vec{J} \wedge \vec{B}(M)$$

énergie potentielle 
$$E_p = -\vec{J} \cdot \vec{B}$$

Propriétés locales et globales du champ magnétostatique

Eq de Maxwell du champ magnétostatique :

Equation de Maxwell - flux ou Maxwell - Thomson :

$$\text{div } \vec{B} = \vec{0}$$

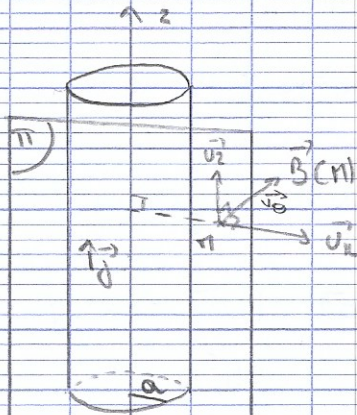
Equation de Maxwell - Ampère

$$\text{rot } \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

Le champ magnétique est à flux conservatif :

- le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée est nul
- le flux de  $\vec{B}$  est le même à travers toute sect<sup>e</sup> d'un tube de champ

Exemple de champ magnétique



Symétrie : la distribution de courant ne dépend que de la distance  $r$  à un axe fixe  $Oz$

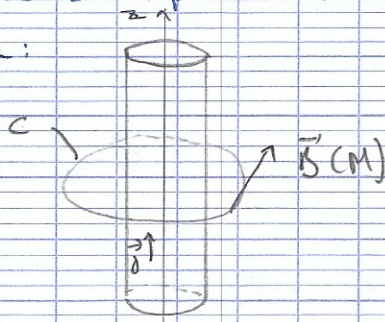
$$\vec{B}(r) = \vec{B}(r, \theta, z)$$

Le plan  $\Pi$  ( $r, u_r, u_z$ ) est plan de symétrie de  $\mathcal{D}$ ,  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan, il est donc porté par  $\vec{u}_\theta$  :  $\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{u}_\theta$

La distribution  $\mathcal{D}$  est invariante pour toute rotation

autour de l'axe  $Oz$  et pour toute translation parallèlement à l'axe  $Oz$   $\rightarrow B_\theta(r) = B(r)$

théorème d'Ampère :



$$\mathcal{E}_B = \oint_{\text{loop}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{loop}} B(r) dl$$

$$\mathcal{E}_B = B(r) \oint_{\text{loop}} dl = B(r) 2\pi r$$

$$\Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_r \quad \text{Il faut exprimer } I_r$$

La densité de courant est  $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$

Pour  $r < a$ ,  $I_r = j \pi r^2 = \frac{I r^2}{a^2}$  et pour  $r > a$   $I_r = I$

$$r < a \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi a^2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge a \vec{u}_r$$

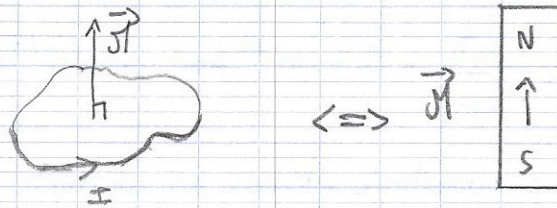
$$r > a \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 a^2}{2} \cdot \frac{\vec{j} \wedge a \vec{u}_r}{(a r \cdot \vec{u}_r)^2}$$

Limite du fil infini : si  $a \rightarrow 0$  le câble devient un fil et seul le 2<sup>e</sup> cas existe

Le champ magnétique créé par un fil se confond avec l'axe  $Oz$  parcouru par un courant  $I$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{v}_z \wedge \vec{OM}}{(\vec{OM} \cdot \vec{u}_z)^2}$$

### Dipôle magnétique



Moment magnétique  $\vec{M}$  d'une boucle de courant plane :  $\vec{M} = I \vec{S}$

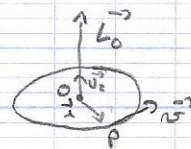
$\vec{S}$  est le vecteur surface associé au contour, vecteur orienté selon la règle de la main droite.  
Pour un contour plan  $\vec{S} = I \vec{n}$  donc  $\vec{M} = I S \vec{n}$

### Moment magnétique atomique

Moment cinétique de l'atome d'hydrogène : l'électron décrit un cercle autour du noyau  
↳ modèle planétaire

Le moment cinétique au pt O de l'électron dans son mouvement autour du noyau s'écrit :

$$\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge m \vec{v} = m r v \vec{u}_z$$



Moment magnétique de l'atome d'hydrogène

↳ l'orbite de l'électron est équivalente à une boucle de courant circulaire, parcourue par un courant d'intensité  $I = q/T$ , où  $q$  est la charge de l'électron et  $T$  la période de son mouvement.

$$\text{↳ } \vec{M} = \frac{q}{T} \pi r^2 \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{q v}{2\pi r} \pi r^2 \vec{u}_z = \frac{q v r}{2} \vec{u}_z = \frac{q}{2m} \vec{L}_O$$

On pose  $\gamma = \frac{q}{2m} \leftarrow$  rapport gyromagnétique de l'électron

A tout moment cinétique  $\vec{L}$  est associé un moment magnétique  $\vec{M}$  tel que :

$$\vec{M} = \gamma \vec{L} \quad \gamma \text{ rapport gyromagnétique}$$

↳ pour le mvmt orbital de l'e<sup>-</sup> autour du noyau  $\gamma = \frac{-e}{2m}$

L'unité de moment magnétique atomique est le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \simeq 10^{-23} \text{ Am}^2$$

Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique

Soit une spire  $\mathcal{S}$ , plane, parcourue par un courant d'intensité  $i$  et soumise à un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_0$

La résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire est :

$$\vec{F}_L = \oint_{\text{sur } \mathcal{S}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0 = i \left( \oint_{\text{sur } \mathcal{S}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B}_0$$

quand  $\mathcal{S}$  décrit He la spire, la somme des petits vecteurs  $d\vec{\ell}$  est nulle puisque la spire est fermée.

La résultante des forces de Laplace sur une spire parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique uniforme est nulle.

Le moment résultant  $\vec{\Gamma}_A$  en A est  $\vec{\Gamma}_A = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$

Dans un champ non uniforme  $\vec{\Gamma}_A = \vec{M} \wedge \vec{B}(A)$  et  $\vec{F}_L = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B})$

Énergie potentielle du dipôle dans un champ extérieur  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

## Mouvement d'une particule chargée dans un champ élec. ou magné.

Soit une particule de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  soit:

- dans un champ élec. une force  $\vec{f} = q\vec{E}$
- dans un champ magn. une force  $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

→ force de Lorentz  $\boxed{\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$

Loi d'Ohm locale = relie la densité de courant  $\vec{j}$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .

$$\rightarrow \vec{j} = nq\vec{v}$$

↑  $n$ : nb moyen de particules de charge  $q$

Si des électrons et placés dans  $\vec{E}$ , ils acquièrent, après un régime transitoire  $\tau$ , une vitesse:  $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma\vec{E}} \quad \text{avec } \gamma = \frac{nq^2\tau}{m} \text{ conductivité}$$

Rayon du mvmt circulaire d'une particule chargée dans  $\vec{B} = R = \frac{mv_0}{|q|B}$

↳ eq. d'un cercle  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$   
↑ rayon

Résistance d'un conducteur de sect°  $S$  et longueur  $L$

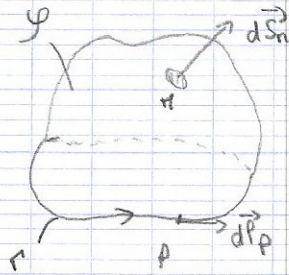
$$\boxed{R = \frac{L}{\gamma S}}$$

Puissance thermique créée par le champ au conducteur:

$$\boxed{P_v(M) = \gamma E(M)^2 = \frac{j(M)^2}{\gamma}}$$

52

## Equation locale de Maxwell - Faraday



Théorème de Stokes : la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{a}$  le long d'un contour orienté  $\Gamma$  est égale au flux du rotationnel de  $\vec{a}$  à travers une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur  $\Gamma$  et orientée comme  $\Gamma$  selon la règle de la main droite.

$$\oint_{\Gamma \in \mathcal{S}} \vec{a}(P) \cdot d\vec{p} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot} \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_n$$

↳ un champ à rotationnel nul est un champ à circulation conservative

$$\vec{E} \text{ est à circulation conservative} \Leftrightarrow \text{rot} \vec{E}(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists V, \vec{E}(M) = -\text{grad} V(M)$$

champ électrostatique = il est à circulation conservative, a une propriété locale :  $\text{rot} \vec{E}(M) = \vec{0}$ , équivalente à une autre propriété locale :  $\vec{E}(M) = -\text{grad} V(M)$

## Equation de Maxwell - Gauss pour le champ électrostatique

$$\text{rot} \vec{E}(M) = \vec{0}$$

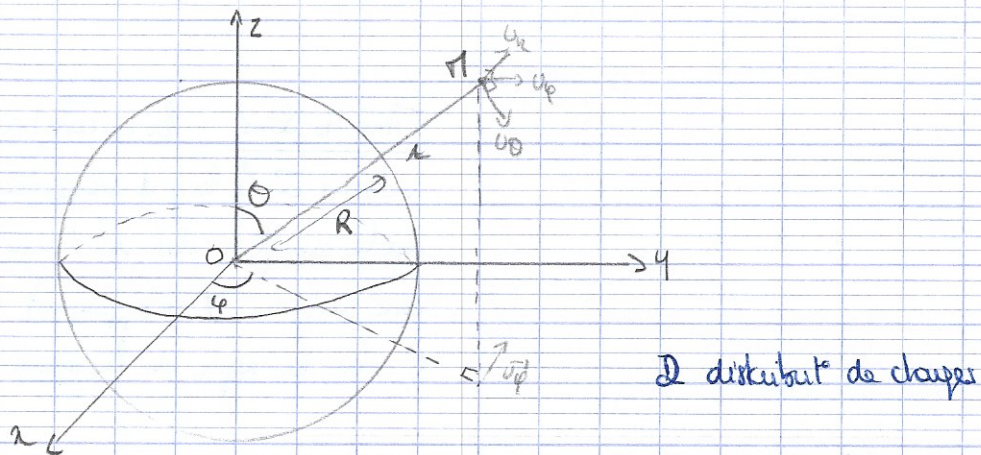
Equation de Maxwell - Gauss : relie la densité volumique de charge au champ électro

$$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$\text{sat } \vec{E}(M) = -\text{grad} V(M) \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{équation de Poisson}$$

si  $\rho(M) = 0$   $\Delta V = 0$  ép. de Laplace.

## Exemple de champ électrostatique



Champ créé par le noyau?  $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\varphi \vec{u}_\varphi$   
 ∃ plan contenant le centre on est plan de symétrie de  $\mathcal{D}$  donc  $\vec{E}(M)$  appartient à tous ces plans.  $\rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$

Théorème de Gauss : on considère une autre sphère plus grande englobant le noyau ( $\mathcal{D}$ )

$$\Phi_E = \iint_{\mathcal{D}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_p$$

$$\Phi_E = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{\Phi_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{il faut maintenant calculer } \Phi_{int}$$

Pour  $r < R$  ( $r \in$  noyau)  $\Phi = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$   $\rho = \text{charge volumique}$   
 $q = eV$

$r > R$   $\Phi_{int} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  car les charges n'occupent que la sphère de rayon  $R$

$$\text{Lors } r < R \quad \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{et } \vec{V}(M) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + A$$

$$r > R \quad \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{et } \vec{V}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + B$$

$$\text{C.L. } \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \quad E = 0 \rightarrow B = 0 \\ r = R \quad -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow A = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \end{array}$$



Énergie de constitut<sup>o</sup> d'une sphère uniformément chargée ?

↳ va dépendre de  $Q$ ,  $R$  et  $\epsilon_0$

$$[E] = ML^2T^{-1} \rightarrow E \propto K \frac{Q^2}{\epsilon_0 R}$$

$$q = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow dq = \rho \frac{4\pi}{3} r^2 dr \quad V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

travail  $\delta T = dqV(r) = E_p = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr$

$$E = \int_0^R dqV(r) dr = \int_0^R \frac{4\pi}{3} \frac{\rho^2}{\epsilon_0} r^4 dr = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R}$$

$$K = \frac{3}{4\pi 5}$$



## Equations de Maxwell

Champ électromagnétique : il est défini par son action sur une charge ponctuelle  $q$ . Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  si cette particule se trouve au pt  $M$  à l'instant  $t$ , emmenée de la vitesse  $\vec{v}_{/R}(t)$ , la force de Lorentz qu'elle subit de la part du champ électromagnétique est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{/R}(M,t) + \vec{v}_{/R}(t) \wedge \vec{B}_{/R}(M,t))$$

↳ cette relat° définit le champ électromagnétique  $(\vec{E}_{/R}(M,t), \vec{B}_{/R}(M,t))$  au point  $M$ , à l'instant  $t$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

↳ le champ dépend du référentiel dans lequel on se trouve.

## Equat° de Maxwell

Le champ électromag.  $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$  vérifie les 4 équat° de Maxwell, qui constituent le postulat de base :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$$

eq. Maxwell - Gauss

$$\operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0$$

eq. Maxwell - Thomson

$$\operatorname{rot} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t)$$

eq. Maxwell - Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{B}(M,t) = \mu_0 \left( \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t) \right)$$

eq. Maxwell - Ampère

$\epsilon_0$  = permittivité électrique [ $F \cdot m^{-1}$ ]

$\mu_0$  = permittivité magnétique [ $H \cdot m^{-1}$ ]

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$

} vide

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Ces équations sont linéaires  $\rightarrow$  principe de superposition s'applique.

Régime stationnaire

$$\hookrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B}(M) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}(M) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M) \end{cases}$$

les 2 champs sont indépendants

forme intégrale des équations de Maxwell

Théorème de Gauss : eq. Maxwell-Gauss

$$\phi_e(t) = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\epsilon_0}$$

où  $\phi_e(t) = \oint_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S}_{\mathcal{P}} \rightarrow$  flux de  $\vec{E}$  à l'instant  $t$  à travers une

surface fermée et fixe  $\mathcal{S}$  et  $Q_{\text{int}}(t) = \iiint_{\text{int } \mathcal{S}} \rho(r, t) d\tau_r$  la charge contenue

dans  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t$ .

Flux du champ magnétique : Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul :

$$\phi_b(t) = 0$$

$\hookrightarrow$  le champ magnétique est à flux conservatif

Loi de Faraday :  $\mathcal{E}_e(t) = - \frac{d\phi_b(t)}{dt}$

avec  $\mathcal{E}_e(t) = \oint_{\mathcal{P} \in \Gamma} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{l}_{\mathcal{P}}$  circulat° de  $\vec{E}$  le long du contour  $\Gamma$  et  $\phi_b(t) = \iint_{\text{int } \Gamma} \vec{B}(r, t) \cdot d\vec{S}_r$

le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface  $\mathcal{S}$

Theoreme d'Ampere generalise =  $\mathcal{E}_b(t) = \mu_0 I_{Y_r}(t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E(Y_r, t)}{dt}$

Avec  $\mathcal{E}_b(t) = \oint_{\rho \in \Gamma} \vec{B}(\rho, t) \cdot d\vec{\rho}$  la circulation de  $\vec{B}$  le long du contour  $\Gamma$ ,

$\Phi_E(Y_r, t) = \iint_{\pi \in Y_r} \vec{E}(\pi, t) \cdot d\vec{S}_\pi$  le flux de  $\vec{E}$  a travers la surface  $Y_r$

$I_{Y_r}(t) = \iint_{\pi \in Y_r} \vec{j}(\pi, t) \cdot d\vec{S}_\pi$  l'intensite traversant la surface

### Energie electromagnetique

#### Puissance cede par le champ electromagnetique a la matiere

La puissance volumique cede par le champ electromagnetique a la matiere est :

$$\mathcal{P}_v(\pi, t) = \frac{d\mathcal{P}(\pi, t)}{d\tau_\pi} = \vec{j}(\pi, t) \cdot \vec{E}(\pi, t)$$

#### Bilan d'energie

- Soit une densite volumique d'energie electromagnetique  $u_{em}(\pi, t)$  (analogue a la densite volumique de charge) tq l'energie electromag. contenue dans un volume  $d\tau_\pi$  autour de  $M$  a l'instant  $t$  est :

$$dU_{em} = u_{em}(\pi, t) d\tau_\pi$$

- Densite de courant d'energie electromagnetique  $j_{em}(\pi, t)$  (analogue a la densite de courant electrique ou au vecteur densite de courant d'energie thermique) :

$$d\mathcal{P} = j_{em}(\pi, t) \cdot d\vec{S}_\pi$$

Soit  $V$  un volume quelconque, fixe et indéformable, le bilan d'énergie électromagnétique du volume  $V$  s'écrit :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = - \mathcal{P}_{sortant} - \mathcal{P}_{perdue}$$

L'équation locale qui traduit le bilan d'énergie électromagnétique :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} (M, t) + \operatorname{div} \vec{j}_{em} (M, t) = - (\vec{j} \cdot \vec{E}) (M, t)$$

### Equation locale de Poynting

On peut exprimer  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  en fonction de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'aide des eq. de Maxwell Maxwell-Ampère :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_v = \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$\text{on voit que } \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} &= \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \\ &= -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

avec eq. Maxwell-Faraday pour exprimer  $\operatorname{rot} \vec{E}$  :

$$\mathcal{P}_v = -\operatorname{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Le vecteur :  $\frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}$  est le vecteur de Poynting

↳ noté en général  $\vec{\Pi}(M, t)$  ou  $\vec{R}$  ou  $\vec{S}$

La densité volumique d'énergie électromag.

$$u_{em}(M,t) = \frac{\epsilon_0 E^2(M,t)}{2} + \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou vecteur de Poynting, est :

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0}$$

L'équation locale de Poynting

$$\text{div } \vec{\Pi}(M,t) + \frac{\partial u_{em}(M,t)}{\partial t} = -\vec{j}(M) \cdot \vec{E}(M,t)$$

↳ s'interprète comme un bilan local d'énergie pour le champ électromag.  
La forme globale de ce bilan, pour un volume  $V$  est :

$$\phi_{\Pi}(t) + \frac{dU_{em}(t)}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{produit}}(t)$$

où  $\phi_{\Pi}(t)$  est le flux de  $\vec{\Pi}$  sortant de la surface fermée,  $\mathcal{P}_{\text{produit}}$  entourant le volume  $V$  et

$$U_{em}(t) = \iiint_{\text{neV}} u_{em}(M,t) d^3x_{\text{n}} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{produit}}(t) = \iiint_{\text{neV}} (\vec{j} \cdot \vec{E})(M,t) d^3x_{\text{n}}$$

Exemple



Cylindre conducteur, conductivité  $\gamma$ , de rayon  $a$ , parcouru par le courant  $I$ .

Le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  dans le conducteur est tq son flux à travers une section droite du conducteur est égal à  $I$ .  $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$

on a,  $\vec{E}(M) = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \vec{u}_z$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \wedge \vec{u}_z$$

Le vecteur de Poynting s'écrit alors  $\vec{\Pi}(M) = \frac{\vec{E}(M) \wedge \vec{B}(M)}{\mu_0} = - \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 a^4} \wedge \vec{u}_z$

Soit une portion de fil de hauteur  $h$ , l'énergie du champ électromagnétique dans le cylindre de rayon  $a$  et de hauteur  $h$  est :

$$U_{em} = \iiint_{\text{cylindre}} \left( \frac{\epsilon_0 E^2(M)}{2} + \frac{B^2(M)}{2\mu_0} \right) d\tau_M$$

$$\Rightarrow U_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{I}{\gamma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h + \int_0^a \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \wedge \right)^2 d\pi h dz$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{I^2 h}{\gamma^2 \pi a^2} + \frac{\mu_0 I^2 h}{16\pi} = \text{cste car champ permanent}$$

Puissance:  $\mathcal{P}_v = \iiint_{\text{cylindre}} \vec{j}(M) \cdot \vec{E}(M) d\tau = \iiint_{\text{cyl.}} \frac{I^2}{\gamma \pi^2 a^4} d\tau_M = \frac{I^2 h}{\gamma \pi a^2}$

La puissance électromagnétique émettant dans le volume est :

$$\mathcal{P}_{\text{émet}} = \iint_{\text{face } \mathcal{F}} \vec{\Pi}(P) \cdot (-d\vec{S}_P)$$

en un pt  $P$  de la surface latérale,  $r=a \rightarrow \vec{\Pi}(P) = - \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 a^4} a \vec{u}_r$

$$\mathcal{P}_{\text{émet}} = \frac{I^2}{2\gamma \pi^2 a^4} a \times d\pi a h = \frac{I^2 h}{\gamma \pi a^2}$$

↳  $\mathcal{P}_{\text{émet}} = \mathcal{P}_j$  : la puissance émettante est intégralement dissipée par effet Joule, à l'intérieur de celui-ci



## Approximat° des régimes quasi-stationnaires

Equation de propagat° des champs dans un milieu vide de charge et de courant

$$\hookrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} & \text{car } \rho = 0 \text{ et } \vec{j} = \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Le champ élec vérifie

$$\Delta \vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

champ magnétique

$$\Delta \vec{B}(M,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M,t)}{\partial t^2}$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient l'équat° de d'Alembert tridimensionnelle, la vitesse de propagat° de l'onde étant  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

## Approximat° des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

$T^*$  durée caractéristique d'évolut° des sources du champ électromag.

↳ dans ces régimes on néglige les phénomènes de propagat°, c'est qu'on se place à une distance des sources suffisamment faible pour que leurs variat° temporelles soient instantanément ressenties.

Dans ce régime, les phénos. st étudiés à des distances  $D$  des sources  $t_q$

$$D \ll c T^*$$

Les phénos. st étudiés à l'ordre un en  $\alpha = \frac{D}{c T^*}$

Approximat° des régimes quasi-stationnaires à dominante magnétique

↳  $E \ll cB$

Dans cette approx  $\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t)$  eq. Maxwell-Ampère

eq. locale de conservat° de la charge =  $\text{div } \vec{j}(M, t) = 0$

↳ le vecteur  $\vec{j}$  est à flux conservatif